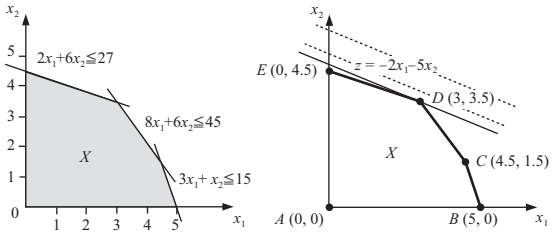
章末問題の解答

第１章

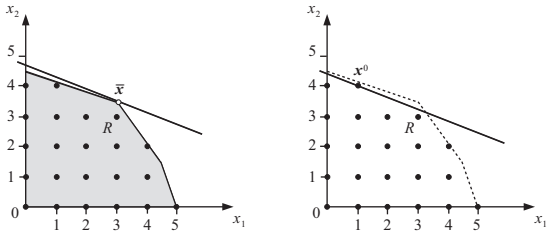
1.1 (1) 総利潤 $2x_1+5x_2$ を $2x_1+6x_2 \leqq 27, 8x_1+6x_2 \leqq 45, 3x_1+x_2 \leqq 15, x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$ のもとで最大にせよ.

(2) 図から最適解は $x_1=3, x_2=3.5, z=23.5$ となる.



1.2 (1) 総利潤 $2x_1+5x_2$ を $2x_1+6x_2 \leqq 27, 8x_1+6x_2 \leqq 45, 3x_1+x_2 \leqq 15, x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0,$ x_1 : 整数, x_2 : 整数 のもとで最大にせよ.

(2) 図から $(x_1,x_2)=(3,3.5)$ に最も近い格子点 R $(3,3)$ は整数計画問題の最適解 $(x_1,x_2)=(1,4)$ から離れた点であり，近似最適解にはなり得ないことがわかる. このとき，最適解は $x_1=1, x_2=4, z=22$ となる.



1.3 総輸送費用 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ を $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=1,\ldots,m,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,\ldots,n,$ $x_{ij} \geqq 0$ のもとで最小にせよ.

1.4 総費用 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ を $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j=1,\ldots,n,$ $x_{ij} = 0$ or 1 のもとで最小にせよ.

第2章

2.1 (1) $x_j = x_j^+ - x_j^-,\ x_j^+ \geqq 0,\ x_j^- \geqq 0$ とおき $|x_j| = x_j^+ + x_j^-$ と変形すれば, minimize $\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^+ + x_j^-)$ subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^+ - x_j^-) = b_i,\ i=1,\ldots,m,\ x_j^+ \geqq 0,\ x_j^- \geqq 0,$ $j=1,\ldots,n$ と定式化される.

(2) 変数 $t = 1/(\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0),\ y_j = x_j t,\ j=1,2,\ldots,n$ を導入すれば, minimize $\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 t,$ subject to $\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 t = 1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i t = 0,\ i=1,\ldots,m,$ $y_j \geqq 0,\ j=1,\ldots,n, t>0$ と定式化される.

(3) 補助変数 λ を導入して, $\sum_{j=1}^{n} c_j^l x_j,\ l=1,2,\ldots,L$ を制約式に変換すれば, minimize λ subject to $\sum_{j=1}^{n} c_j^l x_j \leqq \lambda,\ l=1,\ldots,L,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,\ldots,m,\ x_j \geqq 0,$ $j=1,\ldots,n$ と定式化される.

2.2 (1) maximize $z = 3x_1 + 2x_2$ subject to $2x_1 + 5x_2 \leqq 40,\ 3x_1 + 1x_2 \leqq 30,\ 3x_1 + 4x_2 \leqq 39,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

(2) minimize $z = 9x_1 + 15x_2$ subject to $9x_1 + 2x_2 \geqq 54,\ 1x_1 + 5x_2 \geqq 25,\ 1x_1 + 1x_2 \geqq 13,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

2.3 $z^* = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^l,\ l=1,\ldots,L$ がすべて最適解のとき $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^* = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^l = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l z^* = z^*$ となる. また $A\boldsymbol{x}^l = \boldsymbol{b},\ l=1,\ldots,L$ であるから $\sum_{l=1}^{L} \lambda_l A\boldsymbol{x}^l = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l \boldsymbol{b}$ となり $A\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$ である. $\boldsymbol{x}^* \geqq \boldsymbol{0}$ となることは明らか.

2.4 x_k^+ と x_k^- に対応する制約式の列ベクトルは線形従属であることより明らかである.

2.5 2 番目の問題を minimize $(z/\mu\lambda)$ subject to $A(\boldsymbol{x}/\lambda) = \boldsymbol{b},\ (\boldsymbol{x}/\lambda) \geqq \boldsymbol{0}$ と変形すれば, 両者の関係は明らかである.

2.6 (1) スラック変数 x_3, x_4, x_5 を導入してシンプレックス法を適用すれば, ピボット項が順次 [6], [6] となり, サイクル 2 で最適解 $x_2 = 3.5, x_1 = 3\ (x_3 = x_4 = 0, x_5 = 2.5),$ $\min z = -23.5$ を得る.

(2) スラック変数 x_3, x_4 を導入してシンプレックス法を適用すれば, ピボット項が順次 [6], [4] となり, サイクル 2 で最適解 $x_2 = 70/3, x_1 = 20/3\ (x_3 = x_4 = 0),$ $\min z = -200/3$ を得る.

(3) スラック変数 x_3, x_4, x_5 を導入してシンプレックス法を適用すれば, 順次ピボット項が [12], [25/4] となり, サイクル 2 で最適解 $x_2 = 32/3, x_4 = 24, x_1 = 272/3$

$(x_3 = x_5 = 0)$, $\min z = -944/3$ を得る．

(4) ピボット項が [10] となり，サイクル 1 で x_1 の列がすべて負となるので，解は非有界となる．

(5) 自由変数を $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ とおけば，ピボット項が順次 [20], [5], [0.2] となり，サイクル 3 で最適解 $x_2 = 11, x_1^+ = 9.75$ $(x_1^- = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$, $\min z = -315$ を得る．

(6) 人為変数 x_5, x_6 を導入して第 1 段階を開始すれば，順次ピボット項が [3], [5/3] となり，サイクル 2 で $w = 0$ となるので，第 2 段階に進めば，ピボット項が [4/5] となり，1 回のピボット操作で，最適解 $x_2 = 5/4, x_3 = 1/2$ $(x_1 = x_4 = 0)$, $\min z = -17/4$ を得る．ただし，$\bar{c}_1 = 0$ となるので x_1 を基底変数にすれば別の最適解が得られる．

2.7 (1) 順次ピボット項が [2], [1.5], [2/3] となり，サイクル 3 で最適解 $x_1 = 1.5, x_2 = 0, x_3 = 3.5, \min z = 8.5$ を得る．

(2) 順次ピボット項が [2], [3], [2.5] となり，サイクル 3 で最適解 $x_1 = 5/6, x_2 = 1/3, x_3 = 0, \min z = 0.6$ を得る．

(3) 順次ピボット項が [1], [2], [6] となり，サイクル 3 で最適解 $x_1 = 5/6, x_2 = 0, x_3 = 5/3, \min z = -2.5$ を得る．

2.8 (1) I', J' に関する正準形において，非基底変数のうち x_t だけを -1 とし，残りの非基底変数 $x_j (j \in J' - \{t\})$ を零とおけば $x_t = -1, x_j = 0$ $j \in J' - \{t\}, x_i = \bar{b}_i + \bar{a}'_{it}$ $i \in I'$, $-z = -\bar{z} + \bar{c}'_t$ となるが，これらの解は当然 I, J に関する正準形をもみたすので，特に z に関する式に代入すれば $-\bar{z} + \bar{c}'_t + \sum_{j \in J} \bar{c}_j x_j = -\bar{z}$ となり $-\bar{c}'_t = \sum_{j \in J} \bar{c}_j x_j$ が得られる．

(2) $\bar{c}'_t < 0$ であることを考慮すれば，右辺には正の項が存在しなければならない．それを $\bar{c}_r x_r > 0, r \in J$ として，この r がどのような添字であるかを調べてみよう．$r \in J$ より $r \notin I$ であり，$x_j = 0$ $j \in J' - \{t\}$ より $r \notin J' - \{t\}$．したがって $r \in I' \cup \{t\}$ となるが，$r = t$ とすれば $t \in J$ となり，$x_t = -1$ により $\bar{c}_t < 0$ となるので，I, J に関する正準形で x_t は基底に入る候補となる．しかしこの段階では x_q が基底に入ると仮定しており，しかも，$t < q$ であるから手順 1B と矛盾する．したがって $r \in I'$ である．$r \notin I, r \in I'$ より x_r は巡回の途中で基底に取り入れられなければならないので $r \in T$．一方，$\bar{c}_q < 0, \bar{c}'_t < 0, \bar{a}'_{qt} > 0, t \in T, t < q, x_i = \bar{b}_i + \bar{a}'_{it}$ $i \in I'$ より $\bar{c}_q x_q = \bar{c}_q (\bar{b}_q + \bar{a}'_{qt}) = \bar{c}'_q \bar{a}'_{qt} < 0$ $(\because \bar{b}_q = 0)$ であるから，$\bar{c}_r x_r > 0, r \in J$ を考慮すれば $r \neq q$ である．q は T の中の最大添字で r も T に入っているので $r < q$ を得る．

(3) I, J に関する正準形では x_q が基底に入ると仮定したので，手順 1B より $\bar{c}_r \geqq 0$ $(\because r \in T)$ であるので $\bar{c}_r x_r > 0, r \in J$ より $\bar{c}_r > 0$，$x_r > 0$ でなければならない．$r \in I'$ に注意すれば $x_i = \bar{b}_i + \bar{a}'_{it}\ i \in I'$ より $x_r = \bar{b}_t + \bar{a}'_{rt}$．ここで $\bar{b}_r = 0$ である．なぜなら，$r \notin I$，$r \in I'$ であることより，I, J に関する正準形から I', J' に関する正準形にいたる間で r は基底に取り入れられているが，退化が起こっているのでその段階では x_r に対する $\bar{b}$ の値は零であり，その後のピボット操作でも $\bar{b}$ の値が零の行からピボット項が選ばれる以上，x_r に対する $\bar{b}$ の値は零である．したがって $\bar{c}_r > 0$，$x_r > 0$ より $x_r = \bar{a}'_{rt} > 0$ でなければならない．$\bar{c}'_t < 0$，$\bar{a}'_{rt} > 0$，$\bar{b}_r = 0, r < q$ に注意すれば I', J' に関する正準形において q が基底から出ると仮定したことは，手順 3B に反する．

2.9 通常のシンプレックス法で解けば，ピボット項が順次 [1/4], [30], [8/25], [1/40], [50], [1/3] となり，サイクル 6 でサイクル 0 の状態にもどり巡回の生じることが確かめられる．Bland の巡回対策を含めたシンプレックス法で解けば，ピボット項が順次 [1/4], [30], [8/25], [1/40], [125/2], [2/15] となり，サイクル 6 で最適解 $x_3 = 1, x_5 = 3/100, x_1 = 1/25\ (x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = 0), \min z = -1/20$ が得られる．

2.10 m 個の制約式の両辺に $\pi_1, \ldots, \pi_m$ なる未定乗数を掛けて目的関数 z の式から引けば $z - \boldsymbol{\pi b} = \sum_{j=1}^{n} (c_j - \boldsymbol{\pi p}_j) x_j$ となるので，右辺の基底変数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ の係数が 0，すなわち，$c_j - \boldsymbol{\pi p}_j = 0, j = 1, 2, \ldots, m$ となるように $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ を定めるため，ベクトル行列形式で $\boldsymbol{\pi} B = \boldsymbol{c}_B$ と表せば，この式の解 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{c}_B B^{-1}$ はシンプレックス乗数ベクトルになる．

2.11 (1) 新たな拡大基底行列 $\hat{B}^*$ に左から現在の拡大基底逆行列 $\hat{B}^{-1}$ を掛けると，$\hat{B}^*$ は $\hat{B}$ の第 r 列のみを $\boldsymbol{p}_s, c_s$ で置き換えた行列であるので，第 r 列のみが $\hat{B}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_s \\ \hline c_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{p}}_s \\ \hline \bar{c}_s \end{pmatrix}$ となり，残りの列は第 i 成分が 1 の $(m+1)$ 次元の単位ベクトルになることより確認できる．

(2) $\hat{E}$ を (1) で得られた関係式の左から掛けると $\hat{E}\hat{B}^{-1}\hat{B}^* = \hat{I}$ となるので，両辺に右から $\hat{B}^{*-1}$ を掛けると $\hat{B}^{*-1} = \hat{E}\hat{B}^{-1}$ なる関係式が導かれる．

(3) (2) で得られた関係式 $\hat{B}^{*-1} = \hat{E}\hat{B}^{-1}$ の右辺を実際に計算すれば，現在の拡大基底逆行列 $\hat{B}^{-1}$ に対して $\bar{a}_{rs}$ に関するピボット操作を行えば，新たな拡大基底逆行列 $\hat{B}^{*-1}$ が求められることがわかる．

さらに，新しい拡大基底行列 $\hat{B}^*$ に対する $\bar{\boldsymbol{b}}, \bar{z}$ の値に * をつけて表せば

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{b}}^* \\ \hline -\bar{z}^* \end{pmatrix} = \hat{B}^{*-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \hat{E}\hat{B}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \hat{E} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{b}} \\ \hline -\bar{z} \end{pmatrix}$$

であるので，右辺を実際に計算すれば，現在の $\bar{\boldsymbol{b}}, -\bar{z}$ に対して $\bar{a}_{rs}$ に関するピボット操作を行えば，新たな定数 $\bar{\boldsymbol{b}}^*, -\bar{z}^*$ が求められることがわかる．

2.12　5. に対するシンプレックス法による結果を参考にして，各自試みよ．

2.13　自己双対であるための条件は $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b}^T, A^T = -A$ となる．

2.14　$\bar{\boldsymbol{x}}$ を主問題の実行可能解とすれば $A\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$ であるので，$\boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{z}$ とおき，最初の式の両辺に双対問題の実行可能解 $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ を掛けて 2 番目の式から引けば $\boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{\pi}}A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{z} - \bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{b}$ となるので，$\bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{b} = \bar{v}$ とおけば $(\boldsymbol{c} - \bar{\boldsymbol{\pi}}A)\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{z} - \bar{v}$ を得る．ここで $\boldsymbol{x}^o, \boldsymbol{\pi}^o$ をそれぞれ主問題と双対問題の最適解とし，そのときの目的関数の値をそれぞれ z^o, v^o とすれば，（強）双対定理より $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{\pi}^o A)\boldsymbol{x}^o = z^o - v^o = 0$ が得られる．逆に，$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{\pi}^o A)\boldsymbol{x}^o = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^o - \boldsymbol{\pi}^o\boldsymbol{b} = 0$ をみたせば，弱双対定理より $\boldsymbol{x}^o, \boldsymbol{\pi}^o$ はそれぞれ主問題と双対問題の最適解であることがわかる．

2.15　Gordon の定理の (2) が成立することは，ある正の実数 $\varepsilon > 0$ と n 次元行ベクトル $-\boldsymbol{1} = (-1, -1, \ldots, -1)$ に対して $\boldsymbol{\pi}A \leqq -\boldsymbol{1}\varepsilon,\quad \varepsilon > 0$ をみたす $\boldsymbol{\pi}, \varepsilon > 0$ が存在することと等価であるので，さらに $(\boldsymbol{\pi}, \varepsilon)\begin{pmatrix} A \\ \hline \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \leqq \boldsymbol{0}^T,\quad (\boldsymbol{\pi}, \varepsilon)\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \hline 1 \end{pmatrix} > 0$ をみたす $(\boldsymbol{\pi}, \varepsilon)$ が存在することと等価であると変形できる．ここで，この関係式の行列とベクトルを，それぞれ，Farkas の定理の (2) の行列 A とベクトル $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{b}$ であるとみなして，Farkas の定理を適用すれば $\begin{pmatrix} A \\ \hline \boldsymbol{1} \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \hline 1 \end{pmatrix}$ に $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ をみたす解が存在することになるので，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\boldsymbol{x} = 1$ に $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ をみたす解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在することになり，Gordon の定理の (1) が成立することがわかる．

2.16　(1) 余裕変数 x_3, x_4, x_5 を導入して両辺に (-1) を掛けて得られた正準形に双対シンプレックス法を適用すれば，ピボット項が順次 $[-3], [-5/3], [-3/5]$ となり，サイクル 3 で最適解 $x_2 = 11/3, x_3 = 5/3, x_1 = 8/3$ $(x_4 = x_5 = 0)$, $\min z = 65/3$ を得る．

(2) 余裕変数 x_3, x_4, x_5 を導入して両辺に (-1) を掛けて得られた正準形に双対シンプレックス法を適用すれば，ピボット項が順次 $[-5], [-19/5], [-4/19]$ となり，サイクル 3 で最適解 $x_5 = 20.5, x_2 = 1, x_1 = 8.5$ $(x_3 = x_4 = 0)$, $\min z = 30.5$ を得る．

(3) 余裕変数 x_4, x_5 を導入して両辺に (-1) を掛けて得られた正準形に双対シンプレックス法を適用すれば，ピボット項が順次 $[-3], [-16/3]$ となり，サイクル 2 で最適解 $x_2 = 3.5, x_3 = 0.25$ $(x_1 = x_4 = x_5 = 0)$, $\min z = 7.75$ を得る．

(4) 余裕変数 x_4, x_5, x_6 を導入して両辺に (-1) を掛けて得られた正準形に双対シンプレックス法を適用すれば，ピボット項が順次 $[-8], [-2]$ となり，サイクル 2 で最適解 $x_3 = 17.5, x_5 = 183.75, x_1 = 66.25$ $(x_2 = x_4 = x_6 = 0)$, $\min z = 317.5$ を

得る．

2.17 (1) $\boldsymbol{x}_B^* = (67/14, 15/7, 65/14)^T \geqq \boldsymbol{0}$ がそのまま最適基底解で $\min z = -313/7$ となる．

(2) $\boldsymbol{x}_B^* = (39/14, 36/7, -75/14)^T$ $\bar{z}^* = -264/7$ となり $\boldsymbol{x}_B^*$ の中に負のものが存在するので，双対シンプレックス法を適用すれば，ピボット項が $[-11/7]$ となり，1 回のピボット操作で最適解 $x_2 = 36/11$, $x_1 = 81/22$, $x_4 = 75/22$ $(x_3 = x_5 = 0)$, $\min z = -819/22$ が得られる．

2.18 (1) $\boldsymbol{x}_B^* = (25/6, 2.5, 10/3)^T \geqq \boldsymbol{0}$ がそのまま最適基底解で $\min z = -155/6$ となる．

(2) $\boldsymbol{x}_B^* = (19/6, 4, -1/6)^T$ $\bar{z}^* = -143/6$ となり $\boldsymbol{x}_B^*$ の中に負のものが存在するので，双対シンプレックス法を適用すれば，ピボット項が $[-4/9]$ となり，1 回のピボット操作で最適解 $x_2 = 51/16$, $x_1 = 63/16$, $x_4 = 3/8$ $(x_3 = x_5 = 0)$, $\min z = -381/16$ が得られる．

2.19 初期の実行可能正準形の A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ と改訂シンプレックス・タブローで与えられる情報の他に，双対シンプレックス法で必要とされる情報は，基底からでる変数 x_r に対する係数 $\bar{a}_{rj}$（j：非基底）と相対費用係数 $\bar{c}_j$（j：非基底）のみであり，$\bar{c}_j$ は改訂シンプレックス法の計算式で求められる．したがって，改訂シンプレックス法における基底逆行列 B^{-1} による $\bar{a}_{rj}$（j：非基底）の計算法を与えれば，双対シンプレックス法の手順は改訂シンプレックス法の形式で表現されることになる．ここで，$\bar{\boldsymbol{p}}_j$ の r 行の成分である $\bar{a}_{rj}$ は，改訂シンプレックス法の計算式 $\bar{\boldsymbol{p}}_j = B^{-1}\boldsymbol{p}_j$ により求められるが，$\bar{\boldsymbol{p}}_j$ の r 行以外の成分は不要なので，B^{-1} の r 行目の行ベクトル $[B^{-1}]_{r\cdot}$ のみを利用すればよい．したがって，非基底の添字 j に対して $\bar{a}_{rj} = [B^{-1}]_{r\cdot}\,\boldsymbol{p}_j$ を計算すればよいことになる．このような改訂双対シンプレックス法の手順は次のように要約できる．

改訂双対シンプレックス法の手順

初期の実行可能正準形の A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の他に，初期の実行可能基底解に対する逆行列 B^{-1} がわかっているものとする．

手順 0 B^{-1} をもとにして $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{c}_B B^{-1}$, $\boldsymbol{x}_B = \bar{\boldsymbol{b}} = B^{-1}\boldsymbol{b}$, $\bar{z} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{b}$ を計算して，表 2.12 の $\hat{B}^{-1}$ と $\hat{\bar{\boldsymbol{b}}} = (\bar{\boldsymbol{b}}, -\bar{z})^T$ の部分に記入する．

手順 1 すべての $\bar{b}_i \geqq 0$ であれば，最適解を得て終了．そうでなければ，$\underset{b_i<0}{\min}\bar{b}_i = \bar{b}_r$ となる添字 r を求める．

手順 2 非基底の添字 j に対して $\bar{a}_{rj} = [B^{-1}]_{r\cdot}\,\boldsymbol{p}_j$ を計算し，すべての $\bar{a}_{rj} \geqq 0$ ならば，主問題は実行可能でないという情報を得て終了．

手順 3　$\bar{a}_{rj}$ に負のものがあれば $\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{p}_j$ を計算し，$\min_{\bar{a}_{rj}<0} \dfrac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{rj}} = \dfrac{\bar{c}_s}{-\bar{a}_{rs}} = \Delta$ となる添字 s を求める．表 2.12 において，基底変数 x_r を非基底変数とし，その場所に x_s を新しい基底変数として入れる．

手順 4　$\bar{\boldsymbol{p}}_s = B^{-1}\boldsymbol{p}_s$ を計算し，$\hat{\bar{\boldsymbol{p}}}_s = (\bar{\boldsymbol{p}}_s, \bar{c}_s)^T$ の値を表 2.12 の $\hat{\bar{\boldsymbol{p}}}_s$ の列に記入する．$\bar{a}_{rs}$ に関するピボット操作を，表 2.12 の B^{-1}, $-\boldsymbol{\pi}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$, $-\bar{z}$ に対して行い，手順 1 へもどる．

2.20　等式制約式の両辺に (-1) を掛けて得られた x_3, x_4, x_5 を基底変数とする正準形は，$\bar{c}_1 = 4 > 0$, $\bar{c}_2 = 3 > 0$ であるので，双対実行可能正準形である．しかし，$\bar{b}_1 = -12 < 0$, $\bar{b}_2 = -10 < 0$, $\bar{b}_3 = -9 < 0$ であるので，(主) 実行可能正準形ではない．スラック変数 x_3, x_4, x_5 を基底変数に選べば，基底行列 B は単位行列で，B^{-1} もまた単位行列である．したがって $\boldsymbol{\pi} = c_B B^{-1} = (0,0,0)$, $\bar{\boldsymbol{b}} = B^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} = (-12,-10,-15)^T$, $\bar{z} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{b} = 0$ である．これらの値を表のサイクル 0 における基底逆行列と定数の部分に記入する．

サイクル	基底	基底逆行列			定数	$\hat{\bar{\boldsymbol{p}}}_s$
0	x_3	1			-12	-1
	x_4		1		-10	-1
	x_5			1	-15	[-2]
	$-z$					4
1	x_3	1		$-1/2$	$-9/2$	[$-5/2$]
	x_4		1	$-1/2$	$-5/2$	$-3/2$
	x_1			$-1/2$	15/3	1/2
	$-z$			2	-30	1
2	x_2	$-2/5$		1/5	9/5	
	x_4	$-3/5$	1	$-1/5$	1/5	
	x_1	1/5		$-3/5$	33/5	
	$-z$	2/5		9/5	$-159/5$	

表のサイクル 0 において $\min(-12,-10,-15) = -15 < 0$ であるので，非基底変数となるのは x_5 であり，$r = 3$ となる．非基底変数の係数 $\bar{a}_{rj}$, $r = 3$, $j = 1,2$ を計算する．基底逆行列 B^{-1} の第 3 行を $[B^{-1}]_{3\cdot}$ とすると $\bar{a}_{31} = [B^{-1}]_{3\cdot}\,\boldsymbol{p}_1 = (0,0,1)(-1,-1,-2)^T = -2$, $\bar{a}_{32} = [B^{-1}]_{3\cdot}\,\boldsymbol{p}_2 = (0,0,1)(-3,-2,-1)^T = -1$ と

なる．さらに，相対費用係数 $\bar{c_j}$, $j=1,2$ を計算すると $\bar{c_1}=c_1-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{p}_1=4+(0,0,0)(-1,-1,-2)^T=4$, $\bar{c_2}=c_2-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{p}_2=3+(0,0,0)(-3,-2,-1)^T=3$ となる．次に $\min\limits_{\bar{a}_{rj}<0}\dfrac{\bar{c_j}}{-\bar{a}_{rj}}=\min\left(\dfrac{4}{2},\dfrac{3}{1}\right)=\dfrac{4}{2}$ となるので x_1 が基底変数となる．$\bar{\boldsymbol{p}}_1$ を

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1=B^{-1}\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

のように計算し，$\bar{\boldsymbol{p}}_1$ と $\bar{c_1}=4$ を表のサイクル 0 における $\tilde{\boldsymbol{p}}_s$ の列に入れる．$r=3$ なので，[　] で囲まれた -2 がピボット項として定まり，基底逆行列，定数，$-\boldsymbol{\pi}$, $-\bar{z}$ の部分に対してピボット操作によりサイクル 1 の結果を得る．サイクル 1 では，x_3, x_4, x_1 が基底変数となり，表において $\min(-9/2,-5/2,15/2)=-9/2<0$ であるので，非基底変数となるのは x_3 であり，$r=1$ となる．非基底変数の係数 $\bar{a}_{rj}$, $r=1$, $j=2,5$ を計算する．基底逆行列 B^{-1} の第 1 行を $[B^{-1}]_{1\cdot}$ とすると $\bar{a}_{12}=[B^{-1}]_{1\cdot}\,\boldsymbol{p}_2=(1,0,-1/2)(-3,-2,-1)^T=-5/2$, $\bar{a}_{15}=[B^{-1}]_{1\cdot}\,\boldsymbol{p}_5=(1,0,-1/2)(0,0,1)^T=-1/2$ となる．さらに，相対費用係数 $\bar{c_j}$, $j=2,5$ を計算すると $\bar{c_2}=c_2-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{p}_2=3+(0,0,2)(-3,-2,-1)^T=1$, $\bar{c_5}=c_5-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{p}_5=0+(0,0,2)(0,0,1)^T=2$ となる．次に $\min\limits_{\bar{a}_{rj}<0}\dfrac{\bar{c_j}}{-\bar{a}_{rj}}=\min\left(\dfrac{1}{5/2},\dfrac{2}{1/2}\right)=\dfrac{1}{5/2}$ となるので x_2 が基底変数となる．$\bar{\boldsymbol{p}}_2$ を

$$\bar{\boldsymbol{p}}_2=B^{-1}\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&-1/2\\0&0&-1/2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/2\\-3/2\\1/2\end{pmatrix}$$

のように計算し，$\bar{\boldsymbol{p}}_2$ と $\bar{c_2}=1$ を表のサイクル 1 における $\tilde{\boldsymbol{p}}_s$ の列に入れる．$r=1$ なので，[　] で囲まれた $-5/2$ がピボット項として定まり，基底逆行列，定数，$-\boldsymbol{\pi}$, $-\bar{z}$ の部分に対してピボット操作によりサイクル 2 の結果を得る．サイクル 2 では，x_2, x_4, x_1 が基底変数となり，すべての定数 $\bar{b_i}$ は正となり，最適解が得られている．

第3章

3.1　Excel ソルバーを用いて各自試みよ．

3.2　Excel ソルバーを用いて各自試みよ．

3.3　Excel ソルバーを用いて各自試みよ．

3.4　Excel ソルバーを用いて各自試みよ．

3.5 Excel ソルバーを用いて各自試みよ.

第4章

4.1 $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_m=k,\ \delta_i\in\{0,1\},\ i=1,\ldots,m$ をみたす 0-1 変数 δ_i を導入すれば, δ_i のうち少なくとも k 個は 1 で残りはすべて 0 となるので, 与えられた論理条件は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i+M_i(1-\delta_i),\ i=1,\ldots,m$ と定式化される.

4.2 (1) $x_i-x_j\geqq 0$ なる制約を付加すればよい.
(2) $x_i+x_j\geqq x_k$ なる制約を付加すればよい.
(3) $(1-x_i)+(1-x_j)\geqq x_k$ なる制約を付加すればよい.

4.3 x_{ij} は関係式 $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1,\ldots,n$ を満たすので, 1 サイクル当たりの切替に要する時間は $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{jk}x_{ij}x_{i+1,k}$ で表される. ただし, $x_{n+1,k}=x_{1k}$ と仮定する. したがって, 機械の遊び時間の最小化問題は minimize $z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{jk}x_{ij}x_{i+1,k}$ subject to $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1,\ldots,n,\ x_{ij}\in\{0,1\},\ i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n$ と定式化される.

4.4 セールスマンが各都市 i へ一度だけ他の n 個の都市の 1 つから訪問する条件とセールスマンが各都市 i を一度だけ出発して他の n 個の都市の 1 つを訪問するという条件は, それぞれ $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1,\ldots,n,\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1,\ldots,n$ のように表現することができる. ただし, $x_{ii}=1$ となることを防止するため $c_{ii}=\infty,\ i=1,\ldots,n$ と仮定する. このとき総距離は $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},\ c_{ii}=\infty$ となる. ある都市を出発してその都市で終わる $k\ (\leqq n+1)$ 都市の順路を閉路という. 非負の整数値をとる変数 $u_i\ (i=2,\ldots,n)$ を導入して, 不等式制約条件 $u_i-u_j+nx_{ij}\leqq n-1,\ 1\leqq i\neq j\leqq n$ を付加すればよいことが次の議論により導かれる. この不等式により, どの閉路も都市 1 を含むことが保証されることがわかる. このことを確かめるために, いま, 等式条件はすべてみたしているある整数解に都市 1 を含まない閉路があると仮定すれば, この閉路に沿ったところでは $x_{ij}=1$, すなわちこの閉路上の都市 i と都市 j に対しては $u_i-u_j+nx_{ij}\leqq -1$ である. このようなすべての式を加えると, $0\leqq -1$ となり, 仮定に矛盾する. そこで, もし閉路があれば, それはセールスマンの順路として可能なものである. ここで, 不等式をみたす u_i の値が存在することを示しておこう. 都市 i を t 番目に訪問する都市として $u_i=t$ とおいてみよう. もし $x_{ij}=0$ ならば, すべての u_i と u_j の値に対して $u_i-u_j+nx_{ij}\leqq n-1$ である. もし $x_{ij}=1$ ならば $u_i-u_j+nx_{ij}=t-(t+1)+n=n-1$ となる. いずれの場合も不等式条件はみたされる. したがって上の制約条件をみたすいかなる実行可能解も可能な順路となる. したがって, 巡回セールスマン問題は, minimize $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$

subject to $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,\ldots,n,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,\ldots,n,\ u_i - u_j + n x_{ij} \leqq n-1,$ $1 \leqq i \neq j \leqq n$ と定式化される．

4.5 効率 $\gamma_j = c_j/a_j$ を計算して，効率の良い順に並べ替えると $\gamma_1, \gamma_6, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_4, \gamma_7, \gamma_3$ となる．欲張り法では，$x_1 = 1, x_6 = 1, x_2 = 1, x_5 = 1$ と変数値が 1 に固定され，$x_7 = 0, x_3 = 0$ となり，最適値は 33 となる．けちけち法では，$x_3 = 0, x_7 = 0$ と変数値が 0 に固定され，$x_5 = 1, x_2 = 1, x_6 = 1, x_1 = 1$ となり，最適値は 33 となる．本数値例では，欲張り法で解いて得られた解とけちけち法で解いて得られた解は一致する．

4.6 (1) もとの問題とラグランジュ緩和問題の実行可能領域をそれぞれ，$X_0, \bar{X}_0$ とすれば，$\bar{X}_0 \supseteqq X_0$ である．また，$\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x} \in X_0$ なら $\boldsymbol{u}(A_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^1) \leqq 0$ となるので，$\boldsymbol{cx} + \boldsymbol{u}(A_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^1) \leqq \boldsymbol{cx}, \forall \boldsymbol{x} \in X_0$ である．ここで $\bar{X}_0 \supseteqq X_0$ であることを考慮すれば，$\boldsymbol{cx}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}(A_1\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{b}^1) \leqq \inf\{\boldsymbol{cx} + \boldsymbol{u}(A_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^1) \mid \boldsymbol{x} \in \bar{X}_0\} \leqq \inf\{\boldsymbol{cx} + \boldsymbol{u}(A_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^1) \mid \boldsymbol{x} \in X_0\} \leqq \inf\{\boldsymbol{cx} \mid \boldsymbol{x} \in X_0\} = \boldsymbol{cx}^*$ （$\boldsymbol{x}^*$ はもとの問題の最適解）なる関係式が得られるので，ラグランジュ緩和問題の最適解 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ はもとの問題の下界値を与える．

(2) $A_1\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}^*) \leqq \boldsymbol{b}^1$ であれば $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}^*) \in X_0$ となるので $\boldsymbol{cx}(\boldsymbol{u}^*) \geqq \boldsymbol{cx}^*$ なる関係式が得られる．一方，(1) で得られた関係式と $\boldsymbol{u}^*(A_1\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}^*) - \boldsymbol{b}^1) = 0$ を用いれば $\boldsymbol{cx}^* \geqq \boldsymbol{cx}(\boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{u}^*(A_1\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}^*) - \boldsymbol{b}^1) = \boldsymbol{cx}(\boldsymbol{u}^*)$ なる関係式が得られるので，これらの 2 つの関係式より $\boldsymbol{cx}(\boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{cx}^*$ となり，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}^*)$ はもとの問題の最適解である．

4.7 $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ を双対シンプレックス法で解いたときの全タブローを示すと次のようになる．

例 4.6 の数値例の $\bar{P}_0$ のシンプレックス・タブロー

サイクル	基底	x_1	x_2	x_3	x_4	定数
0	x_3	-1	-4	1		-5
	x_4	$[-3]$	-2		1	-7
	$-z$	4	5			0
1	x_3		$-10/3$	1	$-1/3$	$-8/3$
	x_1	1	$2/3$		$-1/3$	$7/3$
	$-z$		$7/3$		$4/3$	$-28/3$
2	x_2		1	$[-3/10]$	$1/10$	$4/5$
	x_1	1		$1/5$	$-2/5$	$9/5$
	$-z$			$7/10$	$11/10$	$-56/5$

例 4.6 の数値例の $\bar{P}_1$ のシンプレックス・タブロー

サイクル	基底	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数
0	x_2		1	$-3/10$	$1/10$		$4/5$
	x_1	1		$1/5$	$-2/5$		$9/5$
	x_5			$[-1/5]$	$2/5$	1	$-4/5$
	$-z$			$7/10$	$11/10$		$-56/5$
1	x_2		1		$-1/2$	$-3/2$	2
	x_1	1			0	1	1
	x_3			1	-2	-5	4
	$-z$				$5/2$	$7/2$	-14

例 4.6 の数値例の $\bar{P}_2$ のシンプレックス・タブロー

サイクル	基底	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数
0	x_2		1	$-3/10$	$1/10$		$4/5$
	x_1	1		$1/5$	$-2/5$		$9/5$
	x_5			$1/5$	$[-2/5]$	1	$-1/5$
	$-z$			$7/10$	$11/10$		$-56/5$
1	x_2		1	$-1/4$		$1/4$	$3/4$
	x_1	1		0		-1	2
	x_4			$-1/2$	1	$-5/2$	$1/2$
	$-z$			$5/4$		$11/4$	$-47/4$

例 4.6 の数値例の $\bar{P}_3$ のシンプレックス・タブロー

サイクル	基底	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
0	x_2		1	$-1/4$		$1/4$		$3/4$
	x_1	1		0		-1		2
	x_4			$-1/2$	1	$-5/2$		$1/2$
	x_6			$1/4$		$[-1/4]$	1	$-3/4$
	$-z$			$5/4$		$11/4$		$-47/4$
1	x_2		1	0			1	0
	x_1	1		-1			-4	5
	x_4			-3	1		-10	8
	x_5			-1		1	-4	3
	$-z$			4			11	-20

例 4.6 の数値例の $\bar{P}_4$ のシンプレックス・タブロー

サイクル	基底	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
0	x_2		1	$-1/4$		$1/4$		$3/4$
	x_1	1		0		-1		2
	x_4			$-1/2$	1	$-5/2$		$1/2$
	x_6			$[-1/4]$		$1/4$	1	$-1/4$
	$-z$			$5/4$		$11/4$		$-47/4$
1	x_2		1			0	-1	1
	x_1	1				-1	0	2
	x_4				1	-3	-2	1
	x_3			1		-1	-4	1
	$-z$					4	5	-13

4.8 $\bar{P_0}$ を解いて，小数部分の大きい変数 x_1 を分枝変数に選び，$x_1 \leqq 4, x_1 \geqq 5$ を付加した 2 つの子問題 P_1, P_2 を生成する．$\bar{P_1}$ を解けば整数解にはならないので，x_2 を分枝変数に選び，$x_2 \leqq 4, x_2 \geqq 5$ を付加した 2 つの子問題 P_3, P_4 を生成する．$\bar{P_2}$ を解けば整数解にはならないので，x_2 を分枝変数に選び，$x_2 \leqq 2, x_2 \geqq 3$ を付加した 2 つの子問題 P_5, P_6 を生成する．$\bar{P_3}$ を解けば整数解になるので，暫定値を $\bar{z^3} = -40$ に更新する．$\bar{P_4}$ を解けば整数解にはならず，$\bar{z^4} = -32.5 \geqq \bar{z^3} = -40$ となるので終端する．$\bar{P_5}$ を解けば整数解にはならないので，x_1 を分枝変数に選び，$x_1 \leqq 5, x_1 \geqq 6$ を付加した 2 つの子問題 P_7, P_8 を生成する．$\bar{P_6}$ を解けば実行不可能になるので終端する．$\bar{P_7}$ を解けば整数解になり，$\bar{z^7} < -40$ であるので，暫定値を $\bar{z^7} = -41$ に更新する．$\bar{P_8}$ を解けば整数解になり，$\bar{z^8} < -41$ であるので，暫定値を $\bar{z^8} = -42$ に更新する．このようにして，P_0 の最適解は P_8 の最適解 $x_1 = 6, x_2 = 0, z = -42$ となる．

4.9 $\bar{P_0}, \bar{P_1}, \bar{P_2}, \bar{P_3}, \bar{P_4}$ をシンプレックス法で解いたときの全タブローを示すと次のようになる．

例 4.7 の数値例の $\bar{P_0}$ のシンプレックス・タブロー

サイクル	基底	x_1	x_2	y	x_3	x_4	定数
0	x_3	4	−2	1	1		15
	x_4	2	[4]	3		1	18
	$-z$	−3	−4	−3			0
1	x_3	[5]		2.5	1	0.5	24
	x_2	0.5	1	0.75		0.25	4.5
	$-z$	−1		0		1	18
2	x_1	1		0.5	0.2	0.1	4.8
	x_2		1	0.5	−0.1	0.2	2.1
	$-z$			0.5	0.2	1.1	22.8

例 4.7 の数値例の $\bar{P_1}$ のシンプレックス・タブロー

サイクル	基底	x_1	x_2	y	x_3	x_4	x_5	定数
0	x_3	5		2.5	1	0.5		24
	x_2	0.5	1	0.75		0.25		4.5
	x_5	[1]		0		0	1	4
	$-z$	−1		0		1		18
1	x_3			2.5	1	0.5	−5	4
	x_2		1	0.75		0.25	−0.5	2.5
	x_1	1		0		0	1	4
	$-z$			0		1	1	22

例 4.7 の数値例の $\bar{P}_2$ のシンプレックス・タブロー

サイクル	基底	x_1	x_2	y	x_3	x_4	x_5	定数
	x_3	[4]	−2	1	1		0	15
	x_4	2	4	3		1	0	18
0	x_6	1	0	0			−1	5
	$-z$	−3	−4	−3			0	0
	$-w$	−1	0	0			1	−5
	x_1	1	−0.5	0.25	0.25		0	3.75
	x_4		[5]	2.5	−0.5	1	0	10.5
1	x_6		0.5	−0.25	−0.25		−1	1.25
	$-z$		−5.5	−2.25	0.75		0	11.25
	$-w$		−0.5	0.25	0.25		1	−1.25
	x_1	1		0.5	0.2	0.1	0	4.8
	x_2		1	0.5	−0.1	0.2	0	2.1
2	x_6			−0.5	−0.2	−0.1	−1	0.2
	$-z$			0.5	0.2	1.1	0	22.8
	$-w$			0.5	0.2	0.1	1	−0.2

例 4.7 の数値例の $\bar{P}_3$ のシンプレックス・タブロー

サイクル	基底	x_1	x_2	y	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
	x_3	4	−2	1	1				15
	x_4	2	4	3		1			18
0	x_5	1	0	0			1		4
	x_6	0	[1]	0				1	2
	$-z$	−3	−4	−3					0
	x_3	4		1	1			2	19
	x_4	2		3		1		−4	10
1	x_5	[1]		0			1		4
	x_2	0	1	0				1	2
	$-z$	−3		−3				4	8
	x_3			1	1		−4	2	3
	x_4			[3]		1	−2	−4	2
2	x_1	1		0			1	0	4
	x_2		1	0			0	1	2
	$-z$			−3			3	4	20
	x_3				1	−1/3	−10/3	10/3	7/3
	y			1		1/3	−2/3	−4/3	2/3
3	x_1	1				0	1	0	4
	x_2		1			0	0	1	2
	$-z$					1	1	0	22

例 4.7 の数値例の $\bar{P}_4$ のシンプレックス・タブロー

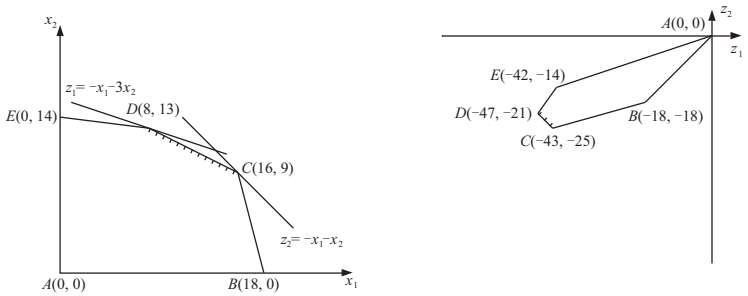
サイクル	基底	x_1	x_2	y	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
0	x_3	4	−2	1	1			0	15
	x_4	2	4	3		1		0	18
	x_5	1	0	0			1	0	4
	x_7	0	[1]	0				−1	3
	$-z$	−3	−4	−3				0	0
	$-w$	0	−1	0				1	−3
1	x_3	4		1	1			−2	21
	x_4	2		3		1		[4]	6
	x_5	1		0			1	0	4
	x_2	0	1	0				−1	3
	$-z$	−3		−3				−4	12
	$-w$	0		0				0	0
2	x_3	5		2.5	1	0.5			24
	x_6	[0.5]		0.75		0.25		1	1.5
	x_5	1		0		0	1		4
	x_2	0.5	1	0.75		0.25			4.5
	$-z$	−1		0		1			18
3	x_3			−5	1	−2		−10	9
	x_1	1		1.5		0.5		2	3
	x_5			−1.5		−0.5	1	−2	1
	x_2		1	0		0		−1	3
	$-z$			1.5		1.5		2	21

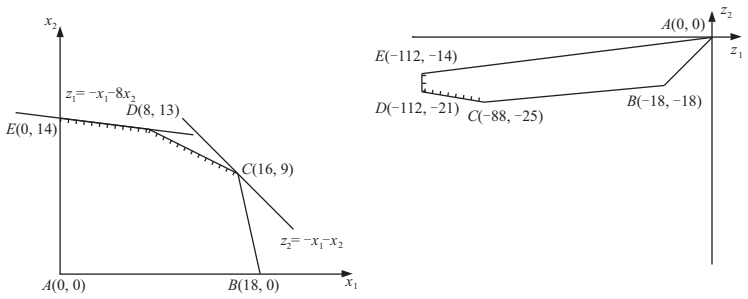
4.10 $\bar{P}_0$ を解けば整数解にならないので，x_2 を分枝変数に選び，$x_2 \leqq 2, x_2 \geqq 3$ を付加した 2 つの子問題 P_1, P_2 を生成する．$\bar{P}_1$ を解けば整数解にならないので，x_1 を分枝変数に選び，$x_1 \leqq 0, x_2 \geqq 1$ を付加した 2 つの子問題 P_3, P_4 を生成する．$\bar{P}_2$ を解けば実行不可能になるので終端する．$\bar{P}_3$ を解けば整数解になるので，暫定値を $\bar{z}^3 = -37/2$ に更新する．$\bar{P}_4$ を解けば，$\bar{z}^4 = -293/16 > -37/2$ であるので終端する．このようにして，P_0 の最適解は P_3 の最適解 $x_1 = 0, x_2 = 2, z = -37/2$ となる．

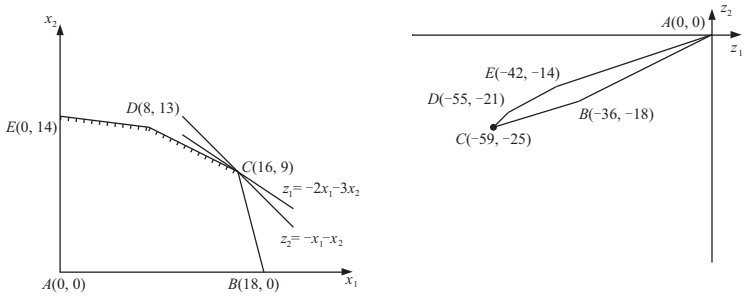
第 5 章

5.1 もとの問題のパレート最適解，目的関数が $z_1 = -x_1 - 8x_2, z_2 = -x_1 - x_2$ に変更されたときの弱パレート最適解，ならびに，目的関数が $z_1 = -2x_1 - 3x_2, z_2 = -x_1 - x_2$ に変更されたときの完全最適解は，それぞれ，次図のようになる．

5.2 重み係数問題の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が 多目的線形計画問題のパレート最適解ではないと仮定すれば，ある j に対して $z_j(\boldsymbol{x}) < z_j(\boldsymbol{x}^*)$ かつ $z_i(\boldsymbol{x}) \leqq z_i(\boldsymbol{x}^*), i = 1, \ldots, k; i \neq j$ となる $\boldsymbol{x} \in X$ が存在する．ここで，$\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_k) > \boldsymbol{0}$ であることを考慮すれば，







$\sum_i w_i z_i(\boldsymbol{x}) < \sum_i w_i z_i(\boldsymbol{x}^*)$ が成立する．このことは $\boldsymbol{x}^*$ が $\boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}$ に対する重み係数問題の最適解であることに矛盾する．

5.3 (1) $\boldsymbol{x}^*$ がこの問題の最適解ではないと仮定すれば，$C\boldsymbol{x} \leqq C\boldsymbol{x}^*$ で，しかも $\mathbf{1}^T C\boldsymbol{x} < \mathbf{1}^T C\boldsymbol{x}^*$ となるような $\boldsymbol{x} \in X$ が存在する．このことは $\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x}^*$ かつ $\mathbf{1}^T C\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x} < \sum_{i=1}^k \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x}^* = \mathbf{1}^T C\boldsymbol{x}^*$ すなわち $\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x}^*$, $i = 1, \ldots, k$ でしかもある j に対して $\boldsymbol{c}_j\boldsymbol{x} < \boldsymbol{c}_j\boldsymbol{x}^*$ となる $\boldsymbol{x} \in X$ が存在することを意味し，$\boldsymbol{x}^*$ がパレート最適解であることに矛盾するので，$\boldsymbol{x}^*$ はこの問題の最適解である．

(2) この線形計画問題の双対問題

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && (-\boldsymbol{b}^T, -\boldsymbol{x}^{*T}C^T)\boldsymbol{y} \\ &\text{subject to} && (-A^T, -C^T)\boldsymbol{y} \leqq C^T\mathbf{1}, \quad \boldsymbol{y} \geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

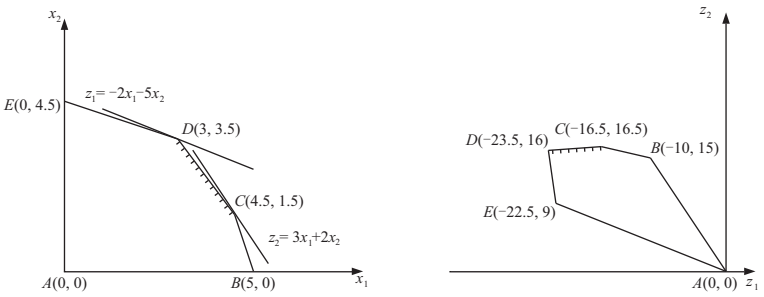
を考えると，双対定理より $(-\boldsymbol{b}^T, -\boldsymbol{x}^{*T}C^T)\boldsymbol{y}^* = \mathbf{1}^T C\boldsymbol{x}^*$ すなわち $(\mathbf{1}^T + \boldsymbol{y}_2^{*T})C\boldsymbol{x}^* = -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}^{*T} = (\boldsymbol{y}_1^{*T}, \boldsymbol{y}_2^{*T})$ となるので $\boldsymbol{w} = \mathbf{1}^T + \boldsymbol{y}_2^{*T}$ とおけば $\sum_{i=1}^k w_i\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}^T C\boldsymbol{x} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{y}_2^*)^T C\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in X$ が成立する．

(3) 双対問題は

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} \\ &\text{subject to} && -A^T\boldsymbol{u} \leqq C^T(\mathbf{1} + \boldsymbol{y}_2^*), \quad \boldsymbol{u} \geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

で，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{y}_1^*$ はそれぞれの問題の実行可能解で，各々の目的関数の値は等しいことに注意すれば，任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $\sum_{i=1}^k w_i\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x}^* = (\mathbf{1} + \boldsymbol{y}_2^*)^T C\boldsymbol{x}^* = \min_{\boldsymbol{x} \in X}(\mathbf{1} + \boldsymbol{y}_2^*)^T C\boldsymbol{x} \leqq (\mathbf{1} + \boldsymbol{y}_2^*)^T C\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^k w_i\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x}$ となるので，$\boldsymbol{x}^*$ は この $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_k) \geqq \mathbf{0}$ に対する重み係数問題の最適解であることが示された．

5.4 $x_1 - x_2$ 平面および $z_1 - z_2$ 平面におけるパレート最適解は次図のようになる．



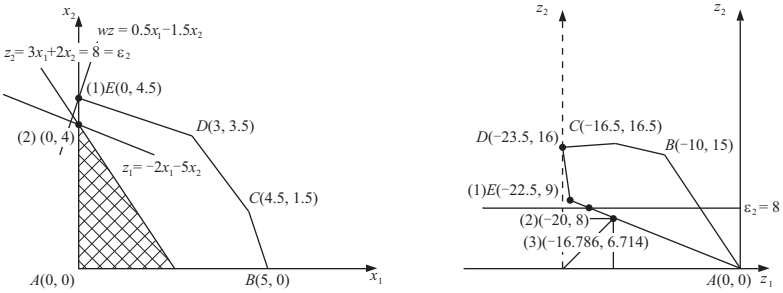
5.5 (1) パレート最適解は $(z_1, z_2) = (-22.5, 9), (x_1, x_2) = (0, 4.5)$（次図参照）．

(2) パレート最適解は $(z_1, z_2) = (-20, 8), (x_1, x_2) = (0, 4)$（次図参照）．

(3) パレート最適解は $(z_1, z_2) = (-16.8, 6.72), (x_1, x_2) = (0, 3.36)$（次図参照）．

5.6 Excel ソルバーを用いて各自試みよ．

5.7 $z_1^{\min} = -23.5$, $z_1^{\max} = 0$, $z_2^{\min} = 0$, $z_2^{\max} = 16.5$ となるので，これらの値を考慮して意思決定者が主観的に基準点を $\bar{z}_1 = -23.5$, $\bar{z}_2 = 10$ と設定したものとして，対応するミニマックス問題を解けば，パレート最適解 $z_1 = -22.75$, $z_2 = 10.75$ $(x_1 = 0.75, x_2 = 4.25)$ が得られる．これらの情報を考慮して，意思決定者が基準



点を $\bar{z}_1 = -23.5, \bar{z}_2 = 8$ に変更したものとして，対応するミニマックス問題を解けば，パレート最適解 $z_1 = -22.5, z_2 = 9$ $(x_1 = 0, x_2 = 4.5)$ が得られる．ここで，もし意思決定者がこれらの $z_1 = -22.5, z_2 = 9$ の値に満足すれば，このパレート最適解が満足解となる．

第6章

6.1　解くべき問題は maximize$\{\lambda \mid (2/3)x_1 + 2x_2 + \lambda \leqq 10, 1.6x_1 + 1.2x_2 + \lambda \leqq 10, 1.5x_1 + 0.5x_2 + \lambda \leqq 8.5, x_1 + 2x_2 - \lambda \geqq 9.5, x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0\}$ となり，最適解は $(x_1, x_2) = (3.0789, 3.5921)$, $\lambda = 0.76316$ となるので，非ファジィ解 $x_1 = 3, x_2 = 3.5, z = -10$ に対してファジィ解 $x_1 = 3.0789, x_2 = 3.5921, z = -10.2631$ の総利潤は約 2.7% 増える．

6.2　$z_1^{\min} = -37$, $z_2^{\min} = 0$, $z_1^{\mathrm{m}} = 0$, $z_1^{\mathrm{m}} = 29$ となり，解くべき問題は maximize$\{\lambda \mid 3x_1 + 8x_2 - 37\lambda \geqq 0, 5x_1 + 4x_2 + 29\lambda \leqq 29, 2x_1 + 6x_2 \leqq 27, 3x_1 + 2x_2 \leqq 16, 4x_1 + x_2 \leqq 18, , x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0\}$ となり，最適解 $(x_1, x_2) = (0, 2.82368)$, $(z_1, z_2) = (-22.58947, 11.29474)$, $\lambda = 0.61053$ が得られる．

6.3　解くべき問題は maximize$\{\lambda \mid x_1 + 2x_2 - 2\lambda \geqq 8, 3x_1 + 2x_2 + 5\lambda \leqq 14, 2x_1 + 6x_2 \leqq 27, 8x_1 + 6x_2 \leqq 45, 3x_1 + x_2 \leqq 15, , x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0\}$ となり，最適解 $(x_1, x_2) = (0.78947, 4.2368)$, $(z_1, z_2) = (-9.26316, 10.84201)$, $\lambda = 0.63158$ が得られる．

6.4　$z_1^{\min} = 0$, $z_1^{\max} = 10$, $z_2^{\min} = 0$, $z_2^{\max} = 16.5$, $z_3^{\min} = -9$, $z_3^{\max} = 5$ より fuzzy max: $\mu_1(5) = 0$, $\mu_1(8) = 1$, fuzzy min: $\mu_2(14) = 0$, $\mu_2(9) = 1$, fuzzy equal: $\mu_{3L}(-7) = 0$, $\mu_{3L}(0) = \mu_{3R}(0) = 1$, $\mu_{3R}(4) = 0$ となる線形メンバシップ関数を仮定する．基準メンバシップ値 1 に対するミニマックス問題を解けば，M パレート最適解 $z_1 = 6.833$, $z_2 = 10.94$, $z_3 = -2.722$ $(x_1 = 2.056,\ x_2 = 2.389)$ と $\mu_1 = 0.6111$, $\mu_2 = 0.6111$, $\mu_3 = 0.6111$, $-\partial\mu_2/\partial\mu_1 = 1.2$, $-\partial\mu_3/\partial\mu_1 = 0.8571$ が得られる．意思決定者が生産量の比率に対する満足度をもう少し犠牲にしても，利潤に対する満足度を少し上

げるとともに，環境汚染に対する満足度をもう少し上げたいと判断して，基準メンバシップ値を $\bar{\mu}_1 = 0.7, \bar{\mu}_2 = 0.8, \bar{\mu}_3 = 0.5$ に変更すれば $z_1 = 6.983, z_2 = 10.19, z_3 = -3.772$ $(x_1 = 1.606,\ x_2 = 2.689)$ と $\mu_1 = 0.6611, \mu_2 = 0.7611, \mu_3 = 0.4611, -\partial\mu_2/\partial\mu_1 = 1.2, -\partial\mu_3/\partial\mu_1 = 0.8571$ が得られる．ここで，意思決定者がこれらの利潤，環境汚染の排出量および生産量の比率に対するファジィ目標の達成レベルに満足したものとすれば，この M パレート最適解が満足解となる．

第7章

7.1 $z = 90x_1 + 111x_2 - (50y_{11} + 57y_{12} + 60y_{21} + 50y_{22}) - (20y_{11} + 8y_{12} + 8y_{21} + 10y_{22})$

7.2 $4000 \leqq x_1 \leqq 5000,\ 4000 \leqq x_2 \leqq 5000.$

7.3 $x_1 = y_{11} + y_{21},\ x_2 = y_{12} + y_{22}.$

7.4 $50y_{11} + 57y_{12} \leqq 220000,\ 60y_{21} + 50y_{22} \leqq 200000.$

7.5 maximize $z = 90x_1 + 111x_2 - (50y_{11} + 57y_{12} + 60y_{21} + 50y_{22}) - (20y_{11} + 8y_{12} + 8y_{21} + 10y_{22})$ subject to $4000 \leqq x_1 \leqq 5000, 4000 \leqq x_2 \leqq 5000, x_1 = y_{11} + y_{21}, x_2 = y_{12} + y_{22}, 50y_{11} + 57y_{12} \leqq 220000, 60y_{21} + 50y_{22} \leqq 200000$
最適解：$x_1 = 4000, x_2 = 4351, y_{11} = 4000, y_{12} = 351, y_{21} = 0, y_{22} = 4000, z = 300140$

7.6 $z_1 = 90x_1 + 111x_2 - (50y_{11} + 57y_{12} + 60y_{21} + 50y_{22})$
$z_2 = 20y_{11} + 8y_{12} + 8y_{21} + 10y_{22}$
minimize $-z_1 + 4z_2$ subject to $4000 \leqq x_1 \leqq 5000, 4000 \leqq x_2 \leqq 5000, x_1 = y_{11} + y_{21}, x_2 = y_{12} + y_{22}, 50y_{11} + 57y_{12} \leqq 220000, 60y_{21} + 50y_{22} \leqq 200000$
最適解：$x_1 = 4000, x_2 = 4000, y_{11} = 2913, y_{12} = 1304, y_{21} = 1087, y_{22} = 2696, z_1 = 384000, z_2 = 104348$

7.7 maximize λ subject to $\dfrac{z_1 - 384000}{422947 - 384000} - \lambda \geqq 0,\ \dfrac{z_2 - 122807}{104348 - 122807} - \lambda \geqq 0, 4000 \leqq x_1 \leqq 5000, 4000 \leqq x_2 \leqq 5000, x_1 = y_{11} + y_{21}, x_2 = y_{12} + y_{22}, 50y_{11} + 57y_{12} \leqq 220000, 60y_{21} + 50y_{22} \leqq 200000$
最適解：$x_1 = 4000, x_2 = 4175, y_{11} = 3457, y_{12} = 828, y_{21} = 543, y_{22} = 3348, \lambda = 0.5, z_1 = 403474, z_2 = 113577$