ガウス–ボンネの定理

Gauss–Bonnet theorem

1 はじめに

ガウス–ボンネの定理は微分幾何と位相幾何を結び付ける重要な定理である．拡張として，ベクトルバンドルの接続と特性類に関するチャーン–ヴェイユ理論，楕円型微分作用素に関するアティアー–ジンガーの指数定理，代数多様体の符号数に関するリーマン–ロッホ–ヒルツェブルフの定理などがある．

2 ガウス–ボンネの定理

2.1 ホロノミーと測地曲率

曲面，すなわち 2 次元多様体 M 上の**リーマン構造** (Riemannian structure) とは，各接平面 T_pM の正定値内積 $\langle\,,\,\rangle_p$ で，p に関して可微分に依存するものをいう．3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた曲面は，$\boldsymbol{R}^3$ の標準的内積を接平面に制限したものを $\langle\,,\,\rangle_p$ と考えればリーマン多様体になり，リーマン構造は第一基本量 $\{g_{ij}\}$ で表される．

M の開集合 U 上の局所座標 (x_1, x_2) について，面積要素 dA_M を表す 2 次微分形式は $\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}dx_1 \wedge dx_2$ である．U 上の曲線 $c(t) = (x_1(t), x_2(t))$ に沿うベクトル場 $V(t) = \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ に対して，c に沿う V の共変微分

$$\nabla_{\dot{c}} V = \sum_{i=1}^{2} \left(\dot{v}_i + \Gamma^i_{jk} v_j \dot{x}_k \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

が 0 のとき，V は c に沿って平行であるといわれる．ただし，Γ^i_{jk} は第一基本量から定まる接続係数である．V, W が c に沿う平行ベクトル場のとき，$\langle V(t), W(t)\rangle_{c(t)}$ は t について一定である．$c : [0,1] \to M$ が閉曲線であり $(c(0) = c(1))$, V が c に沿う平行ベクトル場のとき，$V(0)$ と $V(1)$ がなす角 θ を c の**ホロノミー** (holonomy) という．V が c に沿う平行ベクトル場で，c が弧長を助変数にもつとき，接ベクトル $\dot{c}(t)$ と $V(t)$ のなす角の変化率を c の**測地曲率** (geodesic curvature) という．c の助変数の向きを変えたとき，測地曲率の符号が変わる．M 上の区分的になめらかな閉曲線に関して，接ベクトルが不連続な点で生じる接線のずれを曲面の向きに従って符号付きで計った外角に，なめらかな部分の測地曲率を弧長で積分した値を加えた総和は，この閉曲線のホロノミーと 2π を法として一致する．

2.2 ガウス–ボンネの定理

境界が n 個のなめらかな曲線からなり，2 次元円板に同相な領域 $D \subset M$ を考える．ただし，境界 ∂D は外向き法ベクトルにより向き付けられているものとする．D の境界で，曲面の向きに沿って計った外角を θ_i, 弧長による測地曲率の積分を G_i とおく．M のガウス曲率を K で表す．次の等式が成り立つ:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i + G_i \right) + \int_D K dA_M = 2\pi. \qquad (1)$$

これを**ガウス–ボンネの定理の局所版** (local Gauss–Bonnet theorem) と呼ぶ．

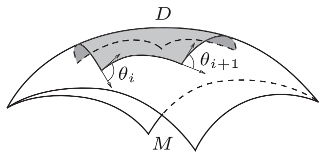


図 1 ガウス–ボンネの定理—局所版

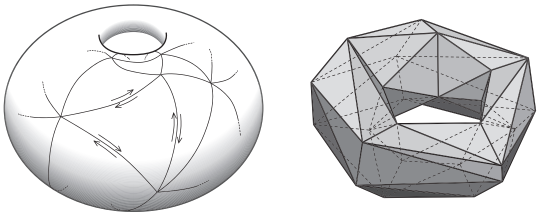
D が十分小さい領域のとき，D の境界に沿うホロノミーと D の内部で M の曲率を面積要素に関して積分した値は一致するという事実から上の定理が得られる．

M は境界をもたないコンパクトな 2 次元リーマン多様体であるとし，向き付け可能であること，すなわち M 全体で面積要素 dA_M が定義されているものとする．オイラー標数 $\chi(M)$ とガウス曲率 K の積分との間に次の等式が成り立つ:

$$2\pi\chi(M) = \int_M K dA_M. \qquad (2)$$

これを**ガウス–ボンネの定理** (Gauss–Bonnet theorem) と呼ぶ．

M の一つの三角形分割を固定し (図 2(a) 参照)，各三角形に定理 (1) を適用し，それを足し上げることにより定理 (2) が導かれる．二つの三角形が一つの曲線で出会うとき，その曲線の三角形の境界としての向きが逆であることから，測地曲率の積分はすべて打ち消しあうことに注意する．



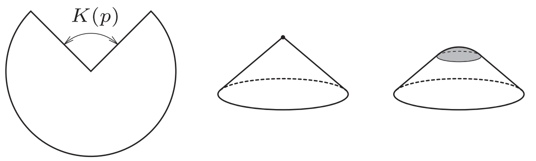
(a)　(b)

図 2　(a) 曲面の三角形分割，(b) 多面体

3　多　面　体

多面体 M のリーマン構造とは，各面に平坦な凸多角形の距離構造が定まっている 2 次元位相多様体のことをいう．このとき，M の頂点以外の部分はなめらかで平坦な可微分多様体である．

多面体の一つの頂点 p からの距離が r 以下にある点の集まりを $U_p(r)$ とおく．ただし，$U_p(r)$ がほかの頂点を含まないように，定数 $r > 0$ を小さくとっておく．p に集まる多角形の内角の和を 2π から引いた値を $K(p)$ とおくとき，$U_p(r)$ は頂角が $2\pi - K(p)$ の円錐と同じ距離構造をもつ (図 3(b) 参照．$K(p)$ が負の場合もある)．$K(p)$ がガウス曲率と類似の性質をもつことが以下のことから理解される．



(a)　(b)　(c)

図 3　円錐の頂点

$U_p(r)$ の境界は測地曲率が $1/r$ の曲線であり，その長さは $r(2\pi - K(p))$ であるから，測地曲率の積分は $2\pi - K(p)$ である．一方，この円錐の頂点の周りの小さい部分をなめらかな曲面で置き換えたとき (図 3(c))，ガウス曲率の積分は $K(p)$ である (式 (1) 参照)．

有限個の頂点をもち，境界のない多面体に対して，ガウス–ボンネの定理と同様のことが成り立つ:

$$2\pi\chi(M) = \sum K(p).$$

和は M のすべての頂点に渡るものとする．

4　内在幾何と外在幾何

内在幾何学：曲面 M の接続形式 θ は単位接束 T^1M 上の 1 次微分形式であり，これを外微分し底空間 M に落としたものが曲率形式 KdA_M である．零点がすべて孤立している M のベクトル場 V の各零点の十分小さな近傍 U_ε を除いた部分 M_0 で $V/||V||$ は T^1M の切断を与え，これにより θ を引き戻し，ストークスの定理を適用すると曲率の積分が ∂U_ε 上での θ の積分 $\int_{\partial U_\varepsilon} \theta$ の和になるが，$\int_{\partial U_\varepsilon} \theta$ は V の p での指数の 2π 倍と一致し，ポアンカレ–ホップの定理よりガウス–ボンネの定理が得られる．

外在幾何学： M が $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれている場合は，内在幾何における単位接束と接続形式に変わるものとして，ガウス写像 ν と単位球面 S^2 の面積要素 dA_{S^2} を考える．定義より，$\nu^*(dA_{S^2}) = KdA_M$ が成り立ち，ガウス曲率の積分 $\int_M KdA_M$ は S^2 の面積である 4π に ν の写像度 $\deg(\nu)$ を掛けた値に等しい．$\deg(\nu)$ は M のオイラー標数の 1/2 に等しいことから，ガウス–ボンネの定理が得られる．

5　高次元への拡張

ホップ (H. Hopf) は $n+1$ 次元ユークリッド空間内の n 次元多様体，すなわち超曲面に対するガウス–ボンネの定理を考察し (1925 年)，アレンデルファー (C.B. Allendoerfer) とヴェイユ (A. Weil) は一般の余次元をもつユークリッド空間内の部分多様体に対し，法球面束を利用したガウス–ボンネの定理の証明を得た (1943 年)．接球面束だけを使った内在的証明はチャーン (S.S. Chern) によって完成された (1944 年)．このもっとも一般的な形の定理は**ガウス–ボンネ–チャーンの定理** (Gauss–Bonnet–Chern theorem) と呼ぶ．

[小 沢 哲 也]

参　考　文　献

[1]　S.S. Chern：A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, *Annals of Mathematics*, **45**(4), 1944.

[2]　小林昭七：曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)，裳華房，1995.

曲　　線

curve

1　曲線の表示

本項では，n 次元実線形空間を $\boldsymbol{R}^n$ で表し，通常の内積に関しこれを n 次元ユークリッド空間と考える．$\boldsymbol{R}^2$ を平面，$\boldsymbol{R}^3$ を空間と単に呼び，それらの中のなめらかな曲線について解説する．

開区間 $I=(a,b)$ で定義された n 個の可微分関数 $x_i=x_i(t)$ を座標成分にもつ写像 $I \ni t \mapsto c(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ を考える．以下の説明で写像 c の独立変数 t を助変数と呼び，助変数による 1 階および 2 階の微分を，上に点をつけて，$\dot{c}, \ddot{c}$ などと表す．接ベクトル $\dot{c}$ が 0 である点を c の**特異点**，そうでない点を**正則点**と呼ぶ．特異点をもたない写像 c の像 $\mathcal{C}$ を**曲線** (curve) といい，c をその曲線の**助変数表示** (parametrization) という．$a<t_0<s<b$ に対して，接ベクトル $\dot{c}$ の長さ $\|\dot{c}\|=\left(\sum_{i=1}^n(\dot{x}_i)^2\right)^{1/2}$ の積分

$$\int_{t_0}^{s}\|\dot{c}(t)\|\,dt$$

はこの曲線の $c(t_0)$ から $c(s)$ までの長さ (弧長) を表す．とくに，接ベクトルの長さ $\|\dot{c}(t)\|$ が恒等的に 1 のとき，写像 c を**弧長による助変数表示** (parametrization by arc length) という．任意のなめらかな曲線は弧長による助変数表示が可能である．実際，c がかってな助変数表示のとき，$c(t_0)$ から $c(s)$ までの長さを $f(s)$ とおけば，関数 f は $\dot{f}\neq 0$ を満たすので，その逆関数 f^{-1} を使って $t=f^{-1}(s)$ と変数変換すれば，$s\mapsto c(f^{-1}(s))$ は弧長による助変数表示である．

曲線が方程式によって表されることも多い．一般に，$\boldsymbol{R}^n$ 内の曲線は $n-1$ 個の方程式からなる連立方程式で表される．とくに平面の場合，少なくとも局所的には一つの方程式で表される．方程式 $f(x_1,x_2)=0$ を考える．(p,q) をこの方程式を満たす点とする．この点において，偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p,q)$ $(i=1,2)$ の一方が 0 でないとき，(p,q) の近傍でこの方程式を満たす点 (x_1,x_2) の全体は曲線となることが陰関数の定理を使って示される．方程式 $f(x_1,x_2)=0$ を満たす点 (p,q) において，上記の偏微分係数がともに 0 になる場合も含めて，それらを曲線と考えることも多く，そのような点 (p,q) を曲線の特異点と呼ぶ．たとえば，方程式 $x_1^2+x_2^3=0$ や方程式 $x_1x_2=0$ は原点 $(0,0)$ に特異点をもつ．後者は二つの正則な曲線 (この場合 x_1–軸と x_2–軸) の和集合で表されるので，方程式と助変数とでは特異点の扱いが異なる場合があり，注意を要する．

2　平面曲線の曲率

$c: I\to \boldsymbol{R}^2$ を曲線の弧長による助変数表示とする．$e_1(t)=\dot{c}(t)$ とおき，$e_1(t)$ を反時計回りに $\pi/2$ 回転したベクトルを $e_2(t)$ とおく．$e_1(t)$, $e_2(t)$ を**単位接ベクトル** (unit tangent vector), **単位法ベクトル** (unit normal vector) と呼ぶ．ベクトルの組み $\{e_1(t),e_2(t)\}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の正規直交基底であり，一般に t とともに向きを変える．$e_1(t)$ の長さは 1 であるから，t で微分したものは $e_1(t)$ と直交する．$e_2(t)$ についても同様である．このとき，次が成り立つような関数 $\kappa(t)$ が存在する:

$$\dot{e}_1(t)=\kappa(t)e_2(t),\quad \dot{e}_2(t)=-\kappa(t)e_1(t).$$

$\kappa(t)$ をこの曲線の $c(t)$ における**曲率** (curvature) と呼ぶ．弧長とは限らない助変数表示 $c=(x_1,x_2)$ の場合，曲率は次式で与えられる:

$$\kappa(t)=\frac{-\dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t)+\ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t)}{\left(\dot{x}_1(t)^2+\dot{x}_2(t)^2\right)^{3/2}}.$$

曲率 $\kappa(p)$ が 0 でない曲線上の点 $c(t)$ における法線上の点 $c(t)+\frac{1}{\kappa(t)}e_2(t)$ を $c(t)$ における**曲率中心**といい，これを中心とし $c(t)$ を通る円を**曲率円**という．

曲線の曲率は曲線の向きを変えない助変数の取り替えに関して不変であるが，曲線の向きを変えると符号が変化する．たとえば，半径が r の円の曲率は，反時計回りに進む助変数の場合 $1/r$ であるが，時計回りの場合 $-1/r$ である．

二つの曲線の弧長による助変数表示 c_i $(i=1,2)$ に関して，その曲率 κ_i $(i=1,2)$ が恒等的に等しいとき $(\kappa_1(t)=\kappa_2(t))$, これら 2 曲線は $\boldsymbol{R}^2$ の等長変換により互いに移り合う (すなわち 2 曲線は

合同である).

3　伸展線と縮閉線

平面曲線 $\mathcal{C}$ の点を通り，その点の接ベクトルに平行な直線と垂直な直線をそれぞれ**接線** (tangent) と**法線** (normal) という．

曲線 $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ を考える．$\mathcal{C}_1$ の各法線が $\mathcal{C}_2$ の法線でもあるとき，これら 2 曲線は互いに**平行曲線** (parallel curve) であるという．たとえば，同心円は互いに平行曲線である．また，$\mathcal{C}_1$ の各接線が $\mathcal{C}_2$ の法線であるとき，$\mathcal{C}_2$ を $\mathcal{C}_1$ の**伸展線** (involute), $\mathcal{C}_1$ を $\mathcal{C}_2$ の**縮閉線** (evolute) と呼ぶ．$\mathcal{C}_2$ の曲率中心の軌跡が $\mathcal{C}_1$ である．曲率が 0 でない曲線の伸展線は必ず存在し，それら伸展線は平行曲線の族をなす．はじめに与えた曲線の曲率が 0 になる点が存在すれば，それに対応して伸展線上に特異点ができる．曲率が 0 でない曲線の縮閉線が一意的に存在する．はじめに与えた曲線の曲率の極値に対応して縮閉線上に特異点が生じる．

4　空間曲線の曲率と捩れ率

空間曲線の弧長による助変数表示 $c : I \to \boldsymbol{R}^3$ を考える．$\ddot{c}(t)$ が至る所 0 でないことを仮定し，$e_1(t) = \dot{c}(t)$, $e_2(t) = \ddot{c}(t)/||\ddot{c}(t)||$ とおき，ベクトル積を使って $e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t)$ とおく．$e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ をそれぞれこの曲線の $c(t)$ における**単位接ベクトル** (unit tangent vector), **単位主法ベクトル** (unit principal normal vector), **単位従法ベクトル** (unit binormal vector) と呼び，曲線に付随するこの正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を**フルネ–セレ枠** (Frenet–Serret frame) という．次を満たす関数 κ, τ が存在する ($\kappa > 0$):

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

κ, τ をそれぞれこの曲線の**曲率** (curvature), **ねじれ率** (torsion) と呼ぶ．

二つの空間曲線の弧長による助変数表示 c_i ($i = 1, 2$) に関して，その曲率 κ_i とねじれ率 τ_i が等しいとき ($\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$, $\tau_1(t) = \tau_2(t)$, $\forall t$), これら二つの曲線は $\boldsymbol{R}^3$ の等長変換により互いに移りあう (すなわち 2 曲線は合同である).

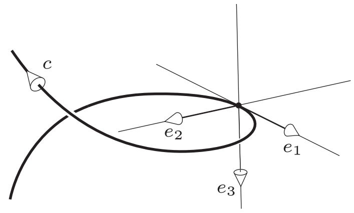


図 1　フルネ–セレ枠

曲率 κ とねじれ率 τ が一定の空間曲線は**らせん** (helix) と呼ばれ，次の助変数表示をもつ曲線と合同である:

$$c(t) = \big(art, b\cos rt, b\sin rt\big).$$

(ただし $r = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, $a = \kappa/r$, $b = \tau/r$)

5　閉曲線の全曲率

弧長による助変数表示 $c : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ に対して，$c(\ell + t) = c(t)$ ($\forall t \in \boldsymbol{R}$) が成り立つ正の数 ℓ が存在するとき，この曲線 $\mathcal{C}$ を閉曲線という．これを満たす最小の ℓ に対し，$\int_0^\ell \kappa(t)dt$ を $\mathcal{C}$ の**全曲率** (total curvature) と呼ぶ．

平面閉曲線の全曲率は 2π の整数倍であり，その整数を**回転数** (rotation number, winding number) と呼ぶ．閉曲線をなめらかさを保ったまま連続的に変形するとき，曲率も連続的に変化し，よって全曲率も連続的に変化するが，全曲率はつねに整数の 2π 倍であるから，これは一定である．すなわち，なめらかさを保ったままの変形で移りあえる二つの閉曲線は回転数が等しい．その逆も正しいことが知られている (H.Whitney の定理，1942 年).

空間曲線の曲率は正なので，全曲率も正である．空間閉曲線の全曲率はつねに 2π より大きく，2π になるのはこの閉曲線が平面上の凸領域の境界のときに限る (S.S. Chern–R.K. Lashof の定理). また，自己交差をもたない空間閉曲線の全曲率が 4π 以下なら，この閉曲線は空間に埋め込まれた 2 次元円板の境界である (結び目に関する J. Milnor の定理).

[小 沢 哲 也]

参 考 文 献

[1]　小林昭七：曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)，裳華房，1995.

曲 線 座 標

curvilinear coordinates

1 一 般 論

領域 $U \subset \boldsymbol{R}^n$ 上の n 個の可微分関数 f_i $(i = 1, \ldots, n)$ を考え，写像 $\psi : U \to \boldsymbol{R}^n$ を $\psi = (f_1, \ldots, f_n)$ とおく．ψ がその像 $V = \psi(U)$ への 1 対 1 写像であり，偏微分係数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ を (i, j) 成分にもつ n 次正方行列 $\left(\frac{D(f_i)}{D(x_j)}\right)$ の行列式，すなわち ψ の関数行列式が U の各点で 0 でないとき，これら n 個の関数の組を U 上の**曲線座標** (curvilinear coordinates) といい，個々の関数 f_i を**座標関数** (coordinate function) という．$\left|\frac{D(f_i)}{D(x_j)}\right|$ が 0 でないことから，ψ の逆写像 $\psi^{-1} : V \to U$ も可微分写像である (逆写像定理)．逆写像 $\varphi = \psi^{-1}$ を与えて U の曲線座標を指定することが多い．

以下，2 次元の場合を解説する．$\boldsymbol{R}^2$ を通常の内積に関し，ユークリッド平面と考える．使用する変数が何かをわかりやすくするため，$(a, b)_u$, $\boldsymbol{R}^2_{(x,y)}$ のように区間や集合の下に変数記号 u, (x, y) などを書き添える．$\boldsymbol{R}^2_{(u,v)}$ の開部分集合 V 上で定義された写像 $\varphi : V_{(u,v)} \to \boldsymbol{R}^2_{(x,y)}$ がその像 $U = \varphi(V)$ の曲線座標を定義しているものとする．このとき，u, v のうち一方の変数だけを動かしてできる曲線を**座標曲線** (coordinate curve) と呼ぶ．$\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v} \rangle = 0$ が成り立つとき，すなわち u–座標曲線と v–座標曲線がつねに直交するような曲線座標を**直交座標** (orthogonal coordinates) という．さらに，$\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\| = \|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\|$ が成り立つとき，写像 φ は**共形写像** (conformal mapping) と呼ばれ，対応する曲線座標は**等温座標** (isothermal coordinates) と呼ばれる．写像 $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ の関数行列式が正であるような共形写像は等角写像とも呼ばれ，これは複素関数 $u + \sqrt{-1}v \mapsto x(u, v) + \sqrt{-1}y(u, v)$ が正則関数であることと同値である．したがって，関数行列式が正の写像により定義される等温座標は正則関数を考えることに相当する．

2 ユークリッド平面の曲線座標の例

2.1 アフィン座標と射影座標

$\boldsymbol{R}^2$ 上の任意の点 O と，1 次独立なベクトル e_1, e_2 を固定するとき，任意の点 $P \in \boldsymbol{R}^2$ は二つの実数 $x(P), y(P)$ を使って $P = \mathrm{O} + x(P)e_1 + y(P)e_2$ と表される．$x(P), y(P)$ を座標関数とする $\boldsymbol{R}^2$ の座標を**アフィン座標** (affine coordinates) という．とくに e_1, e_2 が正規直交基底のとき，これを**ユークリッド座標** (Euclidean coordinates) という．

$\boldsymbol{R}^3$ 内で，二つの平面 H, K とこれらの平面上にない点 O を考える．また，K 上にアフィン座標 (x, y) を固定する．O を通り K と平行な平面と H との交わりを ℓ とする (H, K が平行のとき $\ell = \emptyset$)．$H \setminus \ell$ の点 P に対して，P と O を通る直線が K と交わる点を K のアフィン座標 $(x(P), y(P))$ で表すとき，これを H の**射影座標** (projective coordinates) という．

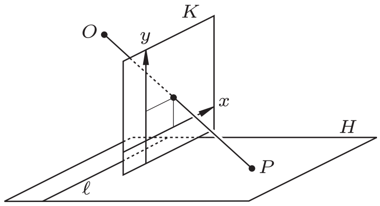


図 1 射影座標

2.2 極座標

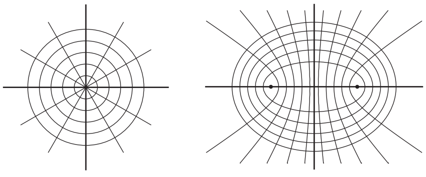
写像 $\varphi : (0, \infty)_r \times I_\theta \to \boldsymbol{R}^2_{(x,y)}$ を

$$\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

とおく．この φ で定まる曲線座標を**極座標** (polar coordinates) という．ただし，区間 I は $(0, 2\pi)$ または $(-\pi, \pi)$ と選ぶことが一般的である．r–座標曲線は原点から出る半直線であり，θ–座標曲線は原点を中心とする同心円をなし，互いに直交する．したがって，これは直交座標である．座標関数 r, θ は x, y の関数として $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$ と表される．$r = e^\rho$ と置き換え，写像 $\psi(\rho, \theta) = (e^\rho\cos\theta, e^\rho\sin\theta)$ による曲線座標を定義すると，これは φ と同じ座標曲線をもつ等温座標になる．この曲線座標は正則関数 $x + \sqrt{-1}y = e^{\rho + \sqrt{-1}\theta}$ を考えることに相当する．

2.3 楕円座標

写像 $\varphi : (-a^2, -b^2)_u \times (-b^2, \infty)_v \to \boldsymbol{R}^2_{(x,y)}$



(a)　(b)

図 2　(a) は極座標，(b) は楕円座標

$(0 < b < a$ は定数) を次のようにおく:
$$\Big(\pm\sqrt{\frac{(a^2+v)(a^2+u)}{a^2-b^2}}, \pm\sqrt{\frac{(b^2+v)(b^2+u)}{b^2-a^2}}\Big).$$
この φ で定まる曲線座標を**楕円座標** (elliptic coordinates) という．$\pm$ の 4 通りの組み合わせに応じて (x,y)–平面のそれぞれ第 1 から第 4 象限に曲線座標を定める．v–座標曲線は双曲線，u–座標曲線は楕円で，すべて $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ を焦点とする 2 次曲線である．各双曲線と各楕円は直交するので，これは直交座標である．

$d = \sqrt{a^2-b^2}$ とおき，$(x,y) = \psi(\theta,\mu)$ を
$$\psi(\theta,\mu) = (d\cosh\theta\cos\mu, d\sinh\theta\sin\mu)$$
と定義する．ただし，$\cosh\theta = (e^{\theta}+e^{-\theta})/2$, $\sinh\theta = (e^{\theta}-e^{-\theta})/2$ である．この ψ で定まる曲線座標も上の楕円座標の座標曲線と同じ 2 次曲線の集合である．ψ は等温座標であり，正則関数 $x+\sqrt{-1}y = d\cosh(\theta+\sqrt{-1}\mu)$ に対応している．

2.4　放物線座標

写像 $\varphi : \boldsymbol{R}^2_{(u,v)} \to \boldsymbol{R}^2_{(x,y)}$ を次のようにおく:
$$\varphi(u,v) = \big(u^2-v^2, 2uv\big).$$
この φ で定まる曲線座標を**放物線座標** (parabolic coordinates) という．これは各座標曲線が原点を焦点とする放物線であるような等温座標であり，正則関数 $x+\sqrt{-1}y = (u+\sqrt{-1}v)^2$ に対応している．

2.5　双極座標

写像 $\varphi : \boldsymbol{R}_u \times (0,2\pi)_v \to \boldsymbol{R}^2_{(x,y)}$ を
$$\varphi(u,v) = \Big(\frac{d\sinh u}{\cosh u+\cos v}, \frac{d\sin v}{\cosh u+\cos v}\Big)$$
と定義する ($d > 0$ は定数)．この φ で定まる曲線座標を**双極座標** (bipolar coordinates) という．u–座標曲線は 2 点 $(\pm d, 0)$ を通る円であり，v–座標曲線はこれら 2 点からの距離の比が一定な点の軌跡 (アポロニウスの円) である．u, v に対応する各円は互いに直交し，これは等温座標であり，正則関数 $x+\sqrt{-1}y = d\tanh\frac{u+\sqrt{-1}v}{2}$ に対応している．ただし，$\tanh z = \sinh z/\cosh z$ である．

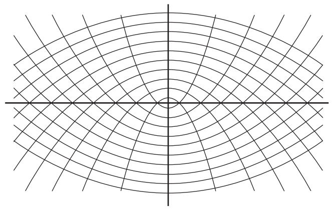


図 3　放物線座標

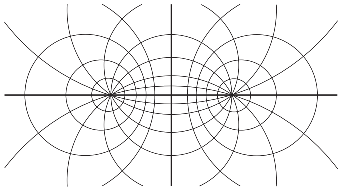


図 4　双極座標

3　ユークリッド空間の曲線座標

2 次元の直交座標をある直線の周りに回転させることにより 3 次元の直交座標を得ることができる．今，$\boldsymbol{R}^2_{(u,v)}$ の開集合 V で定義された写像 $(x,y) = \varphi(u,v) = (f(u,v), g(u,v))$ の像 U が領域 $\{y > 0\}$ に含まれているものとする．$\Phi : V_{(u,v)} \times (0,2\pi)_\theta \to \boldsymbol{R}^3_{(x,y,z)}$ を
$$\Phi(u,v,\theta) = \big(f(u,v), \cos\theta g(u,v), \sin\theta g(u,v)\big)$$
とおく．写像 Φ はその像の上の直交座標を定める．これは x–軸の周りの回転である．このようにして，前節で述べた 2 次元の直交座標から種々の 3 次元の直交座標が得られる．

平面の楕円座標は，定数 $0 < A_1 < A_2 < A_3$ に対して定まる次の写像 $\varphi : (-A_3, -A_2)_u \times (-A_2, -A_1)_v \times (-A_1, \infty)_w \to \boldsymbol{R}^3$ を使って空間の楕円座標に拡張される:
$$\varphi(u,v,w) = (\pm f_1, \pm f_2, \pm f_3),$$
ただし，$f_i = \sqrt{\frac{(A_i+u)(A_i+v)(A_i+w)}{(A_i-A_j)(A_i-A_k)}}$ $(i = 1,2,3$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\})$ である．　**[小 沢 哲 也]**

参 考 文 献

[1]　栗田　稔：座標，裳華房，1974 (2002 復刊).

曲　面

surface

$\boldsymbol{R}^3$ の通常の内積を $\langle\,,\,\rangle$, ベクトルの長さを $\|\ \|$ で表す．また，$\|\ \|$ により定まる距離構造をもって $\boldsymbol{R}^3$ をユークリッド空間と考え，E^3 と記す．

1　E^3 内の曲面

$\boldsymbol{R}^2$ の開集合 U で定義された可微分写像 $\varphi : U \to E^3$ について，U の各点での偏微分 $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$ $(i=1,2)$ が E^3 のベクトルとして 1 次独立であるとき，その像 $M=\varphi(U)$ を**曲面** (surface) といい，φ をその**助変数表示** (parametrization) という．また，$\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u_1,u_2)$ $(i=1,2)$ ではられる 2 次元部分空間を $p=\varphi(u_1,u_2)$ における M の**接平面** (tangent plane) といい，T_pM と書く．

接ベクトル $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$ の内積を

$$g_{ij}=\langle\frac{\partial\varphi}{\partial u_i},\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\rangle$$

とおき，$\{g_{ij}\}$ を M の φ に関する**第一基本量** (first fundamental form) と呼ぶ $(i,j=1,2)$. 第一基本量を (i,j) 成分にもつ 2 次正方行列は対称行列で正定値内積を定めるが，これは E^3 のユークリッド内積を接平面 T_pM に制限したものを，基底 $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$ により表現したものにほかならない．

ベクトル ν を，助変数表示 φ を使って

$$\nu=\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\times\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\Bigg/\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\times\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right\|$$

とおく．これは $p=\varphi(u_1,u_2)$ で M と直交し長さが 1 のベクトルである．ν を M の**単位法ベクトル場** (unit normal vector field) と呼ぶ．$\|\nu\|=1$ なので，これを偏微分して得られるベクトル $\frac{\partial\nu}{\partial u_i}$ $(i=1,2)$ は M に接する．したがって，接ベクトル $v=x\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+y\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}$ に対して，ν を v 方向に微分して得られる M の接ベクトル $v(\nu)=x\frac{\partial\nu}{\partial u_1}+y\frac{\partial\nu}{\partial u_2}$ を対応させる写像 $v\mapsto v(\nu)$ は T_pM からそれ自身への写像である．これを**ワインガルテン写像** (Weingarten map) と呼ぶ．これは接平面 T_pM の内積に関して対称な線型変換であり，重複度を込めて二つの実固有値をもつ．ワインガルテン写像の固有値 k_1, k_2 を曲面の**主曲率** (principal curvature) と呼び，固有ベクトルを**主曲率方向** (principal direction) と呼ぶ．

$$K=k_1k_2,\quad H=(k_1+k_2)/2$$

とおき，K を**ガウス曲率** (Gaussian curvature), H を**平均曲率** (mean curvature) と呼ぶ．主曲率は，符号を除いて，曲面の助変数表示にはよらない．また，E^3 の等長変換に関して不変である．ガウス曲率と平均曲率についても同様である．

M の点 p を通り接ベクトル $v\in\mathrm{T}_pM$ と法ベクトル $\nu(p)$ に平行な平面を H_v とおき，平面曲線 $M\cap H_v$ の p での曲率を v の関数と考える (図 1 参照)．ただし，曲線が ν の方に曲がっているときは曲率を負とするよう符号を付ける．この曲率の最大値と最小値が二つの主曲率に一致し，またそのときの v が対応する主曲率方向である．

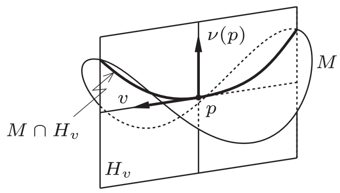


図 1　平面 H_v での切り口に現れる曲線

M の各点で $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}$, ν は 1 次独立であるから，φ の 2 階偏微分係数をこれらの 1 次結合で表すことができる (ガウスの誘導方程式);

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_j}=\sum_{a=1}^{2}\Gamma_{ij}^a\frac{\partial\varphi}{\partial u_a}+h_{ij}\nu.$$

このとき現れる係数 Γ_{ij}^a と h_{ij} は曲面 M の助変数表示 φ に関する**接続係数** (connection coefficient)，**第二基本量** (second fundamental form) と呼ばれる．これらは下の添え字に関して対称である; $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$, $h_{ij}=h_{ji}$. ν は $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$ と直交する長さが 1 のベクトルなので，

$$h_{ij}=\langle\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_j},\nu\rangle$$

が成り立つ (ワインガルテンの誘導方程式)．ガウス曲率と平均曲率は第一, 第二基本量を使って，

$$K=\frac{h_{11}h_{22}-(h_{12})^2}{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2},$$

$$H=\frac{h_{11}g_{22}+h_{22}g_{11}-2h_{12}g_{12}}{2(g_{11}g_{22}-(g_{12})^2)}$$

と表される．

上記の議論は，ν の代わりに $-\nu$ を使っても成り立つ．この取り換えで K は不変であるが，H は $-H$ に変わる．

2　曲面の基本方程式

第一基本量を $\{g_{ij}\}$ とおく．接続係数は第一基本量 $\{g_{ij}\}$ だけを使って，

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{2} g^{ka}\big(\frac{\partial g_{ia}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{ja}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_a}\big)$$

と表される．ここで g^{ka} は第一基本量の逆行列の (k,a)–成分である．**リーマン曲率テンソル** (Riemann curvature tensor) と呼ばれる量 R_{ijk}^{ℓ} を

$$R_{ijk}^{\ell} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\ell}}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\ell}}{\partial u_j} + \sum_{a=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}^{a}\Gamma_{ak}^{\ell} - \Gamma_{ik}^{a}\Gamma_{aj}^{\ell}\right)$$

と定義する．さらに，$R_{1212} = \sum_{a=1}^{2} g_{1a}R_{212}^{a}$ とおくとき, ガウス曲率 K は第二基本量を使わずに,

$$K = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}.$$

と表される (ガウスの方程式)．この方程式は，ガウスの誘導方程式をもう一度 u_i で偏微分したものに対して，関係式 $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u_i \partial u_k \partial u_j}$ などを使い，$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ の係数を比較して得られる．また，同じ関係式において ν の係数を比較することにより，次の関係が得られる (コダッチ方程式):

$$\frac{\partial h_{i1}}{\partial u_2} - \frac{\partial h_{i2}}{\partial u_1} = \sum_{a=1}^{2}\left(h_{1a}\Gamma_{i2}^{a} - h_{2a}\Gamma_{i1}^{a}\right)$$

$(i = 1, 2)$.

ガウスとコダッチの方程式は，助変数表示に関する第一基本量と第二基本量の関係式である．逆にこれらの方程式を満たす $(u_1, u_2) \in U$ の関数 g_{ij}, h_{ij} が与えられたとき，これらを第一基本量と第二基本量とするような U 上の写像 $\varphi : U \to E^3$ が存在する (曲面論の基本定理).

ガウスの方程式は，ガウス曲率が曲面の第一基本量だけで決まることを意味し，この事実は**ガウスの驚異の定理** (theorema egregium) と呼ばれている．

曲面を一般化した概念である多様体に対して，多様体の点になめらかに依存するように各接空間に内積構造を定義したものをリーマン多様体と呼ぶ．上記の式を使い，接続係数 Γ_{ij}^{k}, リーマン曲率テンソル R_{ijk}^{ℓ} などが定義され，これらはリーマン幾何学で基本的な役割を果たす．

3　極 小 曲 面

曲面 M の面積は，助変数表示 $\varphi : U \to E^3$ に関する第一基本量を使った積分

$$A(\varphi) = \int_U dv$$

に等しい ($dv = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\,du_1 du_2$ とおいた)．単位法ベクトル場 ν に平均曲率 H を掛けたもの $H\nu$ を**平均曲率ベクトル場** (mean curvature vector field) という．今，曲面 φ に沿う任意のベクトル場 V を使って，曲面を $\varphi_\varepsilon = \varphi + \varepsilon V$ と変形するとき，曲面の面積は

$$A(\varphi_\varepsilon) = A(\varphi) + \varepsilon \int_U \langle H\nu, V\rangle dv + o(\varepsilon)$$

と変化する．仮に曲面 M の面積が局所的に最小であれば，上の変化の 1 次の項は消える．このことから，平均曲率がいたるところ 0 である曲面を**極小曲面** (minimal surface) と呼ぶ．

4　曲 面 の 例

E^3 内の平面のガウス曲率は 0 である．また，半径 r の球面 $M = \{x \in E^3 | \, \|x\| = r\}$ のガウス曲率は $1/r^2$ である ($r > 0$ は定数)．(y,z)–平面の曲線 $z = \frac{1}{\lambda}\cosh \lambda y$ を y–軸の周りに回転してできる曲面は**カテノイド** (catenoid) と呼ばれる極小曲面である ($\lambda > 0$ は定数).

$\boldsymbol{R}^3$ の内積 $\langle\, ,\, \rangle'$ を次で定義する:

$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle' = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$

曲面 $M = \{x \in \boldsymbol{R}^3 | \langle x,x\rangle' = 1, x_3 > 0\}$ を考える．$\langle\, ,\, \rangle'$ は正定値ではないが，これを M の接平面に制限すると正定値になり，これにより M の第一基本量が定まる．この M のガウス曲率は恒等的に -1 である．　　**[小 沢 哲 也]**

参 考 文 献

[1]　佐々木重夫：微分幾何学，岩波書店，1991.

[2]　小林昭七：曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)，裳華房，1995.