演習問題解答

演習問題の計算が自分でもできるよう，表計算ソフトを使った計算例を収録した（付録_演習問題解答.xlsx）．自分でも実際に計算して結果を確かめてみよう．

演習問題 1　母分散の信頼区間（第 6 講末問題）

【演習問題】横紋筋融解症の患者 9 人を無作為に選んで，心電図の QTC（QT 時間の 1 拍の時間に対する比）を計測したところ，以下の結果だった．

0.45，0.42，0.55，0.46，0.45，0.47，0.53，0.42，0.48

これまでの研究でQTCは正規分布をすることがわかっているとする. QTCの母分散σ^2の不偏推定値$\hat{\sigma}^2$と，σ^2の 95%信頼区間を求めなさい．

【解説】正規分布の母分散の信頼区間を求める問題である．第 6 講で学んだように χ^2 分布を使って解くことができる．以下の手順で，標本平均 $\bar{x}$ と不偏分散 $\hat{\sigma}^2$ を計算した上で，信頼区間を求めればよい．

①データ値の和を計算すると，$x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 4.23$になる．

②標本平均 $\bar{x}$ を求めると，$\bar{x} = 4.23/9 = 0.47$ になる．

③偏差の二乗の和 S_{xx} を計算する．この場合は，$S_{xx} = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots (x_9 - \bar{x})^2 = 0.0160$になる．

④S_{xx}を$(n-1)=8$で割って不偏分散$\hat{\sigma}^2$を求めると，$\hat{\sigma}^2 = 0.0160/(9-1) = 0.002$（$\hat{\sigma} \fallingdotseq 0.04472$）となる．

⑤母分散σ^2の信頼区間は，第 6 講で解説したように，

$$\frac{S_{xx}}{\sigma^2}\text{は自由度}(n-1) = 8\text{の }\chi^2\text{ 分布に従う}$$

ことを利用する．具体的には，(6.11) 式

$$\frac{S_{xx}}{\chi^2(n-1; 0.975)} \leq \sigma^2 \leq \frac{S_{xx}}{\chi^2(n-1;\ 0.025)}$$

を使えばよい．付録_演習問題解答.xlsx「Ex01」⑤から，

$$\chi^2(8;\ 0.025) = 2.1797,\quad \chi^2(n-1; 0.975) = 17.535$$

なので

$$0.000912 \leq \sigma^2 \leq 0.00734$$

を得る．④で求めた$\hat{\sigma}^2$=0.002 は，もちろんこの区間の中である．

演習問題 2　2 項確率の差の信頼区間（第 11 講末問題）

【演習問題】 第 9 講の問 2 について，各群の死亡率の差 $(p_1 - p_2)$の修正 Wald 信頼区間を求めなさい．

【解説】 (11.13)〜(11.15)式を使って各群の死亡率の推定値 $\tilde{p}_1$，$\tilde{p}_2$を計算し，それをもとに $(p_2 - p_1)$の分散の推定値 Vを求める．

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \frac{(1.95996)^2}{4} = 4 + 0.9604 = 4.9604,$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \frac{(1.95996)^2}{4} = 14 + 0.9604 = 14.9604$$

$$\tilde{n}_1 = n_1 + \frac{(1.95996)^2}{2} = 55 + 1.9208 = 56.9207,$$

$$\tilde{n}_2 = n_2 + \frac{(1.95996)^2}{2} = 52 + 1.9208 = 53.9207$$

以上から，

$$\tilde{p}_1 = \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{n}_1} = \frac{4.9604}{56.9207} = 0.08715,\quad \tilde{p}_2 = \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{n}_2} = \frac{14.9604}{53.9207} = 0.2775$$

よって，

$$V = \frac{\tilde{p}_1(1-\tilde{p}_1)}{\tilde{n}_1} + \frac{\tilde{p}_2(1-\tilde{p}_2)}{\tilde{n}_2} = \frac{0.08715(1-0.08715)}{56.9207} + \frac{0.2775(1-0.2775)}{53.9207} = 0.005115$$

正規分布の 95%信頼区間を$(p_1 - p_2)$に適用すると

$$(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) - 1.96\sqrt{V} \sim (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) + 1.96\sqrt{V}$$

なので，上で求めた値を代入すると死亡率の差の 95%信頼区間が得られる．

0.05 〜 0.33

なお，この区間はゼロを含んでいないので，死亡率が等しいという帰無仮説は有意水準 0.05 で棄却される．

演習問題 3　オッズ比の信頼区間（第 12 講末問題）

【演習問題】表 12.1 の左下の四分表について，オッズ比の 95%信頼区間を求めなさい．

【解説】 まず，(12.2)式から対数オッズ比 λ の最尤推定値 $\hat{\lambda}$ を計算する．

$$\hat{\lambda} = \log\left(\frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}}\right) = \log\left(\frac{40 \times 40}{60 \times 60}\right) = \log\left(\frac{16}{36}\right) \fallingdotseq -0.81093$$

次に(12.1)式から，標準誤差の推定値 $\widehat{SE}$ を求める．

$$\widehat{SE} = \sqrt{\frac{1}{n_{11}} + \frac{1}{n_{12}} + \frac{1}{n_{21}} + \frac{1}{n_{22}}} = \sqrt{\frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{40}} \fallingdotseq 0.2887$$

続いて(12.3)式，

$$\hat{\lambda} - 1.96 \cdot \widehat{SE} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + 1.96 \cdot \widehat{SE}$$

から対数オッズ比 λ の 95%信頼区間を求める．

$$-1.3767 \leq \lambda \leq -0.2451$$

各項の指数をとって，オッズ比 θ の 95%信頼区間に変換する．

$$0.252 \leq \theta \leq 0.783$$

信頼区間に 1 が含まれていないので，オッズ比が 1 という帰無仮説は有意水準 5%で有意なことがわかる．

演習問題 4　母相関係数の信頼区間（第 13 講末問題 2）

【演習問題】標本の大きさ n=100 の測定結果に対して標本相関係数を計算したところ r=0.5 だった．母相関係数 ρ の 95%信頼区間を求めなさい．

【解説】(13.10)式から，Zを計算する．

$$Z = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2}\log\frac{1+0.5}{1-0.5} \fallingdotseq 0.5493$$

(13.10)式から，$V(Z)$を計算する．

$$V(Z) = 1/\sqrt{n-3} = 1/\sqrt{97} \fallingdotseq 0.1015$$

n は十分大きいので，(13.13) 式から Zの 95%信頼限界を計算すると

$$\zeta_{low} = Z - 1.96\sqrt{V(Z)} \fallingdotseq 0.3503 \text{ ，} \quad \zeta_{up} = Z + 1.96\sqrt{V(Z)} \fallingdotseq 0.7438$$

次に(13.14)式から，ρ の信頼区間の下限と上限が計算できる**【⇒下記補足】**.

$$\rho_{low} = \tanh(\zeta_{low}) \fallingdotseq 0.3366, \ \rho_{up} = \tanh(\zeta_{up}) \fallingdotseq 0.6341$$

【答】0.337≦ρ≦0.634

【補足】(13.14)式については，双曲線関数に対する以下の関係を使った．

$$tanh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1}$$

付表　χ^2分布の%点

	下位%点			上位%点		
自由度	0.01	0.025	0.05	0.05	0.025	0.01
1	0.00016	0.00098	0.0039	3.841	5.024	6.635
2	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963
28	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892
40	22.164	24.433	26.509	55.758	59.342	63.691
50	29.707	32.357	34.764	67.505	71.420	76.154
100	70.065	74.222	77.929	124.342	129.561	135.807