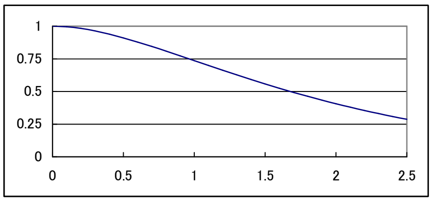
問題解答（第 5 章）

解答 5.1　二項分布 $B(n, \theta)$ の確率母関数 $H_X(t) = \{(1-\theta)+\theta t\}^n$ において $\theta = \lambda/n$ として $n \to \infty$ とすると，(5.3) より

$$H_X(t) = \lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda t}{n}\right\}^n = \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{\lambda(t-1)}{n}\right\}^n = \exp[\lambda(t-1)]$$

を得る．



解答 5.2　$\Pr(X=0)+\Pr(X=1) = e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda} = (1+\lambda)e^{-\lambda} = 0.5$ を満たす λ は陽には得られないが，右図に見るように一意的に存在する．λ を求めるため反復法による数値計算を用いる．上式の両辺の対数を取ると $\log(1+\lambda)-\lambda = \log 0.5$ となるので，変形して $\lambda = \log(1+\lambda)+\log 2$ を得る．そこで，$\lambda^{(0)}$ を初期値として $\lambda^{(t+1)} = \log(1+\lambda^{(t)})+\log 2$ なる反復法を用いる．右のような推移をたどり，10 回ほどの反復で $\lambda = 1.6783$ が得られる．

ITE	Lambda
0	1.5000
1	1.6094
2	1.6523
3	1.6686
4	1.6747
5	1.6770
6	1.6778
7	1.6782
8	1.6783
9	1.6783
10	1.6783

解答 5.3　$Poisson(\lambda)$ のモーメント母関数は $M_X(t) = \exp[\lambda(e^t-1)]$ であるので，t で微分して 0 と置くことにより，期待値 $E[X] = M_X(0)' = \lambda e^t \exp[\lambda(e^t-1)]|_{t=0} = \lambda$ を得る．さらに，$E[X^2] = M_X(0)'' = \lambda\{e^t\exp[\lambda(e^t-1)]+\lambda e^{2t}\exp[\lambda(e^t-1)]\}|_{t=0} = \lambda(1+\lambda)$ であるので，分散は $V[X] = E[X^2]-(E[X])^2 = \lambda(1+\lambda)-\lambda^2 = \lambda$ となる．

解答 5.4　確率関数 $H_X(t) = \exp[\lambda(t-1)]$ の微分は

$$\frac{d}{dt}H_X(t) = \lambda\exp[\lambda(t-1)],\quad \frac{d^2}{dt^2}H_X(t) = \lambda^2\exp[\lambda(t-1)]$$

であるので，$t = 1$ と置いて，$E[X(X-1)] = \dfrac{d^2}{dt^2}H_X(1) = \lambda^2$ を得る．

解答 5.5　$X \sim Poisson(3)$ における確率 $P(4\,;\lambda=3) = \Pr(X \le 4)$ および $Q(4\,;\lambda=3) = \Pr(4 \le X)$ は以下のように求められる．

$P(4\,;\lambda=3)$ = POISSON(4, 3, 1) ≈ 0.815263

$G(3\,;\lambda=4+1)$ = 1 − GAMMADIST(3, 5, 1, 1) ≈ 0.815263

$G_{2(x+1)}(2\lambda)$ = CHIDIST(6, 10) ≈ 0.815263

$Q(4\ ;\ \lambda = 3) = 1 - \mathrm{POISSON}(3, 3, 1) \approx 0.352768$

$F(3\ ;\ \lambda = 4) = \mathrm{GAMMADIST}(3, 4, 1, 1) \approx 0.352768$

$F_{2x}(2\lambda) = 1 - \mathrm{CHIDIST}(6, 8) \approx 0.352768$

解答 5.6　$2\sqrt{\lambda} - \dfrac{1}{4\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{\lambda} \times \left(1 - \dfrac{1}{8\lambda}\right)$ であり，$2\sqrt{\lambda - \dfrac{1}{4}} = 2\sqrt{\lambda} \times \sqrt{1 - \dfrac{1}{4\lambda}}$ となる．一般に，$|\,x\,|$ が小さいとき $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + \cdots$ と展開されることより，$\sqrt{1 - \dfrac{1}{4\lambda}} \approx 1 - \dfrac{1}{8\lambda}$ となる．

解答 5.7　検定統計量の値は $t^* = 3 + 7 + 4 = 14$ である．また，$n\lambda_0 = 3 \times 3 = 9$ であるので，片側 P-値は

$$P = \Pr(T \geq 14) = 1 - \mathrm{POISSON}(13, 9, 1) \approx 1 - 0.92615 = 0.07385$$

となる．mid-P 値は

$$\text{mid-}P = 0.5 \times \Pr(T = 14) + \Pr(T \geq 15) \approx 0.05766$$

と求められる．

両側 P-値は，片側 P-値を 2 倍すると $P = 2 \times 0.07385 = 0.14770$ である．一方，$\Pr(T = 14) = 0.03238$ に対し $\Pr(T = 3) = 0.01499$ および $\Pr(T = 4) = 0.03374$ であるので，$\Pr(T = 14)$ 以下の確率を全部加える流儀では $P = \Pr(T \leq 3) + \Pr(T \geq 14) = 0.02123 + 0.07385 = 0.09508$ となる．

解答 5.8　$n\lambda_0 = 9$，$t^* = 14$ であるので，$(t^* - n\lambda_0)/\sqrt{n\lambda_0} = (14-9)/\sqrt{9} = 5/3 = 1.67$ となり，片側 P-値は $P = 1 - \mathrm{NORMSDIST}(1.67) \approx 1 - 0.95221 = 0.04779$ となる．分散安定化変換では，$2\sqrt{14}\ -\ 2\sqrt{9 - 1/4}\ \approx 7.48331 - 5.91608 = 1.56724$ であるので，$P = 1 - \mathrm{NORMSDIST}\ (1.56724) \approx 1 - 0.94147 = 0.05853$ となる．

解答 5.9　観測値は 3，7，2 であるので，和は $t = 3 + 7 + 2 = 12$ であり，λ の点推定値 $\hat{\lambda}$ は標本平均 $\bar{x} = 12/3 = 4$ となる．標準誤差は $SE[\hat{\lambda}] = \sqrt{12}/3 = 2\sqrt{3}/3 = 1.15470$ と求められる．

解答 5.10　観測値が 3，7，2 で和が $t = 12$ であるので，5.3.2 節の各公式を用いて信頼区間を計算すると以下のようになる．

	下限	上限	中点	幅
正確法	2.067	6.987	4.527	4.920
スコア型	2.263	7.070	4.667	4.807
ワルド型	1.691	6.309	4.000	4.619
分散安定化	2.024	6.643	4.333	4.619

解答 5.11　「スコア型」および「分散安定化」の信頼区間は

$$\text{スコア型：}\begin{cases}\lambda_L = (t+2-2\sqrt{t+1})/n \\ \lambda_U = (t+2+2\sqrt{t+1})/n\end{cases},\quad \text{分散安定化：}\begin{cases}\lambda_L = (t+1-2\sqrt{t})/n \\ \lambda_U = (t+1+2\sqrt{t})/n\end{cases}$$

で与えられる．すなわち，ある整数値 k に対し，$t = k$ の場合の「スコア型」の信頼区間と $t = k + 1$ の「分散安定化」の信頼区間は一致する．与えられた λ に対し，$t+2-2\sqrt{t+1}$ が $n\lambda$ 以下となる最小の t の値を k とし，$t+1+2\sqrt{t}$ が $n\lambda$ 以上となる最大の t の値を l としたとき，$\Pr(T = k \mid \lambda) < \Pr(T = l \mid \lambda)$ であれば「分散安定化」信頼区間の被覆確率のほうが大きくなる．ほとんどの λ では $\Pr(T = k \mid \lambda) > \Pr(T = l \mid \lambda)$ であるが，たとえば $\lambda = 5.36$ とすると，$k = 1$ および $l = 10$ であり，$\Pr(T = 1 \mid \lambda = 5.36) \approx 0.02520$ および $\Pr(T = 10 \mid \lambda = 5.36) \approx 0.02536$ であるので，「分散安定化」のほうが 0.00016 だけ被覆確率は大きくなる．他に，$\lambda =$ 3.99 などでもそうなる．

解答 5.12　相続く確率の比は

$$\frac{p(x+1 \mid x \geq 1)}{p(x \mid x \geq 1)} = \frac{\lambda^{x+1}e^{-\lambda}/(x+1)!}{\lambda^x e^{-\lambda}/x!} = \frac{\lambda}{x+1}$$

となる．したがって，$\lambda < 2$ であれば $x = 1, 2, \ldots$ に対して上の比は 1 未満となり，確率は単調減少となる．通常のポアソン分布の場合の単調減少のための条件は $\lambda < 1$ であった．

解答 5.13　関数 $g(\lambda) = \lambda/(1 - e^{-\lambda})$ はゼロトランケートされたポアソン分布の期待値であるので，当然 λ の単調増加関数となる．数学的な証明は以下のようである．$g(\lambda)$ の λ による 1 階微分は

$$g'(\lambda) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2} = \frac{1-(1+\lambda)e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$$

であり，分子が正であることを示せばよいが，それは $\{(1+\lambda)e^{-\lambda}\}' = -\lambda e^{-\lambda} < 0$ であり，$(1+\lambda)e^{-\lambda} \to 1\ (\lambda \to 0)$ であることから分かる．

解答 5.14 $ZIP(\lambda, \omega)$ における 0 度数の確率は $\Pr(X = 0) = \omega + (1 - \omega)e^{-\lambda}$ となる．$\Pr(X = 0) > 0$ より，$\omega(1 - e^{-\lambda}) + e^{-\lambda} > 0 \Rightarrow \omega > - e^{-\lambda}/(1 - e^{-\lambda}) \Rightarrow \omega > - 1/(e^{\lambda} - 1) \Rightarrow \omega > 1/(1 - e^{\lambda})$ となる．

解答 5.15 $V[Y] = (1 - \omega)\lambda(1 + \omega\lambda) = \lambda\{- \lambda\omega^2 + (\lambda - 1)\omega + 1\}$ であるので，これを ω で微分して 0 と置くことにより，$- 2\lambda\omega + (\lambda - 1) = 0$ となり，$\omega = (\lambda - 1)/(2\lambda)$ で最大値を取ることが分かる．

解答 5.16 $n\tilde{p}_0 = n\exp(-\bar{Y})$ であり，$E[n\tilde{p}_0] = nE[\exp(-\bar{Y})]$ および $V[n\tilde{p}_0] = n^2V[\exp(-\bar{Y})]$ であるので，まず $E[\exp(-\bar{Y})]$ と $V[\exp(-\bar{Y})]$ を求める．各変量の和を $A = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ とすると，$A \sim Poisson(n\lambda)$ である．また，$\exp(-\bar{Y}) = \exp\left(-\frac{1}{n}A\right)$ であることに注意する．$Poisson(\lambda)$ のモーメント母関数は $M_X(t) = E[e^{tX}] = \exp[\lambda(e^t - 1)]$ であるので，期待値の正確な表現として

$$E\left[\exp(-\frac{1}{n}A)\right] = \exp[n\lambda(e^{-1/n} - 1)] = \exp[-n\lambda(1 - e^{-1/n})]$$

を得る．また，同様に

$$E\left[\left\{\exp(-\frac{1}{n}A)\right\}^2\right] = E\left[\exp(-\frac{2}{n}A)\right]\exp[n\lambda(e^{-2/n} - 1)] = \exp[-n\lambda(1 - e^{-2/n})]$$

であるので，分散の正確な表現は

$$V\left[\exp[-\frac{1}{n}A]\right] = E\left[\left\{\exp[-\frac{1}{n}A]\right\}^2\right] - \left\{E\left[\exp[-\frac{1}{n}A]\right]\right\}^2$$
$$= \exp[-n\lambda(1 - e^{-2/n})] - \exp[-2n\lambda(1 - e^{-1/n})]$$

となる．よって，

$$E[n\tilde{p}_0] = n\exp[-n\lambda(1 - e^{-1/n})]$$

および

$$V[n\tilde{p}_0{}^2] = n^2\{\exp[-n\lambda(1 - e^{-2/n})] - \exp[-2n\lambda(1 - e^{-1/n})]\}$$

を得る．

次に漸近展開を求める．展開は $O(n^{-1})$ の項までとし，$o(n^{-1})$ の項は無視する．

$$\exp[-n\lambda(1 - e^{-2/n})] = \exp\left[-n\lambda\left\{1 - \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{n^2} + \cdots\right)\right\}\right] = \exp\left[-2\lambda + \frac{2\lambda}{n} + \cdots\right]$$
$$= \exp[-2\lambda]\cdot\exp\left[\frac{2\lambda}{n} + \cdots\right] = \exp[-2\lambda]\left(1 + \frac{2\lambda}{n} + \cdots\right)$$

および

$$\exp[-2n\lambda(1-e^{-1/n})] = \exp\left[-2n\lambda\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots\right)\right\}\right] = \exp\left[-2\lambda+\frac{\lambda}{n}+\cdots\right]$$
$$= \exp[-2\lambda]\exp\left[\frac{\lambda}{n}+\cdots\right] = \exp[-2\lambda]\left(1+\frac{\lambda}{n}+\cdots\right)$$

であるので，

$$\exp[-n\lambda(1-e^{-2/n})] - \exp[-2n\lambda(1-e^{-1/n})] \approx \exp[-2\lambda]\cdot\frac{\lambda}{n}$$

となる．よって，

$$V[n\tilde{p}_0{}^2] \approx n^2\exp[-2\lambda]\frac{\lambda}{n} = n\exp[-2\lambda]\lambda = np_0{}^2\lambda$$

が得られる．

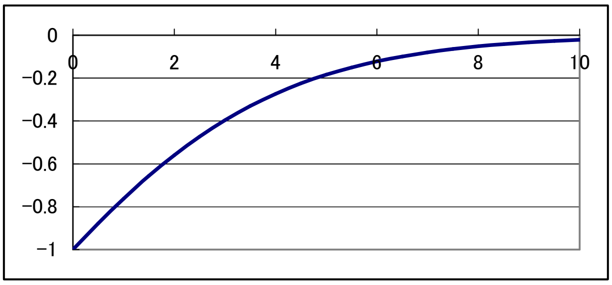
解答 5.17　$Cov[f_0, A] = E[f_0A] - E[f_0]E[A]$ であるが，f_0 は二項分布 $B(n, p_0)$ に従うので $E[f_0] = np_0$ である．A は $Poisson(\lambda)$ に従う確率変数の n 個の和であるので，$E[A] = n\lambda$ となる．また，$E[Y \mid Y \geq 1] = 1/(1 - e^{-\lambda})$ であるので，

$$E[f_0A] = \sum_{k=0}^{n} E[f_0A \mid f_0 = k]\Pr(f_0 = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} k\,E[A \mid f_0 = k]\,{}_nC_k\,p_0{}^k(1-p_0)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} k\,(n-k)\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p_0{}^k(1-p_0)^{n-k}$$
$$= \lambda\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\lambda\frac{n!}{k!(n-k)!}p_0{}^k(1-p_0)^{n-k-1}$$
$$= \lambda\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!}p_0{}^k(1-p_0)^{n-k-1}$$
$$= \lambda n(n-1)p_0\sum_{l=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{l!(n-2-l)!}p_0{}^l(1-p_0)^{n-2-l}$$
$$= \lambda n(n-1)p_0$$

より $Cov[f_0, A] = n(n-1)p_0\lambda - n^2p_0\lambda = -np_0\lambda$ を得る．$V[f_0] = np_0(1 - p_0)$ および $V[A] = n\lambda$ より，f_0 と A との間の相関係数は

$$R[f_0, A] = -\frac{np_0\lambda}{\sqrt{np_0(1-p_0)}\sqrt{n\lambda}} = -\sqrt{\frac{p_0}{1-p_0}\lambda} = -\sqrt{\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}} = -\sqrt{\frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}}$$

となる（下図参照．横軸：λ，縦軸：相関係数）．λ が大きくなるほど相関関係は薄くなる．



0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
2
4
6
8
10