問題解答（第 1 章）

解答 1.1　$A\cup A^c = \Omega$ であり $A\cap A^c = \phi$ である．$\Pr(A\cup A^c) = \Pr(A) + \Pr(A^c) = 1$ であるので，$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$ を得る．また，$A \subseteq B$ であるので $B = A\cup(A^c\cap B)$ と表現できる．$A\cap(A^c\cap B) = \phi$ より $\Pr(B) = \Pr\{A\cup(A^c\cap B)\} = \Pr(A) + \Pr(A^c\cap B)$ を得る．ここで $\Pr(A^c\cap B) \ge 0$ であることから，$\Pr(B) \ge \Pr(A)$ が成り立つ．

解答 1.2　$\Pr(A\cap B)$ の最大値は $A \subseteq B$ の場合で $\Pr(A\cap B) = 0.5$ となる．このとき $\Pr(A\cup B)$ は最小値 0.7 となる．$\Pr(A\cap B)$ の最小値は A と B の重なりが最も小さい場合で $\Pr(A\cap B) = 0.2$ となる．このとき $\Pr(A\cup B)$ は最大値 1 となる．よって，$0.2 \le \Pr(A\cap B) \le 0.5$，$0.7 \le \Pr(A\cup B) \le 1$ である．A と B が互いに独立な場合は $\Pr(A\cap B) = \Pr(A)\cdot\Pr(B) = 0.35$ であり，このとき $\Pr(A\cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A\cap B) = 0.5 + 0.7 - 0.35 = 0.85$ となる．

解答 1.3　上側累積確率 $Q(x) = \Pr(x \le X) = \sum_{k=x}^{\infty}\theta(1-\theta)^k$ は，初項 $\theta(1-\theta)^x$，公比 $1-\theta$ の等比級数であるので，その和は $\sum_{k=x}^{\infty}\theta(1-\theta)^k = \theta(1-\theta)^x/\{1-(1-\theta)\} = (1-\theta)^x$ となる．ここで $x = 0$ とすると $\sum_{k=0}^{\infty}\theta(1-\theta)^k = (1-\theta)^0 = 1$ と全確率の和が 1 となることが示される．下側累積確率は $P(x) = \Pr(X \le x) = 1 - \Pr(x+1 \le X) = 1 - (1-\theta)^{x+1}$ であり，$P(x) + Q(x) = 1 - (1-\theta)^{x+1} + (1-\theta)^x = 1 + (1-\theta)^x\{1-(1-\theta)\} = 1 + \theta(1-\theta)^x = 1 + p(x)$ となる．

解答 1.4　$E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X]$ より $E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X]$ を得る．また，(1.28) より $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ であるので，$V[X] = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$ となる．

解答 1.5　求める期待値の定義式は $E[X] = \sum_{x=0}^{\infty}x\theta(1-\theta)^x$ である．よって

$$E[X]-(1-\theta)E[X] = \sum_{x=0}^{\infty}x\theta(1-\theta)^x - \sum_{x=0}^{\infty}x\theta(1-\theta)^{x+1} = \sum_{x=1}^{\infty}\theta(1-\theta)^x = \frac{\theta(1-\theta)}{1-(1-\theta)} = 1-\theta$$

より $E[X] = (1-\theta)/\theta$ を得る．

解答 1.6　共分散の定義より，$\mu_X = E[X]$，$\mu_Y = E[Y]$ として

$$Cov[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X\mu_Y]$$
$$= E[XY] - 2\mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y = E[XY] - \mu_X\mu_Y$$

となる．

解答 1.7　$\mu = E[X]$ とすると，

$$\mu_3 = E[(X-\mu)^3] = E[X^3 - 3\mu X^2 + 3\mu^2 X - \mu^3]$$
$$= \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 3\mu^3 - \mu^3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3$$

および

$$\mu_4 = E[(X-\mu)^4] = E[X^4 - 4\mu X^3 + 6\mu^2 X^2 - 4\mu^3 X + \mu^4]$$
$$= \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 4\mu^4 + \mu^4 = \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4$$

となる．

解答 1.8　確率変数 X を $Y = aX + b$ と変数変換すると $E[(Y - E[Y])^k] = a^k E[(X - E[X])^k]$ となる．よって $a > 0$ とすると $SD[Y] = a\, SD[X]$ であるので，Y の歪度と尖度は

$$\beta_1[Y] = \frac{E[(Y-E[Y])^3]}{(SD[Y])^3} = \frac{a^3 E[(X-E[X])^3]}{a^3 (SD[X])^3} = \frac{E[(X-E[X])^3]}{(SD[X])^3} = \beta_1[X]$$

$$\beta_2[Y] = \frac{E[(Y-E[Y])^4]}{(SD[Y])^4} - 3 = \frac{a^4 E[(X-E[X])^4]}{a^4 (SD[X])^4} - 3$$
$$= \frac{E[(X-E[X])^4]}{(SD[X])^4} - 3 = \beta_2[X]$$

と値が変わらないことが示される．

解答 1.9　モーメント母関数は，t が 0 に近く $e^t(1-\theta) < 1$ と仮定すると，等比級数の公式より

$$M_X(t) = E[\exp(tX)] = \sum_{x=0}^{\infty} \exp(tx)\theta(1-\theta)^x = \theta \sum_{x=0}^{\infty} \{e^t(1-\theta)\}^x = \frac{\theta}{1-e^t(1-\theta)}$$

となる．これより，期待値は

$$M_X'(0) = \frac{d}{dt}\frac{\theta}{1-e^t(1-\theta)}\bigg|_{t=0} = -\frac{\theta\{-e^t(1-\theta)\}}{\{1-e^t(1-\theta)\}^2}\bigg|_{t=0} = \frac{1-\theta}{\theta}$$

と求められる．確率母関数は

$$H_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \theta(1-\theta)^x t^x = \theta \sum_{x=0}^{\infty} \{(1-\theta)t\}^x = \frac{\theta}{1-(1-\theta)t}$$

となる． $M_X(t) = H_X(e^t)$ であることが確かめられる．

解答 1.10　モーメント母関数 $M_X(t)$ は $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu'_k t^k / k!$ と展開される．また，対数関数の級数展開は $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n / n$ である．これらより 4 次までのキュミュラントを実際に求めるが，t^5 以上の項を省略して書くと以下のようになる（μ'_1 は単に μ とした）．

$$\begin{aligned}
&\log\left(1 + \mu t + \frac{\mu'_2}{2}t^2 + \frac{\mu'_3}{6}t^3 + \frac{\mu'_4}{24}t^4\right) \\
&= \left(\mu t + \frac{\mu'_2}{2}t^2 + \frac{\mu'_3}{6}t^3 + \frac{\mu'_4}{24}t^4\right) - \frac{1}{2}\left(\mu t + \frac{\mu'_2}{2}t^2 + \frac{\mu'_3}{6}t^3 + \frac{\mu'_4}{24}t^4\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\mu t + \frac{\mu'_2}{2}t^2 + \frac{\mu'_3}{6}t^3 + \frac{\mu'_4}{24}t^4\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\mu t + \frac{\mu'_2}{2}t^2 + \frac{\mu'_3}{6}t^3 + \frac{\mu'_4}{24}t^4\right)^4 \\
&\approx \left(\mu t + \frac{\mu'_2}{2}t^2 + \frac{\mu'_3}{6}t^3 + \frac{\mu'_4}{24}t^4\right) - \frac{1}{2}\left(\mu^2 t^2 + \mu\mu'_2 t^3 + \frac{(\mu'_2)^2}{4}t^4 + \frac{\mu\mu'_3}{3}\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\mu^3 t^3 + \frac{3}{2}\mu^2\mu'_2 t^4\right) - \frac{1}{4}\mu^4 t^4 \\
&= \mu t + \left(\frac{\mu'_2}{2} - \frac{\mu^2}{2}\right)t^2 + \left(\frac{\mu'_3}{6} - \frac{\mu\mu'_2}{2} + \frac{\mu^3}{3}\right)t^3 + \left(\frac{\mu'_4}{24} - \frac{(\mu'_2)^2}{8} - \frac{\mu\mu'_3}{6} + \frac{\mu^2\mu'_2}{2} - \frac{1}{4}\mu^4\right)t^4 \\
&= \mu t + \frac{1}{2}(\mu'_2 - \mu^2)t^2 + \frac{1}{6}(\mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3)t^3 + \frac{1}{24}(\mu'_4 - 3(\mu'_2)^2 \\
&\quad - 4\mu\mu'_3 + 12\mu^2\mu'_2 - 6\mu^4)t^4
\end{aligned}$$

これより，$\kappa_1 = \mu$, $\kappa_2 = \mu'_2 - \mu^2 = \mu_2$ および $\kappa_3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3 = \mu_3$ となることが分かる．また，$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4$ であるので，

$$\kappa_4 - \mu_4 = -3(\mu'_2)^2 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4 = -3(\mu'_2 - \mu^2)^2 = -3\mu_2^2$$

より $\kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$ も示される．

解答 1.11　成功の確率 θ の幾何分布に従う確率変数 X に対し，スコアは $U(\theta) = 1/\theta - X/(1-\theta)$ であり，その分散は $V[U(\theta)] = 1/\{\theta^2(1-\theta)\}$ である．すなわち $V[X/(1-\theta)] = 1/\{\theta^2(1-\theta)\}$ であるので

$$V[X]=(1-\theta)^2\times\frac{1}{\theta^2(1-\theta)}=\frac{1-\theta}{\theta^2}$$

を得る.

解答 1.12　コインの表(おもて)が出る確率を θ とすると，検定の仮説は H_0 : $\theta = 0.5$ vs. H_1 : $\theta < 0.5$ である（片側検定）. 初めて表が出るまでの裏の回数を X とすると，H_0 の下で X はパラメータ 0.5 の幾何分布に従う. X の実現値を x とすると，P-値は $P = \Pr(x \le X) = (0.5)^x$ となる. $x = 4$ のとき $P = 1/16 = 0.0625$ であり，$x = 5$ のとき $P = 1/32 = 0.03125$ であるので，$\alpha = 0.05$ とすると $x = 4$ では H_0 は棄却されず，$x = 5$ のときに棄却される. この場合の実質の有意水準は 0.03125 である.

解答 1.13　対数尤度関数は $l(\theta)=n\log\theta+\sum_{i=1}^{n}(y_i-1)\times\log(1-\theta)$ であるので，尤度方程式は

$$\frac{d}{d\theta}l(\theta)=\frac{n}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}\sum_{i=1}^{n}(y_i-1)=0$$

となる. これを θ について解くことにより最尤推定値 $\hat{\theta}=n/\sum_{i=1}^{n}y_i=1/\bar{y}$ を得る. ここで $\bar{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i/n$ は標本平均である. $n = 3$ で観測データが $y_1 = 3$，$y_2 = 4$，$y_3 = 8$ とすると，$\bar{y}=5$ であるので $\hat{\theta}=0.2$ となる.

解答 1.14　当たりの確率 θ の点推定値は $\hat{\theta}=1/(1+0)=1$ である. 95%信頼区間の上限は 1 である. 下限は $\Pr(X = 0) = \theta = 0.025$ より $\theta_L = 0.025$ となる. k 回当たりが続けて出る確率は θ^k である. よって，$\theta^k = 0.025$ より $\theta_L=\sqrt[k]{0.025}$ であることから $\sqrt[k]{0.025}\ge 0.5 \rightarrow 0.025\ge(0.5)^k \rightarrow \log 0.025 \ge k \log 0.5 \rightarrow k \ge \log 0.025 / \log 0.5 \approx 5.32$ より $k \ge 6$ を得る.