問題解答（第 6 章）

解答 6.1　$(a+b)^{\alpha}$ を b の関数 $g(b)$ と見て $b=0$ のまわりでテーラー展開する．$g(0)=a^{\alpha}$ であり，$g'(b)=\dfrac{d}{db}g(b)=\alpha(a+b)^{\alpha-1}$ より $g'(0)=\alpha a^{\alpha-1}$ となる．同様に，$g''(b)=\alpha(\alpha-1)(a+b)^{\alpha-2}$ より $g''(0)=\alpha(\alpha-1)a^{\alpha-2}$ を得る．以下同様に $g^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k-1)a^{\alpha-k}$ であるので，(6.2) より

$$(a+b)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k-1)}{k!}a^{\alpha-k}b^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{\alpha}C_{k}\,a^{\alpha-k}b^{k}$$

が示される．

解答 6.2　(6.10) の関係式より $\dfrac{p(x+1)}{p(x)}=\dfrac{(a+x)\xi}{x+1}\geq 1$ として式を変形すると $(a+x)\xi\geq(x+1)$ より $x(1-\xi)\leq a\xi-1$ となり，$x\leq\{a\xi-1)/(1-\xi)$ が得られる．逆向きの不等号も同様に成り立つので (6.12) が示される．また，$p(0)=p(1)$ となるのは $(a-1)\xi/(1-\xi)=1$ のときであり，変形して $a=1/\xi$ を得る．たとえば $NB(2.5, 0.4)$ のとき，$a=2.5=1/0.4$ であるので $p(0)=p(1)$ であり，これが確率の最大値を与える（図 6.1 (b) 参照）．

解答 6.3　$NB(a,\xi)$ のモーメント母関数の微分は

$$M_X'(t)=(-a)\left(-\frac{\xi}{1-\xi}\right)e^{t}\left\{\frac{1-\xi e^{t}}{1-\xi}\right\}^{-a-1}$$

であるので，期待値 $E[X]=M_X'(0)=a\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}$ を得る．さらに微分して

$$M_X''(t)=a\cdot\frac{\xi}{1-\xi}e^{t}\left\{\frac{1-\xi e^{t}}{1-\xi}\right\}^{-a-1}+a(a+1)\cdot\left(\frac{\xi}{1-\xi}e^{t}\right)^{2}\left\{\frac{1-\xi e^{t}}{1-\xi}\right\}^{-a-2}$$

より $E[X^2]=M_X''(0)=a\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}+a(a+1)\cdot\left(\dfrac{\xi}{1-\xi}\right)^{2}$ となるので，分散

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=a\cdot\frac{\xi}{1-\xi}+a(a+1)\cdot\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{2}-a^{2}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{2}=a\cdot\frac{\xi}{(1-\xi)^{2}}$$

が得られる．

解答 6.4　まず 1 点分布すなわち $X = \lambda$ を確率 1 で取る分布のモーメント母関数は $M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{t\lambda} \times 1 = e^{\lambda t}$ であることを確認しておく．$Gamma(a, b)$ のモーメント母関数は付録の定理 A.3 より $M(t) = (1 - bt)^{-a}$ であるので，$ab = \lambda$ より $b = \lambda/a$ として $a \to \infty$ とすると

$$\lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{a}\right)^{-a} = 1\Big/\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{(-\lambda t)}{a}\right)^{a} = 1\big/e^{-\lambda t} = e^{\lambda t}$$

と 1 点分布のモーメント母関数となる．

解答 6.5　$NB(a, \xi)$ の対数尤度関数（確率関数を ξ の関数と見たものの対数）は

$$l(\xi) = \log L(\xi) = -\log x! + \log\Gamma(a+x) - \log\Gamma(a) + a\log(1-\xi) + x\log\xi$$

であるので，

$$l'(\xi) = -\frac{a}{1-\xi} + \frac{x}{\xi} = \frac{(1-\xi)x - \xi a}{\xi(1-\xi)} = \frac{x - a\xi/(1-\xi)}{\xi}$$

となる．よって，$i(\xi) = V[l'(\xi)] = \dfrac{1}{\xi^2}\cdot a\dfrac{\xi}{(1-\xi)^2} = \dfrac{a}{\xi(1-\xi)^2}$ を得る．よって，n 個の独立な観測値に基づく最尤推定量 $\hat{\xi}$ は期待値 ξ，分散 $1/(ni(\xi)) = \xi(1 - \xi)^2/(na)$ に従うことが分かる．

解答 6.6　以下のように示される．

$$E[X(X-1)\,|\,X \ge 1; a, \xi] = \frac{1}{1-(1-\xi)^a}\sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)\times\frac{1}{x!}\frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)}(1-\xi)^a\xi^x$$

$$= \frac{1}{1-(1-\xi)^a}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{1}{(x-2)!}\frac{\Gamma(a+2+x-2)}{\Gamma(a+2)/a(a+1)}\frac{1}{(1-\xi)^2}(1-\xi)^{a+2}\xi^2\cdot\xi^{x-2}$$

$$= \frac{1}{1-(1-\xi)^a}\cdot a(a+1)\cdot\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2\sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{y!}\frac{\Gamma(a+2+y)}{\Gamma(a+2)}(1-\xi)^{a+2}\xi^y$$

$$= \frac{1}{1-(1-\xi)^a}\cdot a(a+1)\cdot\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2$$

$$= (a+1)\cdot\frac{\xi}{1-\xi}\cdot E[X\,|\,X \ge 1; a, \xi]$$