アドヴァンス

A. N-S 方程式の無次元化

N-S 方程式において，$\boldsymbol{v}=(u, v)$，$\boldsymbol{g}=(g_{\mathrm{x}}, g_{\mathrm{y}})$ のように 2 次元で考える．このとき N-S 方程式の x 方向成分の式は，

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u+\rho g_{\mathrm{x}}$$

と表される．ここで，系の代表長さを $L[\mathrm{m}]$，代表線速度を $U[\mathrm{m\,s^{-1}}]$ とし，無次元変数を * を付けた変数として表示すると，

$$x^*=\frac{x}{L},\quad y^*=\frac{y}{L},\quad u^*=\frac{u}{U},\quad v^*=\frac{v}{U},\quad t^*=\frac{t}{L/U},\quad p^*=\frac{p}{\rho U^2}$$

となり，それぞれ

$$x=Lx^*,\quad y=Ly^*,\quad u=Uu^*,\quad v=Uv^*,\quad t=\frac{L}{U}t^*,\quad p=\rho U^2p^*$$

と変形できる．これを N-S 方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}&\rho\left(\frac{U^2}{L}\right)\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\rho\left(\frac{U^2}{L}\right)\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)\\&\quad=-\frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\mu\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\right)u^*+\rho g_{\mathrm{x}}\end{aligned}$$

となる．両辺を $\rho U^2/L$ で除すと，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)&=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{\mu}{\rho UL}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)+\frac{g_{\mathrm{x}}L}{U^2}\\&=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)+\frac{1}{Fr}\end{aligned}$$

が得られる．

B. 非圧縮性流体の定義

ρ が時間的，空間的に変化しない流体は非圧縮性であるが，その逆は実は真ではない．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$$

が成立しない場合でも

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$$

であれば，非圧縮性流体であり $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ となる．

C．ブラジウスの式からの 7 分の 1 乗則の導出

2.2.3 項で述べたように，平均流速を$\overline{u}$として

$$\tau_{\mathrm{w}}=f\frac{\rho\overline{u}^2}{2}$$

である．ブラジウスの式（2.33）を代入すると，

$$\tau_{\mathrm{w}}=\frac{0.0791}{2}\frac{\rho\overline{u}^2}{Re^{0.25}}$$

となる．ここで，式（2.4）および $D=2R$ から，

$$Re=\frac{\overline{u}d}{\nu}=\frac{2\overline{u}R}{\nu}$$

であるから，

$$\tau_{\mathrm{w}}=0.0395\,\rho\overline{u}^{2-0.25}\,\nu^{0.25}\,(2R)^{-0.25}=0.0395\,\rho\overline{u}^{\frac{7}{4}}\,\nu^{\frac{1}{4}}\,(2R)^{-\frac{1}{4}}$$

と変形できる．式（2.24）で定義した摩擦速度 u^* を導入すると，

$$(u^*)^2=\frac{\tau_{\mathrm{w}}}{\rho}=0.0395\,\overline{u}^{\frac{7}{4}}\,\nu^{\frac{1}{4}}\,(2R)^{-\frac{1}{4}}$$

$$(u^*)^8=(0.0395)^4\frac{\overline{u}^7\nu}{2R}$$

$$\left(\frac{\overline{u}}{u^*}\right)^7=\frac{2u^*R}{\nu}\frac{1}{(0.0395)^4}$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{u}}{u^*}=\left\{\frac{2}{(0.0395)^4}\right\}^{\frac{1}{7}}\left(\frac{u^*R}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}$$

式（2.25）において $n=7$ のとき

$$u_{\mathrm{av}}=\overline{u}=0.816u_{\max}$$

$n=6$ のとき $\overline{u}=0.791u_{\max}$ であるから，$\overline{u}=0.80u_{\max}$ として

$$\frac{u_{\max}}{u^*}=\frac{7.00}{0.80}\left(\frac{u^*R}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}$$

となり，半径方向の任意の位置で成立するとして，

$$\frac{u}{u^*}=8.74\left(\frac{u^*y}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}},\qquad \therefore\quad u^+=8.74(y^+)^{\frac{1}{7}}$$

このようにして7分の1乗則（式（2.23））が導かれる．

D. 熱伝導方程式の数値解析法

式（3.22）および（3.23）を有限差分法で数値解析する方法について概説する．式（3.22）の左辺を時間 t に関する前進差分で，右辺を位置 x に関する中心差分で離散化する．時間 0〜t を Δt で，位置 0〜1 を Δx をそれぞれ等分すると離散化式は以下のようになる．

$$\frac{T_j^{n+1}-T_j^n}{\Delta t}=\alpha\frac{T_{j+1}^n-2T_j^n+T_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{D.1}$$

ここで肩字の n は $n\Delta t$ 時間後の温度を表しており，添え字の j は $j\Delta x$ の位置における温度を表している．式（3.22）は t に関する1次微分，x に関する2次微分であるため初期における温度分布（初期条件）と，$x=0$ と $x=1$ における温度の値（境界条件）のもとで解析することとなる．式（D.1）を以下のように変形する．

$$T_j^{n+1}=T_j^n+\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(T_{j+1}^n-2T_j^n+T_{j-1}^n\right) \tag{D.2}$$

上式より分かるように，$n\Delta t$ 時間における温度 T^n の値が分かっていれば，次の（$n+1$）Δt 時間における T^{n+1} の値が算出できる．この方法はプログラムが単純で表計算ソフトでも容易に計算ができる．一方，式（D.2）の右辺2項目は右辺1項目の補正項となっているため，解析精度をあげるため Δx の値を小さく（差分格子数を増大）したり，α の値が大きいときには時間刻み幅 Δt を小さく設定しなくてはならないなどの制限が生じる．

これに対し，式（D.2）の代わりに次の式（D.3）を用いると時間刻み幅の制限は無くなる．

$$T_j^{n+1}=T_j^n+\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(T_{j+1}^{n+1}-2T_j^{n+1}+T_{j-1}^{n+1}\right) \tag{D.3}$$

その反面，単純に左辺の値から右辺が求めることはできなくなり，連立方程式を解く必要がある．式（D.2）を陽解法，式（D.3）を陰解法と言う．

式（3.23）を x 方向に Δx, y 方向に Δy で中心差分で離散化すると，

$$\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{(\Delta y)^2}+\frac{T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}=0 \tag{D.4}$$

となる．ここで添え字の i, j は x, y の格子位置を表す．$\Delta x=\Delta y$ の正方格子を考

えると,

$$T_{i+1,\,j}+T_{i-1,\,j}+T_{i,\,j+1}+T_{i,\,j-1}-4T_{i,\,j}=0 \tag{D.5}$$

となり，適切な境界条件のもと連立方程式を解くことになる.