補遺２：論理語についての解説

2012.11.06

この解説は，本文「3. 3. 1 論理語の意味，真理条件」の下書きとして作成したものです．本文とは独立して読めますので参考にしてください．数 1, 0 は，それぞれ T（真），F（偽）を表します．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（中島）

■ **練習問題 1**：　P = the lecture is interesting, Q = the classroom is noisy, R = the lecture is dull, S = the students enjoy the lecture とし，　論理記号 ¬，∧，∨，→を使って次の例文を表記しなさい

a. The lectures is not interesting and the classroom is noisy.
b. The lectures is dull or it is interesting and the classroom is noisy.
c. If the lectures is not dull, then the classroom is not noisy.
d. If the lectures is not dull and the classroom is not noisy, then the students enjoy it.

これら(a), (b), (c), (d)を指示に従って表記すると次のようになる．

(a). $\neg P \wedge Q$
(b). ∨を先に使った場合：$(R \vee P) \wedge Q$
　　∧を先に使った場合：$R \vee (P \wedge Q)$
(c). $\neg R \rightarrow \neg Q$
(d). $(\neg R \wedge \neg Q) \rightarrow S$

■ **練習問題 2**：　P が真，Q が偽，R が偽，S が真のときの(3)の例文の真偽値を，真偽表を使って求めよ．

まず，真偽表の読み方であるが，論理記号¬, ∧, ∨, →は関数を表していると読めば理解しやすい．普通，１変数の関数は f(x)，２変数の関数は f(x, y)，と表記するが，これにならって，まず，¬(P), ∧(P, Q), ∨(P, Q), →(P, Q)と考えればいい．
$f(x) = x + 1$ という関数とすると，この関数は $x = 1$ のとき 2 を対応させ，　$x = 2$ のとき 3 を対応させるような指示をするものである．

$x + 1$
1 → 2
2 → 3
3 → 4

これと同じように，真偽表は，関数¬(P), ∧(P, Q), ∨(P, Q), →(P, Q)に関して値の対応付けを指示していると考えると，次のようになる．

P	¬P
1	0
0	1

¬(P)
1 → 0
0 → 1

P	Q	P ∧Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

∧(P, Q)
<1, 1> → 1
<1, 0> → 0
<0, 1> → 0
<0, 0> → 0

P	Q	P ∨Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

∨(P, Q)
<1, 1> → 1
<1, 0> → 1
<0, 1> → 1
<0, 0> → 0

P	Q	P → Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

→(P, Q)
<1, 1> → 1
<1, 0> → 0
<0, 1> → 1
<0, 0> → 1

真偽表を理解しているということは，こういう対応付けができるということで，真偽表を使うときにはこういう対応付けを実際にしている．

問題では, それぞれの文の真偽値は P = 1, Q = 0, R = 0, S = 1 のように与えられている．

(a). ¬P ∧Q

この文の真偽値を求めるには，まずこの文がどのように作られたか解析し，それぞれの文に与えられた値を入れる．

¬P ∧Q
↗　　　↖
¬P　　　　Q = 0
↑
P = 1

次に，真偽表の指示に従って値を対応させていく．
¬(1) = 0, ∧(1,0) = 0

わかりやすいように，これを構文解析図に書き入れると，次のようになる．

¬P ∧Q = 0
↗　　　↖
¬P = 0　　　Q = 0
↑
P = 1

$\neg P \land Q = 0$ ということは，指示されたような状況では，(3a)は偽になるということである．

以下，他の文についても同じ操作をすればよい．

(b). $\lor$を先に使った場合：$(R \lor P) \land Q$

$(R \lor P) \land Q = 0$

↗ ↖

$R \lor P = 1$ $\quad$ $Q = 0$

↗ ↖

$R = 0$ $\quad$ $P = 1$

(b)’. $\land$を先に使った場合：$R \lor (P \land Q)$

$R \lor (P \land Q) = 0$

↗ ↖

$R = 0$ $\quad$ $P \land Q = 0$

↗ ↖

$P = 1$ $\quad$ $Q = 0$

今の場合，$\land$,$\lor$のどちらを先に適用しても結果は同じであるが，いつも等しいとは限らない．基本的には，足し算とかけ算の場合と同じように，適用順序が変わると結果も変わる．例えば，$(2 + 3) \times 5$ と $2 + (3 \times 5)$は同じでない

(c). $\neg R \land \neg Q$

$\neg R \rightarrow \neg Q = 1$

↗ ↖

$\neg R = 1$ $\quad$ $\neg Q = 1$

↑ ↑

$R = 0$ $\quad$ $Q = 0$

(d). $(\neg R \land \neg Q) \rightarrow S$

$(\neg R \land \neg Q) \rightarrow S = 1$

↗ ↖

$\neg R \land \neg Q = 1$ $\quad$ $S = 1$

↗ ↖

$\neg R = 1$ $\quad$ $\neg Q = 1$

↑ ↑

$R = 0$ $\quad$ $Q = 0$

別の解き方：

例文 $\neg P \wedge Q$, $(R \vee P) \wedge Q$, $R \vee (P \wedge Q)$, $\neg R \rightarrow \neg Q$, $(\neg R \wedge \neg Q) \rightarrow S$ は，それ自体も合成された関数とみることができる．例えば，代数の例でいると， 関数 f と g を $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ とすると，その合成関数は,

$f \cdot g(x) = x^2 + 1$, $g \cdot f(x) = (x + 1)^2$ となる．これと同じように考えると，(3)の文は，次のような２変数，３変数の合成関数とみることができる（簡単のため，関数の適用順序は無視して表記している）.

(a). $\neg \cdot \wedge (P, Q)$

(b). $(\vee) \cdot \wedge (R, P, Q)$

(b)'. $\vee \cdot (\wedge)(R, P, Q)$

(c). $\neg \cdot \rightarrow \cdot \neg (R, Q)$

(d). $(\neg \cdot \wedge \cdot \neg) \cdot \rightarrow (R, Q, S)$

そうして，こうした合成関数が，特定の値に対してだけでなく，すべての取り得る値に対してどういう値を対応させるかを，あらかじめ求めておくことができる.

その手順をまず(3a)についてみると，次のような真偽表の空白部分を，最初にみた¬と∧についての値を対応させる指示に従って，埋めていけばよい.

P	Q	¬P	¬P ∧Q
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

まず，¬P の列を埋めると次のようになる．つまり，P の列の値を逆にすればよい.

P	Q	¬P	¬P ∧Q
1	1	0	
1	0	0	
0	1	1	
0	0	1	

そして，¬P の列と Q の列の真偽値を組み合わせものを，∧の指示に従って対応させた値を¬P ∧Q の列に入れると次のようになる.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

したがって，文$\neg P \wedge Q$は次のような真偽表によって表される関数となる.

P	Q	$\neg P \wedge Q$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

それで，問題は$P=1, Q=0$のときに，文全体の真偽値を求めることであるので，下から３行目のところの$\neg P \wedge Q$の値を確かめればよい．値は0で，先に構文解析図を用いて求めた値と一致する.

　他の文についても同様のことをすればよいが，(b)と(d)は変数が３つなので８通り(2^3)の真偽値の組み合わせを考えなければならない．それで，まず先に(c)についてみておく.

(c). $\neg R \rightarrow \neg Q$　の真偽表：

R	Q	$\neg R$	$\neg Q$	$\neg R \rightarrow \neg Q$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

問題は$R=0$と $Q=0$の場合であるので，一番下の行の$\neg R \rightarrow \neg Q$の値をみればよく，1で構文解析図の値と一致している.

(b). ∨を先に使った場合：(R ∨P) ∧Q

R	P	Q	R ∨P	(R ∨P) ∧Q
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

問題は R = 0, P = 1, Q = 0 のときであるので，下から３番目の行をみればよく，値は 0 で構文解析図の値と一致している．

(b). ∧を先に使った場合：R ∨(P ∧Q)

R	P	Q	P ∧Q	R ∨(P ∧Q)
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

同じく下から３行目の R ∨(P ∧Q)の値をみると, 0 で構文解析図の値と一致している．

　ここで注意すべきは, 上の２つの表を比べてみると, 下から５行目と７行目の値が, 上の表では 0 であるが，下の表では 1 になっている．つまり，∨ と∧のどちらを先に適用するかで値が違ってくる場合があるので，(R ∨P) ∧Q と R ∨(P ∧Q)は同じ関数ではない,ということがこれらの表からわかる．

(d). $(\neg R \wedge \neg Q) \rightarrow S$　の真偽表：

R	Q	S	¬R	¬Q	¬R ∧¬Q	(¬R ∧¬Q) → S
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0

問題は，$R = 0, Q = 0, S = 1$ の場合であるので，下から２行目を見ると，
$(\neg R \wedge \neg Q) \rightarrow S$ の値は 1 となっており，構文解析図の値と一致する．

■ **練習問題 3：**　$(P \rightarrow Q)$が，$(\neg P \vee Q)$, $\neg(P \wedge \neg Q)$, $(\neg Q \rightarrow \neg P)$と論理的に等しいことを真偽表を使って確かめよ．

$(P \rightarrow Q)$が，他の文と論理的に等しいことをみるには，前の問題の例にならって，それぞれの真偽表を作ってみればよい．まず，確認しておくと，$(P \rightarrow Q)$の真偽表は次のようである．

P	Q	P → Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$(\neg P \vee Q)$の真偽表は次のようになる．

P	Q	¬P	¬P ∨Q
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

$\neg(P \wedge \neg Q)$の真偽表は次のようになる.

P	Q	¬Q	P∧¬Q	¬(P ∧ ¬Q)
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

$(\neg Q \rightarrow \neg P)$の真偽表は次のようになる.

P	Q	¬Q	¬P	¬Q → ¬P
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

いずれの真偽表でも，右端の真偽値は$(P \rightarrow Q)$の表の値と一致している.

■ **練習問題 4：** 次の形をした文がいずれもトートロジーになることを真偽表を使って確かめよ.

a. $(Q \wedge \neg Q) \rightarrow P$
b. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
c. $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
d. $\neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

これらの文がいずれもトートロジーになることを真偽表で確かめるには，真偽表を作ってすべての真偽値の組み合わせに対し，値が 1 になることを確認すればよい.
a. $(Q \wedge \neg Q) \rightarrow P$ の真偽表：

P	Q	¬Q	Q∧¬Q	(Q∧¬Q) → P
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

b. $P \to (Q \to P)$ の真偽表：

P	Q	$Q \to P$	$P \to (Q \to P)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

c. $\neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$ の真偽表：

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \to \neg(P \vee \neg Q)$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

d. $\neg(P \vee Q) \to (\neg P \wedge \neg Q)$ の真偽表：

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \to (\neg P \wedge \neg Q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

トートロジーは世界について何も語らない無意味な文のように思えるかも知れないが，実際には，後の節でみるように日常的にもよく使われる．論理的定理はみなトートロジーになっており，論理学はトートロジーに関する学問であるとよく言われる．ウィトゲンシュタインがトートロジーについて簡潔にまとめている．

4.461 Propositions show what they say: tautologies and contradictions show that they say nothing.

A tautology has no truth-conditions, since it is unconditionally true: and a contradiction is true on no condition.

Tautologies and contradictions lack sense.

(Like a point from which two arrows go out in opposite directions to one another.)

(For example, I know nothing about the weather when I know that it is either raining or not raining.)

4.4611 Tautologies and contradictions are not, however, non-sensical. They are part of the symbolism, much as ‘0’ is part of the symbolism of arithmetic.

4.462 Tautologies and contradictions are not pictures of reality. They do not represent any possible situations. For the former admit *all* possible situations, and the latter *none*.

In a tautology the conditions of agreement with the world—the representational relation—cancel one another, so that it does not stand in any representational relation to reality.

L. Wittgenstein *Tractatus Logico-Philosophicus*