『ブラウン運動』問題の解答

1

問題 1.1

例 1　$(1/n) \times n = 1\,.$

例 2　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \bigl\{p + (1-p)\bigr\}^n = 1\,.$

例 3　$\displaystyle\sum_{r_1,\cdots,r_k} \frac{n!}{r_1!\cdots r_k!} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} = (p_1 + \cdots + p_k)^n = 1\,.$

例 4　$\displaystyle e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1\,.$

例 5　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1\,.$

問題 1.2　A, B をみる限りでは，1 と 2，4 と 5 を分離する理由はない．そこでこれらをそれぞれ束ねて「1 つ」とみなすことにする．その上であらためて 1 と 2 の束を a，4 と 5 の束を b と書くことにして

$$\Omega' = \{3,\ 6,\ a,\ b\}$$

の部分集合をすべてつくると次の $2^4 = 16$ 個となる．

$$\emptyset,\ \{3\},\ \{6\},\ \{a\},\ \{b\},$$
$$\{3,6\},\ \{3,a\},\ \{3,b\},\ \{6,a\},\ \{6,b\},\ \{a,b\},$$
$$\{3,6,a\},\ \{3,6,b\},\ \{3,a,b\},\ \{6,a,b\},\ \{3,6,a,b\}\,.$$

a と b は本当は束を表しているから，元に戻して a を $1,2$，b を $4,5$ と書くと結果は，

$$\emptyset,\ \{3\},\ \{6\},\ \{1,2\},\ \{4,5\},$$
$$\{3,6\},\ \{1,2,3\},\ \{3,4,5\},\ \{1,2,6\},\ \{4,5,6\},\ \{1,2,4,5\},$$
$$\{1,2,3,6\},\ \{3,4,5,6\},\ \{1,2,3,4,5\},\ \{1,2,4,5,6\},\ \{1,2,3,4,5,6\}$$

となる．その作り方からこれらで補集合，和集合，積集合をとる演算に関して閉じていること，すなわち σ-加法族になっていることは明らか．逆に，これらがすべて必要なことは順に

$$\emptyset,\ A\cap B,\ A^{\mathrm{c}}\cap B^{\mathrm{c}},\ A\cap B^{\mathrm{c}},\ A^{\mathrm{c}}\cap B,$$
$$(A\cap B)\cup(A^{\mathrm{c}}\cap B^{\mathrm{c}}),\ A,\ B,\ B^{\mathrm{c}},\ A^{\mathrm{c}},\ (A\cap B^{\mathrm{c}})\cup(A^{\mathrm{c}}\cap B),$$
$$A\cup B^{\mathrm{c}},\ A^{\mathrm{c}}\cup B,\ A\cup B,\ A^{\mathrm{c}}\cup B^{\mathrm{c}},\ \Omega$$

に等しいことから明らかである．

問題 1.3　前問の $\Omega' = \{3,6,a,b\}$ で考えると，

$$P(\{3,a\}) = 0.2, \quad P(\{3,b\}) = 0.7, \quad P(\{3\}) = 0.1$$

なので

$$P(\{a\}) = 0.2 - 0.1 = 0.1, \quad P(\{3\}) = 0.1,$$
$$P(\{b\}) = 0.7 - 0.1 = 0.6, \quad P(\{6\}) = 1 - 0.1 - 0.1 - 0.6 = 0.2$$

である．このことを用いると，前問の 16 個の事象の確率は順に

$$0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.6,\ 0.3,\ 0.2,\ 0.7,\ 0.3,\ 0.8,\ 0.7,\ 0.4,\ 0.9,\ 0.8,\ 0.9,\ 1$$

となる．

問題 1.4　（1）正規分布表で確率が 0.025 となるのは 1.96 のときなので

$$P\big(|X-m|>1.96\sigma\big)=0.05$$

より，$a=1.96$．

同様にして確率が 0.005 のときを探して

$$P\big(|X-m|>2.58\sigma\big)=0.01$$

より，$a=2.58$ である [*1)]．

（2）求める確率の値は，$x-m=cu$ と置換して

$$\begin{aligned}P\big(m<X<m+c\big)&=\int_m^{m+c}\frac{c}{\pi}\frac{1}{(x-m)^2+c^2}dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{1}{u^2+1}du=\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

（3）同様に

$$P\big(X>4/\lambda\big)=\int_{4/\lambda}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_4^{\infty}e^{-u}du=\frac{1}{e^4}\,.$$

（注） 問題 1.6 で計算するが，指数分布の平均は $E(X)=1/\lambda$，標準偏差も $\sigma(X)=1/\lambda$ なので，（3）の結果は

$$P\big(|X-E(X)|>3\sigma(X)\big)=\frac{1}{e^4}\fallingdotseq 0.018$$

を意味する．正規分布の場合は正規分布表より

$$P\big(|X-E(X)|>3\sigma(X)\big)\fallingdotseq 0.0027$$

である．一方，1.2.2 項の Chebyshev の不等式 (1.29) では

$$P\big(|X-E(X)|>3\sigma(X)\big)<\frac{1}{3^2}\fallingdotseq 0.11$$

となり，精度が指数分布と比べてもかなり落ちる．

問題 1.5　(1.26) は積分の線形性による．

(1.27) について，$E(X)=m$ とおくと

$$\begin{aligned}V(aX+b)&=E\Big(\big\{(aX+b)-(am+b)\big\}^2\Big)=E\big(a^2(X-m)^2\big)\\&=a^2V(X)\,.\end{aligned}$$

(1.28) について，(1.26) を用いて

$$\begin{aligned}V(X)&=E\big((X-m)^2\big)=E(X^2-2mX+m^2)\\&=E(X^2)-2mE(X)+m^2=E(X^2)-m^2\,.\end{aligned}$$

問題 1.6　（i）2 項定理

$$(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k a^{n-k}$$

の両辺を x で微分したのちに x をかけ，その結果に同じ操作をもう一度繰り返すと

$$nx(x+a)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k x^k a^{n-k}$$

と

$$nx(x+a)^{n-1}+n(n-1)x^2(x+a)^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\,{}_n\mathrm{C}_k x^k a^{n-k}$$

[*1)] 正規分布による推定・検定ではこの 1.96 と 2.58 の数値が伝統的に用いられる．

が得られる．これらの式に $x = p,\ a = 1 - p$ を代入すると

$$E(X) = np \quad と \quad E(X^2) = np + n(n-1)p^2\,.$$

(1.28) に代入して $V(X) = np(1-p)$ となる．

（ii）（i）の結果に $p = \lambda/n$ を代入して $n \to \infty$ の極限をとる [*2]．

（iii）初等的な級数の和の計算なので省略する．

（iv）$x - m = \sqrt{2}\sigma u$ と置換すると

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(m + \sqrt{2}\sigma u)e^{-u^2}du = m\,.$$

また，(1.13) の両辺を a で微分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-3/2}$$

となり，$x - m = \sqrt{2}\sigma u$ の置換を経て

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}2\sigma^2u^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-u^2}\sqrt{2}\sigma du = \sigma^2\,. \end{aligned}$$

（v）$x - m = cu$ と置換する．

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m + cu}{1 + u^2}du$$

の積分のうち，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cu}{1+u^2}du = \frac{c}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{u}{1+u^2}du + \frac{c}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{u}{1+u^2}du$$

の右辺の 2 つの積分はいずれも発散するので，平均は存在しない．したがって分散も存在しない．

（vi）

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx = \lambda^{-1}$$

の両辺を λ で 2 回微分すると

$$\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx = \lambda^{-2}, \qquad \int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx = 2\lambda^{-3}$$

なので，

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda^{-1}, \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 2\lambda^{-2} - \lambda^{-2} = \lambda^{-2} \end{aligned}$$

となる．

問題 1.7　A と B が独立なので，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned} P(A^{\mathrm{c}} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = \bigl\{1 - P(A)\bigr\}P(B) = P(A^{\mathrm{c}})P(B)\,, \\ P(A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}) &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= \bigl\{1 - P(A)\bigr\}\bigl\{1 - P(B)\bigr\} = P(A^{\mathrm{c}})P(B^{\mathrm{c}}) \end{aligned}$$

となり，A^{c} と B も，A^{c} と B^{c} も独立である．

問題 1.8　$x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2$ を用いて，全確率を計算すると

---

*2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$ の両辺を λ で微分したのち $\lambda e^{-\lambda}$ を掛ける等の計算でも求めることができる．

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mu(x,y)dxdy = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}d(x+y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = a\pi$$

となる．これが 1 に等しいので，$a = 1/\pi$．周辺分布については

$$x^2+2xy+2y^2 = 2\Big(y+\frac{x}{2}\Big)^2+\frac{x^2}{2}\,,\quad x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2$$

より

$$\mu_X(x) = \frac{1}{\pi}e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(y+x/2)^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},$$
$$\mu_Y(y) = \frac{1}{\pi}e^{-y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}\,.$$

問題 1.9　確率密度について，$\mu(x,y) = \mu_X(x)\mu_Y(y)$ なので

$$\begin{aligned}E(XY) &= \iint_{\mathbb{R}^2} xy\mu(x,y)dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\mu_X(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} y\mu_Y(y)dy = E(X)E(Y)\,.\end{aligned}$$

問題 1.10　以下，特性関数を $\varphi(z)$ で表す．

（i）正規分布

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[izx-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big]dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{imz-(\sigma^2/2)z^2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[-\frac{(x-m-i\sigma^2z)^2}{2\sigma^2}\Big]dx\\ &= \exp\Big[-\frac{\sigma^2}{2}z^2+imz\Big]\,.\end{aligned}$$

（ii）Cauchy 分布

$$\varphi(z) = \frac{c}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izx}}{(x-m)^2+c^2}dx$$

の積分経路を，図 1 のように $z > 0$ なら上半円，$z < 0$ なら下半円にとる．それぞれ極 $m+ci$，$m-ci$ を内部に含むので，

$$\varphi(z) = \pm 2\pi i\,\mathrm{Res}\Big\{\frac{c}{\pi}\frac{e^{izx}}{(x-m)^2+c^2}\,,\,m\pm ci\Big\} = \exp\big[-c|z|+imz\big]\,.$$

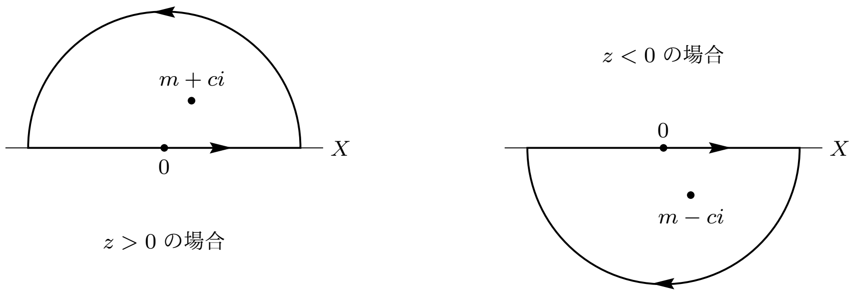

図 1　x 積分の経路と極.

（iii）指数分布

$$\varphi(z) = \lambda\int_0^{\infty} e^{(iz-\lambda)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda-iz}\,.$$

問題 1.11（i）全確率が 1 という式で，本文の第 1 章の 1.3.2 項ですでに出てきた式である．

（ii）$\varphi(z)$ の被積分関数 e^{izx} の絶対値が 1 なので，有界収束定理が適用できて x 積分と $z \to 0$ の順序を交換できるので，

$$z \to 0 \quad なら \quad \varphi(z) \to \varphi(0)$$

が成り立つ.

（iii）正値性も

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j \overline{a_k} \varphi(z_j - z_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j e^{iz_j x} \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} e^{-iz_k x} \Big) P(dx)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j e^{iz_j x} \Big|^2 P(dx) \geqq 0$$

から明らか.

問題 1.12（1）$\Omega \in \mathfrak{B}'$ なので，(1.64) の $A = \Omega$ の場合である.

（2）$A \in \mathfrak{B}'$ に対して，X と A の定義関数

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$$

が独立となるので

$$E[X, A] = E(X\, 1_A) = E(X) E(1_A) = E(X) P(A) = E\big[E(X), A\big] .$$

つまり $Y = E(X)$ は (1.64) をみたしている．したがってその一意性より $E(X|\mathfrak{B}') = E(X)$.

（3）条件つき期待値の定義とその一意性から明らかである.

（4）$A \in \mathfrak{B}_1$ ならば $A \in \mathfrak{B}_2$ なので，

$$E\big[E(X|\mathfrak{B}_2), A\big] = E[X, A] = E\big[E(X|\mathfrak{B}_1), A\big] .$$

これは $E(E(X|\mathfrak{B}_2)\,|\,\mathfrak{B}_1) = E(X|\mathfrak{B}_1)$ を意味している.

（5）最初に，Y がある $H \in \mathfrak{B}'$ の定義関数 1_H の場合を示す．任意の $A \in \mathfrak{B}'$ に対して $H \cap A \in \mathfrak{B}'$ なので

$$E\big[1_H E(X|\mathfrak{B}'), A\big] = E\big[E(X|\mathfrak{B}'), H \cap A\big] = E(X, H \cap A) = E[1_H X, A]$$

なので，確かに

$$E(1_H X|\mathfrak{B}') = 1_H E(X|\mathfrak{B}')$$

が成り立っている．したがって単関数 $Y = \sum_{j=1}^{n} c_j 1_{H_j}$ に対しても成り立つ．一般の Y の場合はそれを単関数で近似することで証明できる.

2

問題 2.1 本文にもあるように (2.55) の右辺に Taylor 展開

$$\mathcal{G}(t', x'|t, x) = \mathcal{G}(t', x''|t, x) + (x' - x'') \frac{\partial}{\partial x''} \mathcal{G}(t', x''|t, x) + \cdots$$

を代入してその第 1 項を左辺に移行すると，左辺は

$$\mathcal{G}(t' + \Delta t, x''|t, x) - \mathcal{G}(t', x''|t, x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t' + \Delta t, x''|t', x') dx'$$

となるが，この x' 積分が 1 でないので $\Delta\mathcal{G}(t', x''|t, x)$ の形にならない.

この困難を克服するためにテスト関数 $\varphi(x'')$ を (2.55) の両辺にかけて，x'' で積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x'') \mathcal{G}(t' + \Delta t, x''|t, x) dx''$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x'') \mathcal{G}(t' + \Delta t, x''|t', x') \mathcal{G}(t', x'|t, x) dx' .$$

右辺に Taylor 展開

$$\varphi(x'') = \varphi(x') + (x''-x')\frac{d\varphi(x')}{dx'} + \frac{1}{2}(x''-x')^2\frac{d^2\varphi(x')}{dx'^2} + o\big((x''-x')^2\big)$$

を代入し，2 重積分の順序を交換して先に x'' 積分を行うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t'+\Delta t, x''|t', x')dx'' = 1$$

なので，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x'')\mathcal{G}(t'+\Delta t, x''|t,x)dx'' - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\mathcal{G}(t',x'|t,x)dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} M(t',x';\Delta t)\frac{d\varphi(x')}{dx'}\mathcal{G}(t',x'|t,x)dx' \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(t',x';\Delta t)\frac{d^2\varphi(x')}{dx'^2}\mathcal{G}(t',x'|t,x)dx' + o(\Delta t)\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
M(t',x';\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x''-x')\mathcal{G}(t'+\Delta t, x''|t',x')dx'' = a(t',x')\Delta t + o(\Delta t), \\
\sigma^2(t',x';\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x''-x')^2\mathcal{G}(t'+\Delta t, x''|t',x')dx'' = 2D(t',x')\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

とおいた．ここでも Lindeberg 型の条件を仮定している．

(1) の左辺（LHS）を

$$\mathrm{LHS} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\Big\{\mathcal{G}(t'+\Delta t, x'|t,x) - \mathcal{G}(t',x'|t,x)\Big\}dx'$$

と書いておいて，両辺を Δt で割って $\Delta t \to 0$ の極限をとると

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\frac{\partial\mathcal{G}(t',x'|t,x)}{\partial t'}dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{\frac{d\varphi(x')}{dx'}a(t',x') + \frac{d^2\varphi(x')}{dx'^2}D(t',x')\Big\}\mathcal{G}(t',x'|t,x)dx'
\end{aligned}$$

となる．右辺で部分積分をし，積分変数 x' を y と書き換えると

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\frac{\partial\mathcal{G}(t',y|t,x)}{\partial t'}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\Big\{-\frac{\partial}{\partial y}\Big(a(t',y)\mathcal{G}(t',y|t,x)\Big) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(D(t',y)\mathcal{G}(t',y|t,x)\Big)\Big\}dy
\end{aligned}$$

が得られる．

最後に，テスト関数 $\varphi(y)$ を

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon) & (\,|y-x'| \leqq \varepsilon) \\ 0 & (\,|y-x'| \geqq \varepsilon+\varepsilon^2) \end{cases}$$

をみたすようにとる．ただし $\varepsilon < |y-x'| < \varepsilon+\varepsilon^2$ では両端での値 0 と $1/(2\varepsilon)$ をなめらかにつなぐようにしておく．このようにした上で $\varepsilon \to 0$ の極限をとると，前向き方程式 (2.54) が得られる．

問題 2.2 （i）Chapman の方程式 (2.50) をみたすこと，（ii）初期条件 (2.49) をみたすこと，および（iii）Fokker–Planck の方程式 (2.53) をみたさないこと，に分けて解答する．

（i）Chapman の方程式 (2.50) をみたすことは，$B(p,q)$ をベータ関数として，

$$\Gamma(t''-t')\Gamma(t'-t) = \Gamma(t''-t)B(t''-t', t'-t)$$

と

$$\int_x^{x''} (x''-x')^{t''-t'-1}(x'-x)^{t'-t-1}dx' = (x''-x)^{t''-t-1}B(t''-t', t'-t)$$

から直ちに分かる．

（ii）初期条件 (2.49) について．テスト関数を $\varphi(x')$ とする．$x'-x=y$ と置換し，

$$\int_x^{\infty} (x'-x)^{t'-t-1}e^{-(x'-x)}\varphi(x')dx' = \int_0^{\infty} y^{t'-t-1}e^{-y}\varphi(y+x)dy$$

の右辺に

$$|\varphi(y+x)-\varphi(x)| \leqq cy \quad (c>0\ \text{は定数})$$

を代入して,

$$\int_0^\infty y^{t'-t-1}e^{-y}\varphi(x)dy=\varphi(x)\Gamma(t'-t),\quad \int_0^\infty y^{t'-t-1}e^{-y}cydy=c\Gamma(t'-t+1)$$

および

$$\lim_{t'\to t}\frac{\Gamma(t'-t+1)}{\Gamma(t'-t)}=0$$

を用いると

$$\lim_{t'\to t}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{G}(t',x'|t,x)\varphi(x')dx'=\varphi(x)$$

となって,(2.49) が得られる.

(iii) Fokker–Planck 方程式 (2.53) をみたさないことについて.$\Delta t=t'-t$ とおくとき,今の場合は

$$M(t',x;\Delta t)=\frac{1}{\Gamma(\Delta t)}\int_x^\infty (x'-x)^{\Delta t}e^{-(x'-x)}dx'=\frac{\Gamma(\Delta t+1)}{\Gamma(\Delta t)}$$

が x に依存しないので,ドリフト速度 a が存在するとしてもそれは Δt のみに依存する.同じことが拡散係数 D についてもいえる.

$\Delta x=x'-x>0$ において

$$\mathcal{G}(t',x'|t,x)=\frac{f(\Delta t,\Delta x)}{\Gamma(\Delta t)}\quad \bigl(f(t,x)=x^{t-1}e^{-x}\bigr)$$

を t や x で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}&=f(\Delta t,\Delta x)\Bigl\{-\frac{1}{\Gamma(\Delta t)}\log(x'-x)+\frac{\Gamma'(\Delta t)}{\Gamma(\Delta t)^2}\Bigr\},\\
\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}&=f(\Delta t,\Delta x)\Bigl\{-\frac{\Delta t-1}{\Gamma(\Delta t)}\frac{1}{x'-x}+\frac{1}{\Gamma(\Delta t)}\Bigr\},\\
\frac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial x^2}&=f(\Delta t,\Delta x)\Bigl\{\frac{(\Delta t-1)(\Delta t-2)}{\Gamma(\Delta t)}\frac{1}{(x'-x)^2}-2\frac{\Delta t-1}{\Gamma(\Delta t)}\frac{1}{x'-x}+\frac{1}{\Gamma(\Delta t)}\Bigr\}
\end{aligned}$$

となる.右辺の 3 つの関数は x の関数として線形独立なので (2.53) をみたす $a(\Delta t)$ と $D(\Delta t)$ の組は存在しない.

問題 2.3 この場合の Chapman の方程式は,k,l などを 0 以上の整数として

$$\mathcal{G}(t'',k''|t,k)=\sum_{k'=0}^\infty \mathcal{G}(t'',k''|t',k')\mathcal{G}(t',k'|t,k) \tag{2}$$

である.

Poisson 過程

$$\mathcal{G}(t,k|s,l)=\begin{cases}\dfrac{\{\lambda(t-s)\}^{k-l}}{(k-l)!}e^{-\lambda(t-s)} & (k\geqq l)\\ 0 & (k<l)\end{cases}$$

の場合,

$$\{(2)\ \text{の右辺}\}=e^{-\lambda(t''-t)}\lambda^{k''-k}\sum_{k'=k}^{k''}\frac{(t''-t')^{k''-k'}(t'-t)^{k'-k}}{(k''-k')!\,(k'-k)!}$$

において $k'-k=l$ と置き換えると,右辺の和が 2 項定理より

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{k''-k}\frac{(t''-t')^{k''-k-l}(t'-t)^l}{(k''-k-l)!\ l!}\\
&=\frac{1}{(k''-k)!}\bigl\{(t''-t')+(t'-t)\bigr\}^{k''-k}=\frac{(t''-t)^{k''-k}}{(k''-k)!}
\end{aligned}$$

となって,Chapman の方程式をみたすことが導かれる.

問題 2.4 $0<t_1<\cdots<t_n$ のとき $0<c^2/t_n<\cdots<c^2/t_1$ が成り立つことに注意して (2.60) を用

いると

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\bigcap_{1\leqq k\leqq n}\{a_k\leqq X_{t_k}<b_k\}\Big)\\
&=\int_{a_nc/t_n}^{b_nc/t_n}\cdots\int_{a_1c/t_1}^{b_1c/t_1}\prod_{k=1}^{n}\mathcal{G}\Big(\frac{c^2}{t_k},\xi_k\,\Big|\,\frac{c^2}{t_{k+1}},\xi_{k+1}\Big)d\xi_n\cdots d\xi_1\,.
\end{aligned}
$$

ただし，$t_{n+1}=\infty$，$\xi_{n+1}=0$ とする．$(t_k/c)\xi_k=\eta_k$ と置換すると，右辺は

$$
\int_{a_n}^{b_n}\cdots\int_{a_1}^{b_1}\Big\{\prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{t_kt_{k+1}}}{\sqrt{4\pi D(t_{k+1}-t_k)}}\Big\}\exp\Big[-\sum_{k=1}^{n}\frac{(t_{k+1}\eta_k-t_k\eta_{k+1})^2}{4Dt_kt_{k+1}(t_{k+1}-t_k)}\Big]\prod_{k=1}^{n}\frac{d\eta_k}{t_k}
$$

となる．ただし $k=n$ の部分は $t_{n+1}=\infty$ より

$$
\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt_n}}\exp\Big[-\frac{\eta_n^2}{4Dt_n}\Big]d\eta_n
$$

である．

指数関数に掛かっている因数を計算すると，$t_0=0$ として，

$$
\Big\{\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{t_kt_{k+1}}}{\sqrt{4\pi D(t_{k+1}-t_k)}}\frac{1}{t_k}\Big\}\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt_n}}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_{k+1}-t_k)}}
$$

となる．

exp の中を計算すると，$t_0=0,\ \eta_0=0$ の約束の下で，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}\Big\{-\frac{(\eta_{k+1}-\eta_k)^2}{4D(t_{k+1}-t_k)}+\frac{\eta_{k+1}^2}{4Dt_{k+1}}-\frac{\eta_k^2}{4Dt_k}\Big\}-\frac{\eta_n^2}{4Dt_n}\\
&=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\eta_{k+1}-\eta_k)^2}{4D(t_{k+1}-t_k)}-\frac{\eta_1^2}{4Dt_1}=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\eta_{k+1}-\eta_k)^2}{4D(t_{k+1}-t_k)}
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\bigcap_{1\leqq k\leqq n}\{a_k\leqq X_{t_k}<b_k\}\Big)\\
&=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\prod_{k=0}^{n-1}\Big\{\frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_{k+1}-t_k)}}\exp\Big[-\frac{(\eta_{k+1}-\eta_k)^2}{4D(t_{k+1}-t_k)}\Big]\Big\}d\eta_1\cdots\eta_n
\end{aligned}
$$

となって，$X(t)=(t/c)B(c^2/t)$ の結合分布は Brown 運動 $B(t)$ のそれと一致する．

問題 2.5 ヒントの

$$
\frac{d}{da}\{h_\lambda(a)-g(a)\}\lesseqgtr\frac{a}{\sigma^2}\{h_\lambda(a)-g(a)\}
$$

までは簡単な計算である．

$$
k(a)=\exp\Big[-\frac{a^2}{2\sigma^2}\Big]\{h_\lambda(a)-g(a)\}
$$

とおくと，$dk(a)/da\lesseqgtr 0$ となるので，$\lambda=2\sigma^2$ のとき $k(a)$ は減少関数，$\lambda=4\sigma^2$ のとき増加関数である．

$h_\lambda(a)\to 0\ \ (a\to\infty)$ と

$$
e^{-a^2/(2\sigma^2)}g(a)=\int_a^\infty e^{-\xi^2/(2\sigma)^2}d\xi\to 0\quad(a\to\infty)
$$

より

$$
\lim_{a\to\infty}k(a)=0
$$

なので，

$$
h_{4\sigma^2}(a)<g(a)<h_{2\sigma^2}(a)
$$

が成り立つ．これが証明すべき不等式である．

問題 2.6

$$\frac{\sigma^2}{a^2} \quad と \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4\sigma}{\sqrt{a^2+2\sigma^2}+a}\exp\Big[-\frac{a^2}{2\sigma^2}\Big]$$

を比べるわけで，$a/\sigma = t$ とおくと

$$f_1(t) = \frac{1}{t^2} \quad と \quad f_2(t) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{t^2+2}+t}\exp\Big[-\frac{t^2}{2}\Big]$$

を比べることになる．$x > 0$ に対して

$$e^{-x} < \frac{1}{1+x}$$

が成り立つので

$$f_2(t) < \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{t^2+2}+t}\,\frac{2}{t^2+2} < 1.6 \times \frac{1}{2t}\,\frac{2}{t^2+2} < \frac{1}{t^2} = f_1(t)$$

より $f_2(t) < f_1(t)$ である．

（注）t が大きいとき，不等式 $e^{-t} < 1/(1+t)$ の左辺は右辺に比べて桁外れに小さいので，$f_2(t)$ も $f_1(t)$ に対してそうである．

問題 2.7 $\xi/\sigma = u$ と置換して部分積分をくり返す．$a/\sigma = a'$ とおく．$1/\sqrt{2\pi}$ は共通なので省略すると，中央の積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_{a'}^{\infty} e^{-u^2/2}du = \int_{a'}^{\infty}\frac{-1}{u}\frac{d}{du}e^{-u^2/2}du \\ &= \frac{1}{a'}e^{-a'^2/2} - \int_{a'}^{\infty}\frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}du \end{aligned} \tag{3}$$

となる．最後の積分を

$$\int_{a'}^{\infty}\frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}du = \int_{a'}^{\infty}\frac{-1}{u^3}\frac{d}{du}e^{-u^2/2}du$$

とみて，再度部分積分すると

$$I = \Big(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a'^3}\Big)e^{-a'^2/2} + \int_{a'}^{\infty}\frac{3}{u^4}e^{-u^2/2}du\,. \tag{4}$$

(3) と (4) によって，証明すべき不等式が $n = 0$ の場合に成り立つことが分かる．

以下，同様の計算をくり返せば求める不等式が得られる．

問題 2.8 n に関する数学的帰納法により，$x > 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}x^k < e^{-x} < \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$$

が証明できるので，$x = u^2/2$ を代入して，0 から a/σ まで u で積分すると示すべき不等式が得られる．

問題 2.9 Gauss 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-ax^2]dx = \sqrt{\pi}a^{-1/2}$$

の両辺を a で n 回微分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}\exp[-ax^2]dx = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}a^{-(2n+1)/2}$$

となる．これを

$$\begin{aligned} \Big\langle\big\{B(t') - B(t)\big\}^{2n}\Big\rangle_{平均} &= \langle B(t'-t)^{2n}\rangle_{平均} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\sqrt{4\pi D(t'-t)}}\exp\Big[-\frac{x^2}{4D(t'-t)}\Big]dx \end{aligned}$$

に用いると，求める式が得られる．

次のような計算もできる：Gauss 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ax^2 + bx]dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} e^{b^2/(4a)} \quad (\mathrm{Re}\, a > 0)$$

を用いると

$$E\big(e^{ipB_t}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\Big[-\frac{x^2}{4Dt} + ipx\Big]dx = e^{-Dtp^2}$$

が成り立つ．この最右辺と最左辺を p に関してベキ展開すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} E\big(B_t^{2n}\big)p^{2n} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} E\big(B_t^{2n-1}\big)p^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Dt)^n}{n!} p^{2n}$$

なので，両辺の p の $2n$ 乗の係数を比較すると，同じ結論が得られる．

問題 2.10　簡単のために $D = 1/2$, $0 = t_0 < \cdots < t_n$ とする．$1/(t_k - t_{k-1}) = \alpha_k$ とおくとき，

$$V = V_n = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & \cdots\cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots\cdots & t_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ t_1 & t_2 & \cdots\cdots & t_n \end{pmatrix}$$

の逆行列が

$$W_n = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & -\alpha_2 & & & & & \\ -\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & -\alpha_3 & & & & \\ & -\alpha_3 & \alpha_3+\alpha_4 & -\alpha_4 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & -\alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}+\alpha_n & -\alpha_n \\ & & & & -\alpha_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

であることは容易に確認できる．ただし右辺は 0 でない成分のみを記した．

W_n の第 n 行を第 $n-1$ 行に加えた後，第 n 列で展開すると

$$\det W_n = \begin{vmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & -\alpha_2 & & & & & \\ -\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & -\alpha_3 & & & & \\ & -\alpha_3 & \alpha_3+\alpha_4 & -\alpha_4 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & -\alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & 0 \\ & & & & -\alpha_n & \alpha_n \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_n \det W_{n-1}$$

となる．これをくり返すと $\det W_n = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ となるので，

$$\det V_n = \prod_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k) \quad (t_0 = 0)\,.$$

(2.77) の指数部分の $xW_n{}^t x$ について，W_n の対角成分から

$$(\alpha_1+\alpha_2)x_1^2 + \cdots + (\alpha_{n-1}+\alpha_n)x_{n-1}^2 + \alpha_n x_n^2$$

が出てくる．$(i, i+1)$ 成分と $(i+1, i)$ 成分からは，ともに同じ

$$-(\alpha_2 x_1 x_2 + \cdots + \alpha_n x_{n-1} x_n)$$

が出てくるので，これらを加え合わせると

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2(x_2 - x_1)^2 + \cdots + \alpha_n(x_n - x_{n-1})^2\,.$$

これらを (2.77) に代入した式が (2.78) である．

問題 2.11　指数部分だけを取り出して y に関して平方完成すると

$$-\frac{(x-y)^2}{2v_1} - \frac{(y-z)^2}{2v_2} = -\frac{v_1+v_2}{2v_1v_2}\Big(y - \frac{v_2x + v_1z}{v_1+v_2}\Big)^2 - \frac{(x-z)^2}{2(v_1+v_2)}$$

となり，指数関数に掛かっている因数の部分も

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v_1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi v_2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(v_1+v_2)}}\sqrt{\frac{v_1+v_2}{2\pi v_1 v_2}}$$

となるので (2.83) が成り立つ．それを y で積分すると (2.84) が得られる．

問題 2.12　(2.107) とその中の t を t' に置き換えた式の積をつくったとき，a_0, a_n, b_n は互いに独立なので，積の平均が零でないのは $\langle a_0^2\rangle$ と $n \geqq 1$ に対する $\langle a_n^2\rangle$, $\langle b_n^2\rangle$ のみである．したがって

$$\big\langle X(t)X(t')\big\rangle = \frac{2}{T}\left[\frac{tt'}{2}\langle a_0^2\rangle + \frac{T^2}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\langle a_n^2\rangle\frac{1}{n^2}\sin\frac{2\pi n}{T}t\sin\frac{2\pi n}{T}t' \right.$$
$$\left. + \frac{T^2}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\langle b_n^2\rangle\frac{1}{n^2}\Big(1-\cos\frac{2\pi n}{T}t\Big)\Big(1-\cos\frac{2\pi n}{T}t'\Big)\right].$$

右辺に

$$\langle a_0^2\rangle = \langle a_n^2\rangle = \langle b_n^2\rangle = 2D$$

を代入して整理すると

$$\big\langle X(t)X(t')\big\rangle$$
$$= \frac{2Dtt'}{T} + \frac{DT}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\cos\frac{2\pi n}{T}(t-t') - \cos\frac{2\pi n}{T}t - \cos\frac{2\pi n}{T}t' + 1\Big).$$

この右辺に，岩波数学公式 II の p.39 と p.73 にある

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad と \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

を代入して整理すると

$$\big\langle X(t)X(t')\big\rangle = D\big(t+t'-|t-t'|\big) = 2D\,(t\wedge t')$$

が得られる．

問題 2.13　(2.114) において $a = s$, $x_a = X(s)$ とおくと，$(s, X(s))$ と (b, x_b) にピン止めされたときの $(X(t)-X(s))^2$ の平均値は，$X(s) = y$ として

$$\frac{(t-s)^2}{(b-s)^2}(x_b-y)^2 + 2D(t-s)\Big(1-\frac{t-s}{b-s}\Big).$$

これに (2.112) の

$$P_{\rm pin}\Big(X(s)=y\Big) = u\big(y-l(s),\, v(s)\big)$$

をかけて，y で積分する．

$$(x_b-y)^2 = \{x_b-l(s)\}^2 - 2\{x_b-l(s)\}\{y-l(s)\} + \{y-l(s)\}^2$$

に $u(y-l(s),\, v(s))$ をかけて y で積分すると

$$\{x_b-l(s)\}^2 + v(s)$$

となる．これを I で表すと

$$\Big\langle\big\{X(t)-X(s)\big\}^2\Big\rangle_{\rm pin} = \frac{(t-s)^2}{(b-s)^2}I + 2D(t-s)\Big(1-\frac{t-s}{b-s}\Big)$$

となり，右辺を整理すると目標の式が得られる．

問題 2.14　第 2 項の積分で $2a-x \to x$ の置換をすると

$$\int_{-\infty}^{a}\phi(t, 2a-x)dx = \int_{a}^{\infty}\phi(t,x)dx$$

となる．これを第 1 項の積分と合わせると $\phi(x,t)$ の全域での積分となるので確かに規格化されている．

問題 2.15　(i) Cauchy 分布，(ii) Poisson 分布，に分けて解答する．

(i) Cauchy 分布

$$\mu(x) = \frac{a}{\pi\{x^2 + a^2\}} \quad (a > 0)$$

の安定性について，

$$\mu_1(x) = \frac{1}{\sigma_1}\mu\Big(\frac{x}{\sigma_1}\Big), \quad \mu_2(x) = \frac{1}{\sigma_2}\mu\Big(\frac{x}{\sigma_2}\Big)$$

に (2.136) を用いると

$$\begin{aligned}\mu_1 * \mu_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1 a}{\pi\{(x-y)^2 + (\sigma_1 a)^2\}} \frac{\sigma_2 a}{\pi\{y^2 + (\sigma_2 a)^2\}} dy \\ &= \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)a}{\pi\{x^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 a^2\}} = \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2}\mu\Big(\frac{x}{\sigma_1 + \sigma_2}\Big)\end{aligned}$$

となって，安定性が導かれる．

(ii) 平均と分散がともに λ の Poisson 分布

$$\mu(n; \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

の場合，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} \mu(n-k; \lambda)\mu(k; \sigma) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda} \frac{\sigma^k}{k!} e^{-\sigma} = e^{-(\lambda+\sigma)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{n-k}\sigma^k}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{(\lambda + \sigma)^n}{n!} e^{-(\lambda+\sigma)} = \mu(n; \lambda + \sigma)\end{aligned} \tag{5}$$

となって，確かにたたみこみに関して閉じている．そしてそのことが，Poisson 過程に対する経路空間上の測度を構成する際に必要な，経路の束の確率の間の整合性を保証する．

それにもかかわらず，Poisson 分布は安定ではない．μ_1, μ_2 が (2.150) の $\lambda = 1$ という最も簡単な場合として，ともに $\mu(n; \sigma)$ に同型，つまり

$$\mu_1(n) = \mu_2(n) = \mu(n; \sigma)$$

であるとしても，そのたたみこみを $\mu_3(n)$ とするとき，これは $\mu(n; \sigma)$ と同型にならない．実際，(5) より

$$\mu_3(n) = \frac{(2\sigma)^n}{n!} e^{-2\sigma}$$

だが，$\lambda > 0$ をどのように選んでもこれがすべての $n = 0, 1, \cdots$ に対して

$$\lambda\, \mu(\lambda n; \sigma) = \lambda \frac{\sigma^{\lambda n}}{(\lambda n)!} e^{-\sigma}$$

と等しくなることは，ありえない（λn が整数でない場合，その階乗をガンマ関数で解釈する）．

問題 2.16 $\rho \sim \mu$ より $\rho(x)dx = \mu(\lambda x)\lambda dx$ とおけるので，$\lambda x = y$ と置換すると

$$\varphi_\rho(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \mu(\lambda x)\lambda dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z/\lambda)y} \mu(y) dy = \varphi_\mu(z/\lambda)\,.$$

問題の後半部分の成立は，この式と合成積（たたみこみ）の Fourier 変換が Fourier 変換の積になることから明らかである．

3

問題 3.1 積分計算をすると

$$E\big(|\Delta B_{t_k}|\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\sqrt{4\pi D \Delta t_k}} \exp\Big[-\frac{x^2}{4D\Delta t_k}\Big] dx$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{4\pi D\mathit{\Delta} t_k}} \exp\Big[-\frac{x^2}{4D\mathit{\Delta} t_k}\Big]dx = \frac{\sqrt{4D\mathit{\Delta} t_k}}{\sqrt{\pi}}\,.$$

特に区間 $[0,\,t]$ を n 等分したとき $\mathit{\Delta} t_k = t/n$ なので

$$E\big(M_{\mathit{\Delta}_n}(\omega)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} E\big(\,|\mathit{\Delta} B_{t_k}|\,\big) = \frac{\sqrt{4Dt}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \to \infty \quad (n\to\infty)\,.$$

これは Brown 運動の平均全変動が無限大であることを意味している．

（注）平均全変動の定義において，期待値 E をとらない

$$\sup_{\mathit{\Delta}_n} \sum_{k=0}^{n-1} \big|X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega)\big| \quad （\mathit{\Delta}_n \text{ は区間 } [0,\,t] \text{ の分割}）$$

を全変動過程といい，以下のように，問題 3.1 の結果よりももっと強いことが成り立つ：

“区間 $[0,\,t]$ を n 等分割して $\mathit{\Delta} t_k = t/n$,（$k=0,\cdots,n$）としたとき，確率変数

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\big|B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)\big|$$

は $n\to\infty$ で定数 $v>0$ に確率収束する．さらに精密には，確率変数

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big|B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)\big| - \sqrt{n}v$$

はある Gauss 型確率変数に法則収束する（参考文献 [53] p.33 参照）．”

問題 3.2

$$\Big\{\sum_{j=0}^{n-1}\big(\mathit{\Delta} B_{t_j}\big)^2 - 2Dt\Big\}^2 = \sum_{j,k=0}^{n-1}\big\{(\mathit{\Delta} B_{t_j})^2 - 2D\mathit{\Delta} t_j\big\}\big\{(\mathit{\Delta} B_{t_k})^2 - 2D\mathit{\Delta} t_k\big\}$$

の右辺について，$j\neq k$ のとき

$$(\mathit{\Delta} B_{t_j})^2 - 2D\mathit{\Delta} t_j \quad と \quad (\mathit{\Delta} B_{t_k})^2 - 2D\mathit{\Delta} t_k$$

が独立なので，両辺の期待値をとると，積の期待値 $=$ 期待値の積 $=0$ より $j=k$ のみが残って，

$$E\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\big\{(\mathit{\Delta} B_{t_j})^2 - 2D\mathit{\Delta} t_j\big\}^2\Big)$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} E\Big(\big(\mathit{\Delta} B_{t_j}\big)^4 - 4D\mathit{\Delta} t_j\big(\mathit{\Delta} B_{t_j}\big)^2 + 4D^2\big(\mathit{\Delta} t_j\big)^2\Big)$$

となる．問題 2.9 で導いた等式

$$E\Big(\big(\mathit{\Delta} B_{t_j}\big)^{2n}\Big) = (2n-1)!!\,\big(2D\mathit{\Delta} t_j\big)^n$$

と，$\max\{\mathit{\Delta} t_j \mid 0\leqq j\leqq n-1\} = |\mathit{\Delta}_n|$ とおくとき

$$\sum_{j=0}^{n-1}\big(\mathit{\Delta} t_j\big)^2 \leqq |\mathit{\Delta}_n|\sum_{j=0}^{n-1}\mathit{\Delta} t_j = t\,|\mathit{\Delta}_n| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つことを用いると，

$$E\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\big\{(\mathit{\Delta} B_{t_j})^2 - 2D\mathit{\Delta} t_j\big\}^2\Big)$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}\Big\{12D^2\big(\mathit{\Delta} t_j\big)^2 - 8D^2\big(\mathit{\Delta} t_j\big)^2 + 4D^2\big(\mathit{\Delta} t_j\big)^2\Big\} = 8D^2\sum_{j=0}^{n-1}\big(\mathit{\Delta} t_j\big)^2 \to 0$$

となる．これは $X_n(t,\omega)$ が $L^2(\mathit{\Omega},P)$ の意味で $2Dt$ に収束することを意味している．

問題 3.3 被積分関数 $f(s,\omega) = B_s(\omega)^2$ の単関数近似として

$$\phi_n(s,\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j}(\omega)^2\,\chi_{[t_j,t_{j+1})}(s)$$

をとると

$$E\Big(\int_0^t \big(\phi_n(s)-B_s^2\big)^2 ds\Big)=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} E\big((B_{t_j}^2-B_s^2)^2\big)ds\,.$$

右辺について

$$(B_{t_j}^2-B_s^2)^2=(B_s-B_{t_j})^4+4B_{t_j}(B_s-B_{t_j})^3+4B_{t_j}^2(B_s-B_{t_j})^2$$

と変形して期待値 E をとると，B_{t_j} と $B_s-B_{t_j}$ の独立性より右辺の第 2 項は 0，残りは

$$E\big((B_s-B_{t_j})^4\big)=12D^2(s-t_j)^2\,,$$

$$E\big(B_{t_j}^2(B_s-B_{t_j})^2\big)=E(B_{t_j}^2)E\big((B_s-B_{t_j})^2\big)=4D^2t_j(s-t_j)\,.$$

したがって

$$\begin{aligned}&E\Big(\int_0^t \big(\phi_n(s)-B_s^2\big)^2 ds\Big)\\&=12D^2\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)^2ds+16D^2\sum_{j=0}^{n-1}t_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)ds\\&=4D^2\sum_{j=0}^{n-1}(\Delta t_j)^3+8D^2\sum_{j=0}^{n-1}t_j(\Delta t_j)^2\to 0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

となり，近似の条件 (3.18) はみたされる．

伊藤積分の定義から

$$\int_0^t B_s^2 dB_s=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}B_{t_j}^2\Delta B_{t_j}\,.$$

右辺について

$$B_{t_j}^2\Delta B_{t_j}=\frac{1}{3}\Delta\big\{B_{t_j}^3\big\}-\frac{1}{3}(\Delta B_{t_j})^3-B_{t_j}(\Delta B_{t_j})^2$$

の第 1 項の和は $(1/3)B_t^3$ を与える．第 2 項の和は

$$\begin{aligned}E\big((\text{第 2 項の和})^2\big)&=\frac{1}{9}E\Big(\sum_{i,j}(\Delta B_{t_i})^3(\Delta B_{t_j})^3\Big)=\frac{1}{9}E\Big(\sum_j(\Delta B_{t_j})^6\Big)\\&=\frac{1}{9}\sum_j 5!!(2D\Delta t_j)^3\to 0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

となって消える．第 3 項の和が (3.25) の最後の s 積分を与えるはずである．実際，

$$\begin{aligned}&E\Big(\Big\{\text{ 第 3 項の和}-2D\sum_j B_{t_j}\Delta t_j\Big\}^2\Big)\\&=\sum_{k,l}E\Big(B_{t_k}\big\{(\Delta B_{t_k})^2-2D\Delta t_k\big\}B_{t_l}\big\{(\Delta B_{t_l})^2-2D\Delta t_l\big\}\Big)\end{aligned}$$

について，$k\neq l$ に対しては独立性から，積の平均＝平均の積$=0$ となって消える．

$k=l$ に対しても

$$\begin{aligned}&E\Big(\big\{(\Delta B_{t_k})^2-2D\Delta t_k\big\}^2\Big)\\&=E\big((\Delta B_{t_k})^4\big)-4D\Delta t_k E\big((\Delta B_{t_k})^2\big)+(2D\Delta t_k)^2=8D^2(\Delta t_k)^2\end{aligned}$$

となって，k で和をとって極限をとると消える．こうして $L^2(\Omega,P)$ での収束として

$$\lim_{n\to\infty}(\text{第 3 項の和})=\lim_{n\to\infty}2D\sum_k B_{t_k}\Delta t_k=2D\int_0^t B_s ds$$

となり，(3.25) が得られる．

問題 3.4　$X_t=B_t$，$f(x,t)=x^3/3$ とすると

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=x^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2x$$

なので

$$\frac{1}{3}d(B_s^3)=B_s^2dB_s+2DB_sds\,.$$

この両辺を $s \in [\,0,\,t\,]$ で積分すると (3.25) となる．

問題 3.5 （1）計算例 2 で得られた式

$$\int_0^t B_s ds - tB_t = -\int_0^t s dB_s$$

の右辺に等長定理を用いると

$$\Big\| \int_0^t B_s ds - tB_t \Big\|_2^2 = 2DE\Big(\int_0^t s^2 ds\Big) = \frac{2D}{3} t^3 \,.$$

（2）伊藤の公式より

$$d(t^2 B_t) = 2tB_t dt + t^2 dB_t$$

なので

$$\int_0^t sB_s ds - \frac{1}{2} t^2 B_t = -\int_0^t \frac{1}{2} s^2 dB_s \,.$$

この右辺に等長定理を用いると

$$\Big\| \int_0^t sB_s ds - \frac{1}{2} t^2 B_t \Big\|_2^2 = 2DE\Big(\int_0^t \frac{1}{4} s^4 ds\Big) = \frac{D}{10} t^5 \,.$$

問題 3.6 以下，$s < t$ とする．

（1）等式

$$B_t^2 - 2Dt = (B_s^2 - 2Ds) + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2 - 2D(t-s)$$

の右辺の各項に（P1)〜(P4）を用いると

$$\begin{aligned}
&E\big(\{B_s^2 - 2Ds\} \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = B_s^2 - 2Ds \,,\\
&E\big(2B_s(B_t - B_s) \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = 2B_s E\big(\{B_t - B_s\} \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = 2B_s E(B_t - B_s) = 0 \,,\\
&E\big((B_t - B_s)^2 \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = E\big((B_t - B_s)^2\big) = 2D(t-s)
\end{aligned}$$

となるので，

$$E\big(\{B_t^2 - 2Dt\} \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = B_s^2 - 2Ds$$

が成り立つ．したがって $B_t^2 - 2Dt$ はマルチンゲールである．

（2）（1）と同様に

$$\begin{aligned}
B_t^3 - 6DtB_t = (B_s^3 - 6DsB_s) + 3B_s^2(B_t - B_s) + 3B_s(B_t - B_s)^2\\
+ (B_t - B_s)^3 - 6Dt(B_t - B_s) - 6D(t-s)B_s
\end{aligned}$$

の右辺の各項の条件付き期待値をとると，以下の 3 つの項以外はすべて 0 になって消える．

$$\begin{aligned}
&E\big(\{B_s^3 - 6DsB_s\} \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = B_s^3 - 6DsB_s \,,\\
&E\big(3B_s(B_t - B_s)^2 \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = 3B_s E\big((B_t - B_s)^2 \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = 3B_s E\big((B_t - B_s)^2\big)\\
&\qquad\qquad = 6D(t-s)B_s \,,\\
&E\big(6D(t-s)B_s \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = 6D(t-s)B_s \,.
\end{aligned}$$

これらを代入すると

$$E\big(\{B_t^3 - 6DtB_t\} \,\big|\, \mathfrak{B}_s\big) = B_s^3 - 6DsB_s$$

となるので，$B_t^3 - 6DtB_t$ はマルチンゲールである．

（3）$X_t = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s ds$ とおく．Brown 運動はマルチンゲールなので

$$E\big(B_{s'} | \mathfrak{B}_s\big) = B_s \quad (s' > s) \,, \qquad E\big(B_{s'} | \mathfrak{B}_s\big) = B_{s'} \quad (s' < s)$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
&E\big(t^2 B_t | \mathfrak{B}_s\big) = t^2 B_s \,,\\
&E\Big(\int_0^t s' B_{s'} ds' \,\Big|\, \mathfrak{B}_s\Big) = E\Big(\int_0^s s' B_{s'} ds' \,\Big|\, \mathfrak{B}_s\Big) + E\Big(\int_s^t s' B_{s'} ds' \,\Big|\, \mathfrak{B}_s\Big)
\end{aligned}$$

$$= \int_0^s s' B_{s'} ds' + B_s \int_s^t s' ds' = \int_0^s s' B_{s'} ds' + \frac{1}{2}(t^2 - s^2) B_s$$

となり，

$$E(X_t|\mathfrak{B}_s) = s^2 B_s - 2\int_0^s s' B_{s'} ds' = X_s$$

が成り立つ．したがって X_t はマルチンゲールである．

問題 3.7 問題 2.9 で導いた

$$E\big(B_t^{2k}\big) = \frac{(2k)!}{k!}(Dt)^k$$

を用いると

$$E\big(e^{bB_t}\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!}{k!}(b^2 Dt)^k = e^{b^2 Dt}$$

となるので，

$$E(X_t) = E(X_0)\exp\big[(a - b^2 D)t + b^2 Dt\big] = E(X_0)\, e^{at}\,.$$

問題 3.8 両辺をまず s で微分すると

$$\begin{aligned}\Big\langle dB(s)\, B(s')\Big\rangle &= 2D\theta(s'-s)ds - 2Ds\delta(s'-s)ds + 2Ds'\delta(s-s')ds \\ &= 2D\theta(s'-s)ds\,.\end{aligned}$$

引き続き両辺を s' で微分して

$$\Big\langle dB(s)\, dB(s')\Big\rangle = 2D\delta(s'-s)dsds'\,.$$

問題 3.9 $s_1, \cdots, s_4$ がすべて相異なる場合は $dB(s_k)$ が互いに独立になるので，両辺ともに 0 である．3 つが等しくて 1 つだけ異なる場合や，2 つが等しくて残りの 2 つは異なる場合も，同様に両辺ともに 0 である．また，4 つの時刻がすべて等しいとき両辺ともに $12D^2(ds)^2$ になるので無視できる．

最後に，等しい時刻が $2:2$ に分かれる場合のみ残る．例えば $s_1 = s_2 \neq s_3 = s_4$ の場合，$dB(s_1)dB(s_2)$ と $dB(s_3)dB(s_4)$ は独立なので，

$$\Big\langle dB(s_4)dB(s_3)dB(s_2)dB(s_1)\Big\rangle = \Big\langle dB(s_4)dB(s_3)\Big\rangle\Big\langle dB(s_2)dB(s_1)\Big\rangle$$

が成り立つ．$2:2$ に分かれる他の場合も考慮すると問題文の等式が出来上がる．

$\mu/M = \beta$ を用いて

$$\begin{aligned}\Big\langle v(t,\omega)^4\Big\rangle = \ & v_0^4 e^{-4\beta t} \\ &+ \frac{6v_0^2\alpha^2}{M^2}e^{-2\beta t}\int_0^t\int_0^t e^{-\beta(2t-s_1-s_2)}\Big\langle dB(s_1)dB(s_2)\Big\rangle \\ &+ \frac{\alpha^4}{M^4}\int_0^t\cdots\int_0^t e^{-\beta(4t-s_1-\cdots-s_4)}\Big\langle dB(s_1)\cdots dB(s_4)\Big\rangle\end{aligned}$$

の右辺の積分をそれぞれ I_2，I_4 とおく．問題 3.8 の結果の式

$$\Big\langle dB(s_1)dB(s_2)\Big\rangle = 2D\delta(s_1 - s_2)ds_1 ds_2$$

を用いると，デルタ関数のおかげで積分が簡単になって

$$\begin{aligned}I_2 &= 2D\int_0^t e^{-2\beta(t-s_1)}ds_1 = \frac{MD}{\mu}\big(1 - e^{-2\beta t}\big)\,, \\ I_4 &= 12D^2\int_0^t\int_0^t e^{-\beta(4t-2s_1-2s_3)}ds_1 ds_3 = \frac{3M^2D^2}{\mu^2}\big(1-e^{-2\beta t}\big)^2\,.\end{aligned}$$

これらと $D\alpha^2 = \mu k_{\mathrm{B}}T$ を代入して

$$\Big\langle v(t,\omega)^4\Big\rangle = v_0^4 e^{-4\beta t} + 6v_0^2\frac{k_{\mathrm{B}}T}{M}e^{-2\beta t}\big(1-e^{-2\beta t}\big) + 3\frac{k_{\mathrm{B}}^2T^2}{M^2}\big(1-e^{-2\beta t}\big)^2\,. \qquad (6)$$

他方，(3.52) を用いると

$$\left\langle v(t,\omega)^4 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t)} \exp\Big[-\frac{(v-v_0e^{-\beta t})^2}{2\sigma_v(t)^2}\Big] dv$$

となる．ここに

$$\sigma_v(t)^2 = \frac{k_\mathrm{B}T}{M}(1-e^{-2\beta t})$$

である．$v - v_0 e^{-\beta t} = \sqrt{2}\sigma_v(t)u$ と置換して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^4 e^{-u^2} du = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

を用いて計算すると，(6) と同じ式が得られる．

4

問題 4.1 伊藤の公式

$$dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial x} dx + D\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} dt$$

の両辺を積分すると

$$\begin{aligned}&\int_0^T \alpha\big(t, X(t,\omega)\big) dX(t,\omega) \\ &= A\big(T, X(T,\omega)\big) - A\big(0, X(0,\omega)\big) - \int_0^T \Big\{\frac{\partial A}{\partial t} + D\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\Big\} dt\end{aligned}$$

となる．これを (4.5) の右辺に適用すると確かに (4.7) の右辺に一致する．

問題 4.2 $L = (m/2)\dot{x}^2$ より Euler–Lagrange 方程式は $d(m\dot{x})/dt = 0$ となって，古典経路は等速直線運動

$$x_{cl}(t) = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a}(t - t_a) + x_a$$

となる．したがって

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} \frac{(x_b-x_a)^2}{(t_b-t_a)^2} dt = \frac{m}{2} \frac{(x_b-x_a)^2}{t_b - t_a}\,.$$

問題 4.3 $L = (m/2)(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ なので．Euler–Lagrange 方程式は $\ddot{x} = -\omega^2 x$ となる．端点の条件 $x(t_a) = x_a$，$x(t_b) = x_b$ も考慮すると

$$x_{cl}(t) = \frac{1}{\sin\omega T}\big\{x_b \sin\omega(t-t_a) - x_a \sin\omega(t-t_b)\big\} \qquad (T = t_b - t_a)\,.$$

したがって

$$\begin{aligned}S_{cl} &= \frac{m\omega^2}{2\sin^2\omega T} \int_{t_a}^{t_b} \Big[\big\{x_b\cos\omega(t-t_a) - x_a\cos\omega(t-t_b)\big\}^2 \\ &\qquad - \big\{x_b\sin\omega(t-t_a) - x_a\sin\omega(t-t_b)\big\}^2\Big] dt \\ &= \frac{m\omega^2}{2\sin^2\omega T} \int_{t_a}^{t_b} \Big[x_a^2\cos 2\omega(t-t_b) + x_b^2\cos 2\omega(t-t_a) \\ &\qquad - 2x_a x_b \cos\omega(2t - t_a - t_b)\Big] dt\,.\end{aligned}$$

積分を実行して

$$\begin{aligned}S_{cl} &= \frac{m\omega^2}{2\sin^2\omega T}\frac{1}{2\omega}\big\{x_a^2\sin 2\omega T + x_b^2 \sin 2\omega T - 4x_a x_b \sin\omega T\big\} \\ &= \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\big\{(x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\big\}\,.\end{aligned}$$

問題 4.4 自由粒子すなわち $L = m\dot{x}^2/2$ の場合，(4.31) より

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial x_a} = -m\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} = -p(t_a)\,, \quad \frac{\partial S_{cl}}{\partial t_b} = -\frac{m}{2}\frac{(x_b - x_a)^2}{(t_b - t_a)^2} = -E(t_b)$$

となって，確かに (4.33) と (4.34) が成り立つ．

調和振動子すなわち $L = m(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)/2$ の場合，(4.32) より

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial x_a} = \frac{m\omega}{\sin\omega T}(x_a \cos\omega T - x_b)$$

であり，

$$\begin{aligned} p(t_a) = m\dot{x}(t_a) &= \frac{m\omega}{\sin\omega T}\bigl\{x_b \cos\omega(t - t_a) - x_a \cos\omega(t - t_b)\bigr\}\Big|_{t=t_a} \\ &= \frac{m\omega}{\sin\omega T}(x_b - x_a \cos\omega T) \end{aligned}$$

なので (4.33) が成り立つ．(4.34) についても

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial t_b} = \frac{m\omega^2}{2\sin^2\omega T}\bigl\{-(x_a^2 + x_b^2) + 2x_a x_b \cos\omega T\bigr\}$$

と

$$\begin{aligned} E(t_b) &= (p\dot{x} - L)\Big|_{t=t_b} \\ &= \frac{m\omega^2}{\sin^2\omega T}(x_b \cos\omega T - x_a)^2 - \frac{m}{2}\bigl\{\dot{x}(t_b)^2 - \omega^2 x_b^2\bigr\} \\ &= \frac{m\omega^2}{2\sin^2\omega T}\bigl\{(x_a^2 + x_b^2) - 2x_a x_b \cos\omega T\bigr\} \end{aligned}$$

より確かに成り立つ．

問題 4.5 最初に，(4.49) に入っている A の個数 N が積分変数の個数 $N-1$ よりも 1 個多いことを注意しておく．そのことを利用して，本論では x_1 積分の際に $1/A$ を 2 個用いることができた．

x_1, $\cdots$, x_{k-1} 積分の結果

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(k\varepsilon)}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar(k\varepsilon)}(x_k - x_0)^2\right] \tag{7}$$

となったと仮定する．これに

$$\frac{1}{A}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(x_{k+1} - x_k)^2\right]$$

を掛けて x_k 積分をする．その被積分関数の exp の中だけを書き出すと

$$\begin{aligned} &\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left\{\frac{k+1}{k}x_k^2 - 2\left(\frac{x_0}{k} + x_{k+1}\right)x_k + \frac{x_0^2}{k} + x_{k+1}^2\right\} \\ &= \frac{im(k+1)}{2\hbar(k\varepsilon)}\left(x_k - \frac{x_0 + kx_{k+1}}{k+1}\right)^2 + \frac{im}{2\hbar(k+1)\varepsilon}(x_{k+1} - x_0)^2 \end{aligned}$$

となる．これを e の肩に乗せて x_k で積分すると

$$\left(\frac{2\pi i\hbar(k\varepsilon)}{m(k+1)}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar(k+1)\varepsilon}(x_{k+1} - x_0)^2\right].$$

これに x_{k-1} 積分までで得ていた因数

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(k\varepsilon)}\right)^{1/2} \quad と \quad \frac{1}{A} = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}$$

を掛けると

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(k+1)\varepsilon}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar(k+1)\varepsilon}(x_{k+1} - x_0)^2\right]$$

となって，(7) の k を $k+1$ に置き換えた式に一致する．

以上を帰納的に繰り返すことで (4.50) が得られる．

問題 4.6 運動量 $\widehat{p}$ について，(4.53) より

$$\widehat{p}\,\psi(t, x) = -i\hbar\frac{\partial\psi(t, x)}{\partial x} = C\int_{-\infty}^{\infty} \hbar k e^{i(kx - \omega_k t)} e^{\phi(k)} dk$$

なので，

$$\overline{p} = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' (\hbar k) e^{-i(k'x-\omega_{k'}t)} e^{i(kx-\omega_k t)} e^{\phi(k')} e^{\phi(k)} .$$

x 積分を先にすると，$2\pi\delta(k'-k)$ となるので k' 積分もすぐにできて

$$\overline{p} = C^2 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-2\alpha(k-\overline{k})^2} dk . \tag{8}$$

$k - \overline{k} = u$ と置換すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} k e^{-2\alpha(k-\overline{k})^2} dk = \overline{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha u^2} du = \overline{k} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

となるので，(8) に代入して整理すると (4.56) となる．

エネルギーの場合は

$$\widehat{E}\psi(t,x) = i\hbar \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = C \int_{-\infty}^{\infty} \hbar\omega_k e^{i(kx-\omega_k t)} e^{\phi(k)} dk \quad \Bigl(\omega_k = \frac{\hbar k^2}{2m}\Bigr)$$

なので，(8) に相当する式が

$$\overline{E} = C^2 \frac{\pi\hbar^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-2\alpha(k-\overline{k})^2} dk$$

となる．$k - \overline{k} = u$ と置換して

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-2\alpha(k-\overline{k})^2} dk = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + 2\overline{k}u + \overline{k}^2) e^{-2\alpha u^2} du$$

を計算すると (4.57) が得られる．

問題 4.7 固有関数であることの計算では規格化因数 $\{\alpha/(2^n n! \sqrt{\pi})\}^{1/2}$ を無視する．Leibniz の法則を用いて

$$\frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} = (\alpha^4 x^2 - \alpha^2) e^{-(\alpha x)^2/2} H_n(\alpha x) + 2(-\alpha^3 x) e^{-(\alpha x)^2/2} H_n'(\alpha x) + \alpha^2 e^{-(\alpha x)^2/2} H_n''(\alpha x) .$$

右辺に Hermite の微分方程式

$$H_n''(\alpha x) = 2\alpha x H_n'(\alpha x) - 2n H_n(\alpha x) \quad と \quad \alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$$

を代入すると

$$\frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} = \frac{m\omega}{\hbar} \Bigl(\frac{m\omega}{\hbar} x^2 - 2n - 1 \Bigr) u_n(x) .$$

$-\hbar^2/(2m)$ をかけて

$$\frac{\widehat{p}^2}{2m} u_n(x) = \Bigl\{ -\frac{m\omega^2}{2} x^2 + \Bigl(n + \frac{1}{2}\Bigr)\hbar\omega \Bigr\} u_n(x) .$$

この両辺に $V(x)u_n(x) = (m/2)\omega^2 x^2 u_n(x)$ を加えると目的の式になる．

後半について，$\alpha x = \xi$ と変換すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\alpha x)^2 e^{-(\alpha x)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) \Bigl(-\frac{d}{d\xi} \Bigr)^n e^{-\xi^2} \frac{d\xi}{\alpha} .$$

右辺で部分積分を n 回繰り返すと

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\alpha x)^2 e^{-(\alpha x)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \frac{d\xi}{\alpha} .$$

$H_n(\xi)$ は最高次の係数が 2^n の n 次式なので，この右辺の値は $2^n n! \sqrt{\pi}/\alpha$ である．したがって $\bigl\| u_n(x) \bigr\|_2 = 1$ が成り立つ．

問題 4.8 $ct = x_0$，$mc/\hbar = \kappa$，$\{x_0^2 - (x-y)^2\}^{1/2} = \xi$ と書く．$x_0 > |x-y|$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_0} J_0(\kappa\xi) = \frac{\kappa x_0}{\xi} J_0'(\kappa\xi) \tag{9}$$

をもう一度微分すると

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} J_0(\kappa\xi) = \frac{-\kappa(x-y)^2}{\xi^3} J_0'(\kappa\xi) + \frac{\kappa^2 x_0^2}{\xi^2} J_0''(\kappa\xi) .$$

x で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x}J_0(\kappa\xi)=\frac{-\kappa(x-y)}{\xi}J_0'(\kappa\xi) \tag{10}$$

より

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}J_0(\kappa\xi)=\frac{-\kappa x_0^2}{\xi^3}J_0'(\kappa\xi)+\frac{\kappa^2(x-y)^2}{\xi^2}J_0''(\kappa\xi)$$

となるので，

$$\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\Big)J_0(\kappa\xi)=\frac{\kappa}{\xi}J_0'(\kappa\xi)+\kappa^2 J_0''(\kappa\xi)$$

となる．この右辺の $J_0''(\kappa\xi)$ に 0 次の Bessel 方程式

$$J_0''(\kappa\xi)=-\frac{1}{\kappa\xi}J_0'(\kappa\xi)-J_0(\kappa\xi)$$

を代入すると，$J_0(\kappa\xi)$ に対する Klein–Gordon 方程式

$$\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\kappa^2\Big)J_0(\kappa\xi)=0$$

が得られる．

次に，Dirac 演算子を

$$\widehat{D}=\frac{\partial}{\partial x_0}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}+i\kappa\beta$$

とおき，(4.90) に現れる演算子を

$$\widehat{D}^*=\frac{\partial}{\partial x_0}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}-i\kappa\beta$$

とおくと，

$$\widehat{D}\widehat{D}^*=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\kappa^2\beta^2-i\kappa(\alpha\beta+\beta\alpha)\frac{\partial}{\partial x}$$

となる．この右辺に

$$\alpha^2=\beta^2=1\,,\quad \alpha\beta+\beta\alpha=0$$

を代入すると，$\widehat{D}\widehat{D}^*$ は確かに Klein–Gordon 演算子である．したがって

$$\widehat{D}\{\widehat{D}^*J_0(\kappa\xi)\}=\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\kappa^2\Big)J_0(\kappa\xi)=0$$

となって，(4.90) の $\mathcal{K}_0(t,x\mid 0,y)$ は Dirac 方程式をみたす．

最後に係数 1/2 の意味を考えるために $t\downarrow 0$ すなわち $x_0\downarrow 0$ の極限をとる．このとき

$$J_0(\kappa\xi)\theta\big(x_0-|x-y|\big)$$

の θ 関数のために $x-y\to 0$ したがって $\xi\to 0$ となり，(9) と (10) の右辺は

$$\frac{\kappa x_0}{\xi}J_0'(\kappa\xi)=-\frac{\kappa x_0}{\xi}J_1(\kappa\xi)\simeq-\frac{\kappa x_0}{\xi}\frac{\kappa\xi}{2}\to 0\,,$$
$$\frac{-\kappa(x-y)}{\xi}J_0'(\kappa\xi)=\frac{\kappa(x-y)}{\xi}J_1(\kappa\xi)\simeq\frac{\kappa(x-y)}{\xi}\frac{\kappa\xi}{2}\to 0$$

となる．したがって，(4.90) の $\mathcal{K}_0(t,x\mid 0,y)$ にテスト関数 $f(y)$ をかけて y で積分することを考えるとき，(9) と (10) における $J_0(\kappa\xi)$ の x_0 や x に関する微分からの寄与はなくなる．また $J_0(\kappa\xi)\to 1$ なので，y 積分区間 $x-x_0\leqq y\leqq x+x_0$ の幅が $x_0\to 0$ とともに 0 になることを考えると $i\kappa\beta$ からの寄与もなくなる．

残ったのは θ 関数の微分だけで，$x_0>0$ に対して

$$\theta\big(x_0-|x-y|\big)=\theta(x_0-x+y)\theta(x-y)+\theta(x_0+x-y)\theta(y-x)$$

を x_0 で微分して

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\theta\big(x_0-|x-y|\big)=\delta(x_0-x+y)\theta(x-y)+\delta(x_0+x-y)\theta(y-x)$$

となる．これにテスト関数 $f(y)$ をかけて y で積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\theta(x_0-|x-y|)}{\partial x_0}f(y)dy$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\delta(x_0-x+y)f(y)dy+\int_{x}^{\infty}\delta(x_0+x-y)f(y)dy$$

$$= f(x-x_0) + f(x+x_0) \to 2f(x) \quad (x_0 \downarrow 0)$$

となるので

$$\lim_{x_0 \downarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_0} \theta\bigl(x_0 - |x-y|\bigr) = 2\delta(y-x)$$

が分かる．

一方，x での微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\theta\bigl(x_0 - |x-y|\bigr) &= -\delta(x_0 - x + y)\theta(x-y) + \theta(x_0 - x + y)\delta(x-y)\\ &\quad + \delta(x_0 + x - y)\theta(y-x) - \theta(x_0 + x - y)\delta(y-x)\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\theta(x - |x-y|)}{\partial x} f(y)dy\\ &= -\int_{-\infty}^{x} \delta(x_0 - x + y) f(y)dy + \int_{x-x_0}^{\infty} \delta(x-y) f(y)dy\\ &\quad + \int_{x}^{\infty} \delta(x_0 + x - y) f(y)dy - \int_{-\infty}^{x+x_0} \delta(y-x) f(y)dy\\ &= -f(x-x_0) + f(x) + f(x+x_0) - f(x) \to 0 \quad (x_0 \downarrow 0)\end{aligned}$$

となり，

$$\lim_{x_0 \downarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \theta\bigl(x_0 - |x-y|\bigr) = 0$$

である．

これらの結果と $J_0(0) = 1$ から

$$\lim_{x_0 \downarrow 0}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_0} - \alpha\frac{\partial}{\partial x} - i\kappa\beta\Bigr)\Bigl\{J_0(\kappa\xi)\theta\bigl(x_0 - |x-y|\bigr)\Bigr\} = 2\delta(y-x)$$

となる．この係数 2 を消すために 1/2 が掛けてある．つまり (4.90) の係数 1/2 は Green 関数の規格化である．

5

問題 5.1 I_n における σ_n 積分について，$\sigma_n = (1 - \sigma_1 - \cdots - \sigma_{n-1})\rho$ と置換すると

$$\begin{aligned}\sigma_n\ \text{積分} &= \int_0^{1-\sigma_1-\cdots-\sigma_{n-1}} \sigma_n^{-1/2} d\sigma_n = (1 - \sigma_1 - \cdots - \sigma_{n-1})^{1/2}\int_0^1 \rho^{-1/2} d\rho\\ &= (1 - \sigma_1 - \cdots - \sigma_{n-1})^{1/2} B\Bigl(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\Bigr).\end{aligned}$$

続いて $\sigma_{n-1} = (1 - \sigma_1 - \cdots - \sigma_{n-2})\rho$ と置換すると，σ_{n-1} 積分は

$$\begin{aligned}\sigma_{n-1}\ \text{積分} &= (1 - \sigma_1 - \cdots - \sigma_{n-2})^{2/2}\int_0^1 \rho^{-1/2}(1-\rho)^{1/2} d\rho\\ &= (1 - \sigma_1 - \cdots - \sigma_{n-2})^{2/2} B\Bigl(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\Bigr)\end{aligned}$$

となる．同様の計算を σ_1 積分まで続けると，最後は

$$\begin{aligned}I_n &= B\Bigl(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\Bigr)B\Bigl(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\Bigr)\cdots B\Bigl(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\Bigr)\int_0^1 \sigma_1^{-1/2}(1-\sigma_1)^{(n-1)/2} d\sigma_1\\ &= B\Bigl(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\Bigr)B\Bigl(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\Bigr)\cdots B\Bigl(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\Bigr)\end{aligned}$$

となる．この結果にヒントにある 2 つの公式を用いると

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(2/2)}{\Gamma(3/2)}\,\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(4/2)}\cdots\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)}\\ &= \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma((n+2)/2)} = \frac{2^n(\sqrt{\pi})^n\,\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)} = \frac{2^n(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\pi}\,n!}\Gamma\Bigl(\frac{n+1}{2}\Bigr)\end{aligned}$$

となって (5.21) が得られる．

問題 5.2 まず K_1 積分は

$$
\begin{aligned}
K_1\ \text{積分} &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sigma_1 K_1^2} e^{-\varepsilon(K_2-K_1)^2} d^2K_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\Big[-\lambda_1\{K_1-(\varepsilon/\lambda_1)K_2\}^2 - \{\varepsilon-(\varepsilon^2/\lambda_1)\}K_2^2\Big] d^2K_1 \\
&= \frac{\pi}{\lambda_1} e^{-\{\varepsilon-(\varepsilon^2/\lambda_1)\}K_2^2} \qquad (\lambda_1=\sigma_1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

となる．引き続き K_2 積分をすると

$$
\begin{aligned}
K_2\ \text{積分} &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sigma_2 K_2^2} e^{-\varepsilon(K_3-K_2)^2} e^{-\{\varepsilon-(\varepsilon^2/\lambda_1)\}K_2^2} d^2K_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\Big[-\lambda_2\{K_2-(\varepsilon/\lambda_2)K_3\}^2 - \{\varepsilon-(\varepsilon^2/\lambda_2)\}K_3^2\Big] d^2K_2 \\
&= \frac{\pi}{\lambda_2} e^{-\{\varepsilon-(\varepsilon^2/\lambda_2)\}K_3^2} \qquad \Big(\lambda_2=\sigma_2+2\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{\lambda_1}\Big).
\end{aligned}
$$

以下同じ計算を繰り返して，最後は

$$
\begin{aligned}
K_n\ \text{積分} &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sigma_n K_n^2} e^{-\varepsilon K_n^2} e^{-\{\varepsilon-(\varepsilon^2/\lambda_{n-1})\}K_n^2} d^2K_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda_n K_n^2} d^dK_n^2 = \frac{\pi}{\lambda_n} \qquad \Big(\lambda_n=\sigma_n+2\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{\lambda_{n-1}}\Big)
\end{aligned}
$$

となり，これらを併せると (5.27) が得られる．

不等式 (5.28) は数学的帰納法によって簡単に証明されるので省略する．

問題 5.3 $X<0$ に対して，原点を中心とした大きな半径の上半円 C_+ 上を反時計回りに一周積分すると，(5.32) の極が C_+ の外部にあるので

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{C_+} \widetilde{\varphi}_{\infty,\gamma}(q)e^{-iqX}dq = 0\,.$$

$X<0$ なので上半円の円弧上の積分は半径 $\to\infty$ とともに 0 となる．したがって

$$P_\infty^{(2)}(X)=0\,.$$

$X>0$ に対しては，原点を中心とした大きな半径の下半円 C_- 上を時計回りに一周積分する．今度は (5.32) の極が C_- の内部にあるので，

$$P_\infty^{(2)}(X) = \frac{-2\pi i}{2\pi}\mathrm{Res}\Big(\widetilde{\varphi}_{\infty,\gamma}(q)e^{-iqX},\ \frac{1}{ia_2}\Big) = \frac{1}{a_2}e^{-X/a_2}$$

となる．

問題 5.4 (5.66) に $1/|x-y|$ の Legendre（ルジャンドル）多項式展開

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{\max\{r,\rho\}}\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\theta) \quad \Big(h=\frac{\min\{r,\rho\}}{\max\{r,\rho\}}\Big)$$

を代入して y で積分する．ここに $|x|=r$，$|y|=\rho$ とし，$\angle x\mathrm{O}y=\theta$ とおいた．

今の場合 $V(y)$ と $\varphi(q,y)$ が $|y|=\rho$ のみに依存するので，$d^3y=2\pi\rho^2\sin\theta d\rho d\theta$ の θ 積分をすると，

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0 \quad (n \geqq 1)$$

より $n=0$ の項のみが残って

$$\varphi(q,r) = 1+\frac{iq}{D}\int_0^\infty \frac{1}{\max\{r,\rho\}}V(\rho)\varphi(q,\rho)\rho^2 d\rho \quad (\rho=|y|\,)$$

となる．ρ 積分は

$$\Big|\int_0^\infty \frac{1}{\max\{r,\rho\}}V(\rho)\varphi(q,\rho)\rho^2 d\rho\Big| \leqq \frac{1}{r}\int_0^\infty |V(\rho)|\rho^2 d\rho = \frac{1}{4\pi r}\|V\|_1$$

と抑えられるので，

$$\lim_{r\to\infty}\varphi(q,r)=1$$

となり (5.71) が得られる．