

A 半波長ダイポールの自己インピーダンスと相互インピーダンス

A.1 半波長ダイポールから放射される E_z

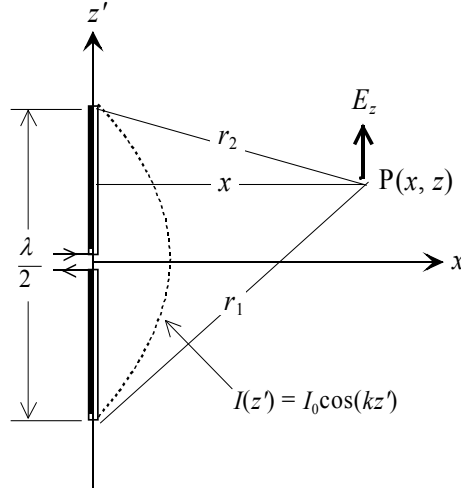


図 A.1 半波長ダイポールからの放射

半波長ダイポールの自己インピーダンスと相互インピーダンスを求めるには、半波長ダイポール近傍における電界 \mathbf{E} の z 成分が必要となる。はじめに、図 A.1 に示すように r_1 と r_2 をおくと、点 $P(x, z)$ における半波長ダイポールから放射される E_z は次式で与えられることを示す。

$$E_z = -j30I_0 \left\{ \frac{\exp(-jkr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-jkr_2)}{r_2} \right\} \quad (\text{A1.1})$$

半波長ダイポールの電流分布 $I(z')$ は、 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ として次式で与えられる。

$$I(z') = I_0 \cos(kz') \quad \left(-\frac{\lambda}{4} \leq z' \leq \frac{\lambda}{4} \right) \quad (\text{A1.2})$$

電流は z 方向に向かって流れているので、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は z 成分のみである。点 $P(x, z)$ におけるベクトルポテンシャル A_z は次のように計算される。

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} I(z') \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' \quad (\text{A1.3})$$

ただし、 $r = \sqrt{x^2 + (z' - z)^2}$ である。

ベクトルポテンシャル A_z を次の式に代入すると、 E_z を得ることができる。

$$E_z = -j\omega \left(A_z + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A1.4})$$

ここで、第2項は次のように計算される。 $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z'}$ であることに注意して、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} I(z') \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} I(z') \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} I(z') \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \left[I(z') \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\exp(-jkr)}{r} \right]_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} - \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} I'(z') \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' \right\} \\
&= -\frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} I'(z') \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' \\
&= -\frac{\mu}{4\pi} \left\{ \left[I'(z') \frac{\exp(-jkr)}{r} \right]_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} - \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} I''(z') \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' \right\} \tag{A1.5}
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{j\omega}{k^2} \left(k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \\
&= -\frac{j\omega\mu}{4\pi k^2} \left\{ k^2 \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} I(z') \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' - \left[I'(z') \frac{\exp(-jkr)}{r} \right]_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} + \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} I''(z') \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' \right\} \\
&= \frac{jkZ}{4\pi k^2} \left\{ \left[I'(z') \frac{\exp(-jkr)}{r} \right]_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} - \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \{k^2 I(z') + I''(z')\} \frac{\exp(-jkr)}{r} dz' \right\} \tag{A1.6}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $I(z') = I_0 \cos(kz')$ より、 $I'(z') = -kI_0 \sin(kz')$ 、 $I''(z') = -k^2 I_0 \cos(kz')$ を代入すると、 $\{k^2 I(z') + I''(z')\} = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{jk^2 Z I_0}{4\pi k^2} \left[\sin(kz') \frac{\exp(-jkr)}{r} \right]_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \\
&= -\frac{jZ I_0}{4\pi} \left\{ \sin\left(\frac{k\lambda}{4}\right) \frac{\exp(-jkr_2)}{r_2} - \sin\left(-\frac{k\lambda}{4}\right) \frac{\exp(-jkr_1)}{r_1} \right\} \tag{A1.7}
\end{aligned}$$

となり、 $Z = 120\pi$ 、 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ を代入して、次式を得る。

$$E_z(x, z) = -j30I_0 \left(\frac{\exp(-jkr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-jkr_2)}{r_2} \right) \tag{A1.8}$$

ただし、

$$r_1 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\lambda}{4} + z\right)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\lambda}{4} - z\right)^2} \tag{A1.9}$$

である。

A.2 半波長ダイポールの自己インピーダンス

起電力法を用いると、半波長ダイポールの自己インピーダンス Z_{11} は次式で与えられる。

$$Z_{11} = -\frac{1}{I_0} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} E_z(0, z) \cos(kz) dz \quad (\text{A2.1})$$

積分は自身のアンテナ上で行うので、 E_z は $x = 0$ として計算する。 $Z_{11} = R_{11} + jX_{11}$ とおくと、 R_{11} と X_{11} は次式を計算して求められる。

$$R_{11} = 30 \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \left(\frac{\sin(kr_1)}{r_1} + \frac{\sin(kr_2)}{kr_2} \right) \cos(kz) dz \quad (\text{A2.2})$$

$$Z_{11} = 30 \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \left(\frac{\cos(kr_1)}{r_1} + \frac{\cos(kr_2)}{r_2} \right) \cos(kz) dz \quad (\text{A2.3})$$

ただし、

$$r_1 = \frac{\lambda}{4} + z, \quad r_2 = \frac{\lambda}{4} - z \quad (\text{A2.4})$$

である。(A2.2) 式について、

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \left(\frac{\sin(kr_1)}{r_1} + \frac{\sin(kr_2)}{kr_2} \right) \cos(kz) dz \\ &= \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\sin^2(kr_1)}{r_1} dr_1 + \int_{\frac{\lambda}{2}}^0 \frac{\sin^2(kr_2)}{r_2} (-dr_2) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\sin^2(kr)}{r} dr \\ &= \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1 - \cos(2kr)}{r} dr \\ &= \int_0^{k\lambda} \frac{1 - \cos t}{t} dt \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

と計算できる。ここで、

$$C(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt = \gamma + \log x - Ci(x) \quad (\text{A2.6})$$

とする。ただし、

$$Ci(x) = - \int_0^\infty \frac{\cos \nu}{\nu} \quad (\text{A2.7})$$

$$\gamma = 0.5772 \dots \quad (\text{オイラー定数}) \quad (\text{A2.8})$$

を用いると,

$$\int_0^{k\lambda} \frac{1 - \cos t}{t} dt = 0.577 + \log(2\pi) - Ci(2\pi) \quad (\text{A2.9})$$

となる. 同様に, (A2.3) 式について,

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \left(\frac{\cos(kr_1)}{r_1} + \frac{\cos(kr_2)}{r_2} \right) \cos(kz) dz \\ &= \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\cos(kr_1) \sin(kr_1)}{r_1} dr_1 + \int_{\frac{\lambda}{2}}^0 \frac{\cos(kr_2) \sin(kr_2)}{r_2} (-dr_2) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\sin(kr) \cos(kr)}{r} dr \\ &= \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\sin(2kr)}{r} dr \\ &= \int_0^{k\lambda} \frac{\sin t}{t} dt = Si(2\pi) \end{aligned} \quad (\text{A2.10})$$

と書ける. ただし,

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos \nu}{\nu} d\nu \quad (\text{余弦積分}), \quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{正弦積分}) \quad (\text{A2.11})$$

である. 以上より,

$$R_{11} = 30\{0.577 + \log(2\pi) - Ci(2\pi)\} = 73.130 \Omega \quad (\text{A2.12})$$

$$X_{11} = 30 Si(2\pi) = 42.545 \Omega \quad (\text{A2.13})$$

である.

A.3 半波長ダイポールの相互インピーダンス

2本の半波長ダイポールが間隔を x として, 向かい合って置かれているとする. このとき, 相互インピーダンス Z_{21} は次式で与えられる.

$$Z_{21} = - \frac{1}{I_{10}} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} E_z(x, z) \cos(kz) dz \quad (\text{A3.1})$$

この積分はアンテナ#2 上で行う. $Z_{21} = R_{21} + jX_{21}$ とおくと, R_{21} と X_{21} は自己インピーダンスの場合と同じ形の式で与えられる. ただし, r_1 と r_2 については

$$r_1 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\lambda}{4} + z\right)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\lambda}{4} - z\right)^2} \quad (\text{A3.2})$$

である. したがって,

$$\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \left(\frac{\sin(kr_1)}{r_1} + \frac{\sin(kr_2)}{kr_2} \right) \cos(kz) dz$$

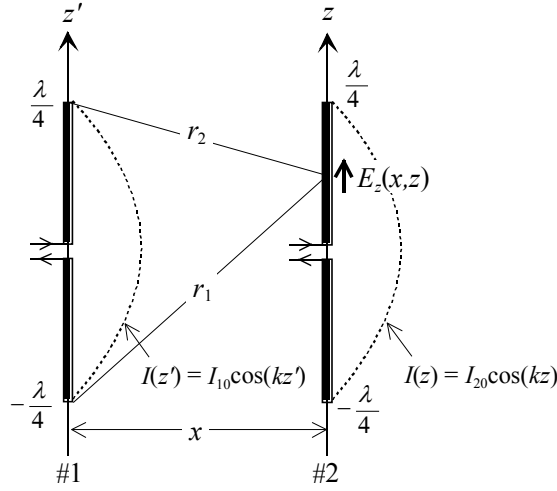


図 A.2 相互インピーダンスの計算

$$\begin{aligned}
 &= \int_x^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}} \frac{\sin(kr_1) \sin(k\sqrt{r_1^2-x^2})}{\sqrt{r_1^2-x^2}} dr_1 + \int_{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}}^x \frac{\sin(kr_2) \sin(k\sqrt{r_2^2-x^2})}{\sqrt{r_2^2-x^2}} (-dr_2) \\
 &= 2 \int_x^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}} \frac{\sin(kr) \sin(k\sqrt{r^2-x^2})}{\sqrt{r^2-x^2}} dr \\
 &= \int_x^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}} \left\{ \frac{\cos k(r-\sqrt{r^2-x^2})}{\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{\cos k(r+\sqrt{r^2-x^2})}{\sqrt{r^2-x^2}} \right\} dr \quad (\spadesuit)
 \end{aligned}$$

となり, ここで, r を $r-\sqrt{r^2-x^2}=y_1, r+\sqrt{r^2-x^2}=y_2$ とすると,

$$\begin{aligned}
 (\spadesuit) &= - \int_x^{-\frac{\lambda}{2}+\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}} \frac{\cos(ky_1)}{ky_1} d(ky_1) - \int_x^{\frac{\lambda}{2}+\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}} \frac{\cos(ky_2)}{ky_2} d(ky_2) \\
 &= - \int_{kx}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \int_{-\frac{k\lambda}{2}+k\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt - \int_{kx}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \int_{\frac{k\lambda}{2}+k\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt \\
 &= 2Ci(kx) - Ci \left\{ k \left(-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2} \right) \right\} - Ci \left\{ k \left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2} \right) \right\} \quad (\text{A3.3})
 \end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \left(\frac{\cos(kr_1)}{r_1} + \frac{\cos(kr_2)}{r_2} \right) \cos(kz) dz \\
 &= 2 \int_x^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}} \frac{\cos(kr) \sin(k\sqrt{r^2-x^2})}{\sqrt{r^2-x^2}} dr \\
 &= \int_x^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+x^2}} \left[\frac{\sin \{ k(r+\sqrt{r^2-x^2}) \}}{\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{\sin \{ k(r-\sqrt{r^2-x^2}) \}}{\sqrt{r^2-x^2}} \right] dr
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_x^{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2}} \frac{\sin(ky_1)}{ky_1} d(ky_1) + \int_x^{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2}} \frac{\cos(ky_2)}{ky_2} d(ky_2) \\
&= - \int_0^{kx} \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^{-\frac{k\lambda}{2} + k\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2}} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^{kx} \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^{\frac{k\lambda}{2} + k\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2}} \frac{\sin t}{t} dt \\
&= -2Si(kx) + Si \left\{ k \left(-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2} \right) \right\} + Si \left\{ k \left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2} \right) \right\} \quad (\text{A3.4})
\end{aligned}$$

となる。よって、(A3.3), (A3.4) 式より、

$$R_{21} = 30 \left[2Ci(kx) - Ci \left\{ k \left(-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2} \right) \right\} - Ci \left\{ k \left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2} \right) \right\} \right] \quad (\text{A3.5})$$

$$X_{21} = -30 \left[2Si(kx) + Si \left\{ k \left(-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2} \right) \right\} + Si \left\{ k \left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + x^2} \right) \right\} \right] \quad (\text{A3.6})$$

となる。

B チェビシエフ分布とテイラー分布の求め方

B.1 チェビシエフ分布

チェビシエフ多項式 $T_n(x)$ とは、 $x = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ としたとき、

$$f_n(\phi) = \cos\left(n\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{B1.1})$$

を x のべき級数で展開し、 x の範囲を $-1 \leq x \leq 1$ から $-\infty < x < \infty$ に拡張した多項式である。具体的に書くと次のようになる。

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

高次のチェビシエフ多項式を求めるためには、次の漸化式を用いる。

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (\text{B1.2})$$

図 B.1 に示されるように、チェビシエフ多項式は $-1 \leq x \leq 1$ では、 $-1 \leq T_n(x) \leq 1$ の範囲で振動し、 $x > 1$ では急激に増加する。

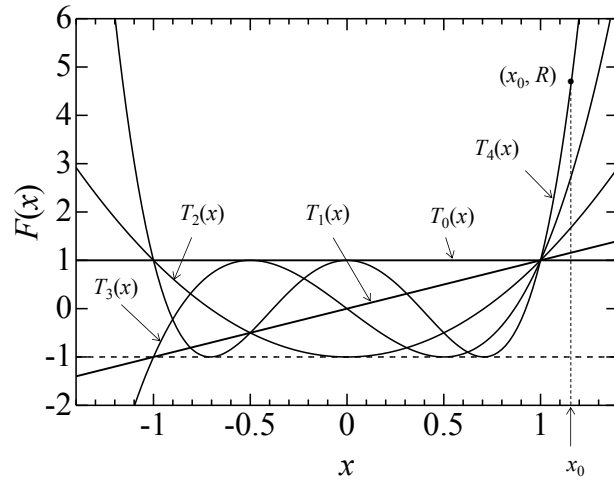


図 B.1 チェビシェフ多項式

チェビシェフ分布はチェビシェフ多項式を指向性を利用する. N 素子アレーの場合は $T_{N-1}(x)$ を指向性を利用して, $T_{N-1}(x)$ の $x > 1$ をメインローブ, $-1 \leq x \leq 1$ をサイドローブとする. $x > 1$ の点 (x_0, R) をメインローブの最大値とすると,

$$R = \frac{\text{メインローブの最大値}}{\text{サイドローブの最大値}} \quad (\text{B1.3})$$

であり, サイドローブレベルが $1/R$ で一定となる指向性を得ることができる.

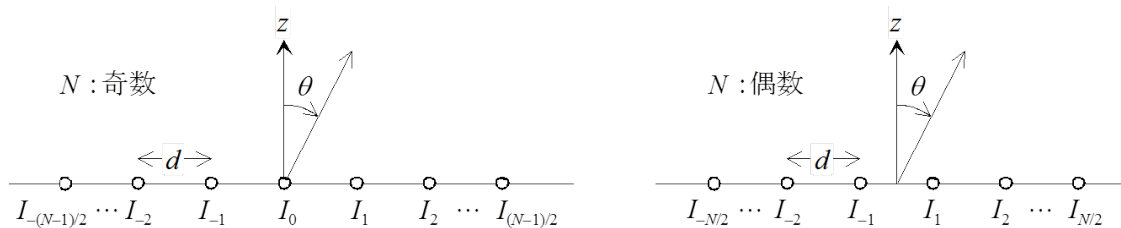


図 B.2 左右対称な励振分布のリニアアレー

次に, チェビシェフ多項式を指向性とするアレーの励振係数 I_n を求める. 素子間隔 d は一定とし, 励振係数は中央に関して左右対称な分布とする. このとき, N 素子リニアアレーのアレーファクタは, $u = kd \sin \theta$ として次式で与えられる.

$$A(u) = \sum_{n=1}^{N/2} \left\{ I_{-n} \exp \left(-j \frac{2n-1}{2} u \right) + I_n \exp \left(j \frac{2n-1}{2} u \right) \right\}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{N/2} I_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}u\right) \quad (N: \text{偶数}) \quad (\text{B1.4})$$

$$A(u) = I_0 + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} I_n \cos(nu) \quad (N: \text{奇数}) \quad (\text{B1.5})$$

ここで,

$$x = \cos\left(\frac{u}{2}\right) \quad (\text{B1.6})$$

とおくと, (B1.4), (B1.5) 式はチェビシェフ多項式を用いて次のように表すことができる.

$$A(x) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} I_n T_{2n-1}(x) \quad (N: \text{偶数}) \quad (\text{B1.7})$$

$$A(x) = I_0 + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} I_n T_{2n}(x) \quad (N: \text{奇数}) \quad (\text{B1.8})$$

このアレーファクタ $A(x)$ がチェビシェフ多項式の指向性に等しいとおく. つまり,

$$T_{N-1}(x_0 x) = A(x) \quad (\text{B1.9})$$

とおくことで, 励振係数 I_n を求めることができる.

例として, サイドローレベルを -20 dB とする 5 素子アレーのチェビシェフ分布を求める ($N = 5, SLL = -20$ dB) .

まず,

$$R = 10^{-SLL/20} = 10 \quad (\text{B1.10})$$

となる. $x > 1$ では, $x = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ の ϕ は虚数となる. $\phi = j\phi'$ とおくと, $\phi' = 2 \cosh^{-1} x$ より

$$T_n(x) \cos\left(n\frac{\phi}{2}\right) = \cosh(n \cosh x) \quad (\text{B1.11})$$

と書くことができる. $T_{N-1}(x_0) = R$ より,

$$\cosh(4 \cosh x_0) = 10 \quad \therefore x_0 = 1.293 \quad (\text{B1.12})$$

が得られる. このとき,

$$\begin{aligned} T_4(1.293x) &= 8(1.293x)^4 - 8(1.293x)^2 + 1 \\ &= 22.36x^4 - 13.37x^2 + 1 \end{aligned} \quad (\text{B1.13})$$

である. 他方, アレーファクタは

$$A(x) = I_0 + 2I_1T_2(x) + 2I_2T_4(x)$$

$$\begin{aligned}
&= I_0 + 2I_1(2x^{-1}) + 2I_2(8x^4 - 8x^2 + 1) \\
&= 16I_2x^4 + (4I_1 - 16I_2)x^2 + (I_0 - 2I_1 + 2I_2)
\end{aligned} \tag{B1.14}$$

である。両式の係数を比較して、励起係数が得られる。

$$I_2 = 1.3975, \quad I_1 = 2.2463, \quad I_0 = 2.6978 \tag{B1.15}$$

$I_2 = 1$ とすると, $I_1 = 1.6074$, $I_0 = 1.9304$ となる。

B.2 テイラー分布

テイラー分布の指向性は、メインローブとその近傍のサイドローブはチェビシェフ分布の指向性、それ以外のサイドローブは一樣励振分布の指向性を組み合わせたものである。テイラー分布は指向性合成の手法（指向性から波源分布を求める方法）を用いて連続な波源分布を求め、これを素子アンテナの位置でサンプリングしてアレーの励振係数とすることが多い。テイラー分布の導出はやや煩雑となるので、ここでは結果のみを示す。なお、指向性 $f(\theta)$ から波源分布 $i(s)$ を求める際に Woodward-Lawson 法を用いている。

サイドローブレベルを SLL [dB], 零点合わせ位置を \bar{n} とするとき、テイラー分布の指向性 $f(\theta)$ と波源分布 $i(s)$ が求められる。

$$R = 10^{-SLL/20} \tag{B2.1}$$

$$A = \frac{1}{\pi} \cosh^{-1} R = \frac{1}{\pi} \log \left(R + \sqrt{R^2 - 1} \right) \tag{B2.2}$$

$$\sigma = \frac{\bar{n}}{\sqrt{A^2 + \left(\bar{n} - \frac{1}{2}\right)^2}} \tag{B2.3}$$

$$x_n = \begin{cases} \pm \sigma \sqrt{A^2 + \left(\bar{n} - \frac{1}{2}\right)^2}, & 1 \leq n < \bar{n} \\ \pm n, & n > \bar{n} \end{cases} \tag{B2.4}$$

$$a_n = \frac{[(\bar{n} - 1)!]^2}{(\bar{n} - 1 + n)!(\bar{n} - 1 - n)!} \prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \left(1 - \frac{n^2}{x_m^2} \right), \quad |n| < \bar{n} \tag{2.63}$$

とするとき、テイラー分布の指向性 $f(\theta)$ と波源分布 $i(s)$ は

$$f(\theta) = \sum_{n=-\bar{n}+1}^{\bar{n}-1} a_n \operatorname{sinc} \left[\pi \left(\frac{L}{\lambda} \sin \theta - n \right) \right], \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \tag{B2.5}$$

$$i(s) = \frac{1}{L/\lambda} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\bar{n}-1} a_n \cos \frac{2\pi n}{L/\lambda} s \right], \quad |s| \leq \frac{L}{2\pi} \tag{B2.6}$$

のように与えられる。ただし、 $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ であり、 L はアレーの長さである。 θ および s の座標は次の図の通りである。

テイラー分布は波源中央の振幅が大きく、両端の振幅は小さい。波源中央の振幅に対する両端の振幅低下量を T [dB] とするとき、テイラー分布で用いられる代表的なサイドローブレベル SLL と零点合わせ位置 \bar{n} の関係を表 B.1 に示す。また、これらの指向性の 1 次元開口効率 η も示す。

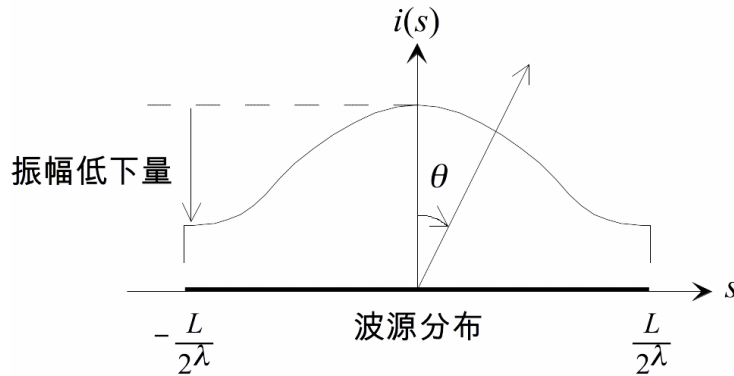


図 B.3 波源分布の座標

表 1 テイラー分布の代表的なサイドローブレベル SLL , 零点合わせ位置 \bar{n} , 両端の振幅低下量 T , 1 次元開口効率 η の関係

サイドローブレベル SLL	零点合わせ位置 \bar{n}	両端の振幅低下量 T	1 次元開口効率 η
-20 dB	3	-5.5 dB	0.95
-25 dB	5	-8 dB	0.91
-30 dB	7	-11 dB	0.86

C 指向性合成

所望の指向性を得るために波源分布を求めることを指向性合成という。ここでは、代表的な指向性合成の方法であるフーリエ変換法と Woodward-Lawson 法を説明する。なお、アレーアンテナの場合、励振係数は離散的な分布となるが、ここでは連続的な波源分布を考え、これを素子アンテナの位置でサンプリングすることによって素子アンテナの励振係数とする。

C.1 フーリエ変換方法

x 軸に沿って長さ L の連続的な波源分布 $I(x)$ が存在するとする。素子アンテナに相当する各点波源の指向性は無指向性とし、波源分布の範囲は $-L/2 \leq x \leq L/2$ とする。このとき、連続な波源分布 $I(x)$ から放射される指向性 $F(\theta)$ は次式で与えられる。

$$F(\theta) = \int_{-L/2}^{L/2} I(x) \exp(jkx \sin \theta) dx \quad (\text{C1.1})$$

指向性の最大値が 1 となるように $F(\theta)$ と $I(x)$ を規格化した形で表現すると、次式のようになる。

$$f(\theta) = \frac{1}{\lambda} \int_{-L/2}^{L/2} i(x) \exp(jkx \sin \theta) dx \quad (\text{C1.2})$$

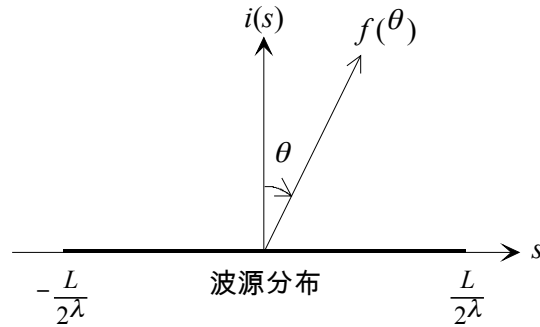


図 C.1 波源分布の座標

さらに, $w = \sin \theta$, $s = x/\lambda$ と置き換えると, 規格化された波源分布 $i(s)$ と指向性 $f(w)$ の関係は次のようになる.

$$f(w) = \int_{-L/2\lambda}^{L/2\lambda} i(s) \exp(j2\pi ws) ds \quad (\text{C1.3})$$

波源分布 $i(s)$ の定義域は $-L/2\lambda \leq s \leq L/2\lambda$ であるが, $i(s)$ の定義域を拡張して $-L/2\lambda \leq s \leq L/2\lambda$ 以外で 0 であるとすれば, 上式は次のようになる.

$$f(w) = \int_{-\infty}^{\infty} i(s) \exp(j2\pi ws) ds \quad (\text{C1.4})$$

この式はフーリエ変換と同じ式であり, 逆フーリエ変換は次式で与えられる.

$$i(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \exp(-j2\pi sw) dw \quad (\text{C1.5})$$

つまり, 所望の指向性を $f_d(w)$ とすれば, これを得るための波源分布 $i_d(s)$ は $f_d(w)$ を逆フーリエ変換することによって得ることができる. これをフーリエ変換法という.

$$i_d(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_d(w) \exp(-j2\pi sw) dw \quad (\text{C1.6})$$

この式で得られる波源分布 $i_d(s)$ は $-\infty \leq s \leq \infty$ であるが, 波源の長さ L は有限であるため, $-L/2\lambda \leq s \leq L/2\lambda$ の範囲で打ち切らなければならない. フーリエ変換法は直感的であるが, 打ち切り誤差の影響により, 有限の範囲で打ち切られた波源分布 $i_d(s)$ から作られる指向性は所望の指向性と比較して誤差が大きい.

一例として, フーリエ変換法を用いて, ビーム幅 $2\theta_0$ の角度内を一定の放射強度とするセクタビームの指向性を与える波源分布を求める. セクタビームの指向性は次式で与えられる.

$$f_d(\theta) = \begin{cases} 1, & -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (\text{C1.7})$$

ここで, $\sin \theta_0 = c$ とすると,

$$f_d(\theta) = \begin{cases} 1, & |w| \leq c \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (\text{C1.8})$$

である. このとき, セクタビームを与える波源分布 $i(s)$ は逆フーリエ変換によって次のように求められる.

$$i(s) = 2c \frac{\sin(2\pi cs)}{2\pi cs}, \quad |s| \leq \frac{L}{2\lambda} \quad (\text{C1.9})$$

波源の長さ L が無限であれば, この波源分布の式から得られる指向性は所望のセクタビームが得られるが, 波源が存在する $-L/2\lambda \leq s \leq L/2\lambda$ の範囲で打ち切らなければならないため, 実際に得られる指向性は完全なセクタビームにはならない. 実際の指向性は

$$f(w) = \frac{1}{\pi} \left[\text{Si} \left\{ \pi \frac{L}{\lambda} (w + c) \right\} - \text{Si} \left\{ \pi \frac{L}{\lambda} (w - c) \right\} \right] \quad (\text{C1.10})$$

のように与えられる. ここで, $\text{Si}(x)$ は正弦積分と呼ばれる関数であり,

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{C1.11})$$

で定義される.

アレーの長さを $L = 10\lambda$, ビーム幅を 60° ($\theta_0 = 30^\circ, c = \sin \theta_0 = 0.5$) として, 所望のセクタビーム $f_d(w)$, 波源分布 $i(s)$, 実際に得られる指向性 $f(w)$ を図 C.2 に示す. 実際に得られる指向性は打ち切り誤差の影響により振動の大きいセクタビームとなることがわかる.

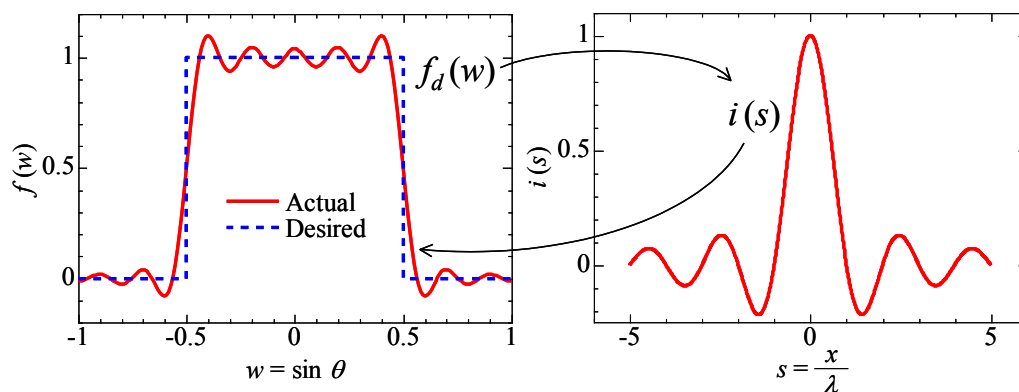


図 C.2 フーリエ変換法の例

所望のセクタビームと実際に得られる指向性 (左) とフーリエ変換法により得られた波源分布 (右) .

C.2 Woodward-Lawson 法

Woodward-Lawson 法は所望の指向性を複数の sinc 関数の重ね合わせとして表現し、所望の指向性に対応する波源分布を得る方法である。これは情報理論におけるシャノンのサンプリング定理と同じ原理である。

いま、振幅は a_n で一定とし、位相は一定の割合で傾きを持つ波源分布 $i_n(s)$ を考える。

$$i_n(s) = \frac{a_n}{L/\lambda} \exp(-j2\pi w_n s), \quad |s| \leq \frac{L}{2\lambda} \quad (\text{C2.1})$$

この $i_n(s)$ が作る指向性 $f_n(w)$ は次式で与えられる。

$$f_n(w) = a_n \operatorname{sinc} \left[\pi \frac{L}{\lambda} (w - w_n) \right] \quad (\text{C2.2})$$

ただし、sinc 関数は次式のとおりである。

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (\text{C2.3})$$

$f_n(w)$ は $w = w_n$ で最大値 a_n をとる関数であり、 w_n は波源分布 $i_n(s)$ の位相の傾き、 a_n は波源分布 $i_n(s)$ の振幅にそれぞれ対応している。

Woodward-Lawson 法では波源分布 $i(s)$ を $2M + 1$ 個の $i_n(s)$ の重ね合わせで表現する。すなわち、

$$i(s) = \sum_{n=-M}^M i_n(s) = \frac{1}{L/\lambda} \sum_{n=-M}^M a_n \exp(-j2\pi w_n s) \quad (\text{C2.4})$$

とかける。ただし、

$$w_n = \frac{n}{L/\lambda}, \quad |n| \leq M, \quad |w_n| \leq 1 \quad (\text{C2.5})$$

とする。このとき、波源分布 $i(s)$ に対応する指向性 $f(w)$ は次式で与えられる。

$$f(w) = \sum_{n=-M}^M f_n(w) = \sum_{n=-M}^M a_n \operatorname{sinc} \left[\pi \frac{L}{\lambda} (w - w_n) \right] \quad (\text{C2.6})$$

各 sinc 関数の最大値を与える角度 $w = w_n$ では、指向性の値は $f(w_n) = a_n$ である。このとき、 $w = w_n$ をサンプリング点、 a_n をサンプル値という。サンプリング点 $w = w_n$ で所望の指向性 $f_d(w)$ の値をサンプリングし、サンプル値 $a_n = f_d(w_n)$ を取得すれば、所望の指向性を与える波源分布 $i_d(s)$ を得ることができる。これを Woodward-Lawson 法という。

サンプリング数 $2M + 1$ はどのように選ばよいかについては、サンプリング間隔 $\Delta w = \lambda/L$ であることに注意して、可視領域 $-1 \leq w_n \leq 1$ を分割するように設定すればよい。すなわち、 M は $M \approx 1/(\lambda/L) = L/\lambda$ 程度とする。例えば、 $L = 10\lambda$ であれば、必要なサンプリング数は

$2M + 1 = 21$ である。Woodward-Lawson 法はフーリエ変換法で見られた打ち切り誤差の影響が少なく、所望の指向性に近い指向性が得られる。

一例として、Woodward-Lawson 法を用いて、セクタビームの指向性を与える波源分布を求める。フーリエ変換法の例と同様に、アレーの長さを $L = 10\lambda$ 、ビーム幅を 60° ($\theta_0 = 30^\circ$, $c = \sin \theta_0 = 0.5$) として、所望のセクタビーム $f_d(w)$ 、波源分布 $i(s)$ 、実際に得られる指向性 $f(w)$ を図 C.3 に図示する。Woodward-Lawson 法で得られる指向性は、フーリエ変換法と比較すると、振動が小さく、所望の形に近いセクタビームが得られることがわかる。

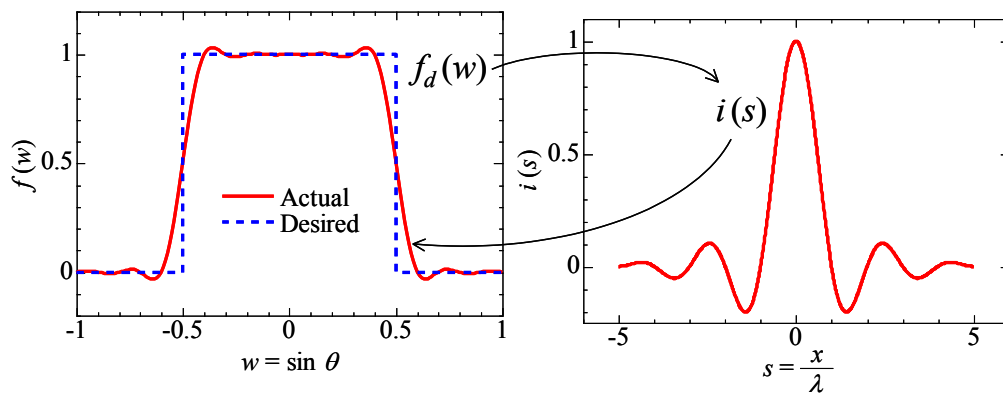


図 C.3 Woodward-Lawson 法の例

所望のセクタビームと実際に得られる指向性（左）と Woodward-Lawson 法により得られた波源分布。