1.2.1

$$Q(t) = \frac{E_0 \cos(\omega t - \delta_0)}{\sqrt{(C^{-1} - L\omega^2)^2 + (R\omega)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{-\omega E_0 \sin(\omega t - \delta_0)}{\sqrt{(C^{-1} - L\omega^2)^2 + (R\omega)^2}}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{-\omega^2 E_0 \cos(\omega t - \delta_0)}{\sqrt{(C^{-1} - L\omega^2)^2 + (R\omega)^2}}$$

$$\therefore \quad L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + C^{-1}Q$$

$$= E_0 \frac{(-\omega^2 L + C^{-1})\cos(\omega t - \delta_0) - R\omega \sin(\omega t - \delta_0)}{\sqrt{(C^{-1} - L\omega^2)^2 + (R\omega)^2}}$$

$$= E_0 \left(-\cos\delta_0 \cos(\omega t - \delta_0) - \sin\delta_0 \sin(\omega t - \delta_0)\right)$$

$$= E_0 \cos(\omega t - \delta_0 + \delta_0) = E_0 \cos \omega t. \quad //$$

$$\left(\cos\delta_0 = \frac{C^{-1} - L\omega^2}{\sqrt{(C^{-1} - L\omega^2)^2 + R^2\omega^2}}, \quad \sin\delta_0 = \frac{R\omega}{\sqrt{(C^{-1} - L\omega^2)^2 + R^2\omega^2}}. \right)$$

[問題8.3.1 (2)も参照]

1.2.2. $$k(t) = \frac{1}{v}\left(at+b+\frac{a}{v}+e^{vt}\left(vk_0-\left(\frac{a}{v}+b\right)\right)\right)$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{a}{v} + e^{vt}\left(vk_0-\left(\frac{a}{v}+b\right)\right)$$

$$\therefore \frac{dk}{dt} - vk = \frac{a}{v} + e^{vt}\left(vk_0-\left(\frac{a}{v}+b\right)\right) - \left(at+b+\frac{a}{v}+e^{vt}\left(vk_0-\left(\frac{a}{v}+b\right)\right)\right)$$

$$= -(at+b). \quad //$$

2.2.1 ・ $x'' + (t+2)x' - t^3 x = e^t$ のとき

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -(t+2)x' + t^3 x + e^t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t^3 & -(t+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

・ $\begin{cases} x_1' - 2x_1 - 3x_2 = e^t \\ x_2' + 4x_1 + 5x_2 = \cos t \end{cases}$ のとき

オ2式より, $x_1 = -\frac{1}{4}(x_2' + 5x_2 - \cos t)$

$\therefore \quad x_1' = -\frac{1}{4}(x_2'' + 5x_2' + \sin t)$

これらをオ1式に代入して

$$-\frac{1}{4}(x_2'' + 5x_2' + \sin t) - \frac{2}{4}(x_2' + 5x_2 - \cos t) - 3x_2 = e^t$$

整理すれば,

$$-\frac{1}{4}x_2'' - \frac{7}{4}x_2' - \frac{22}{4}x_2 = \frac{1}{4}\sin t - \frac{2}{4}\cos t + e^t$$

$$\therefore \quad x_2'' + 7x_2' + 22x_2 = \sin t - 2\cos t + 4e^t$$ //

3.2.1 $$e^{-x/t} = \log\left(\frac{1}{|t|}\right) - C$$

実数の範囲で解を考えるため、右辺 > 0 と仮定して

両辺の対数をとると

$$-\frac{x}{t} = \log\left|\log\frac{1}{|t|} - C\right|$$

$$\therefore\ x(t) = -t\log\left|\log\frac{1}{|t|} - C\right|.$$

注 右辺 < 0 のときも、$e^{\pi i} = -1$ に注意し複素数の範囲で

対数をとると、$-\frac{x}{t} = \log\left|\log\frac{1}{|t|} - C\right| + \pi i$ (注意 C, 2)

$$\therefore\ x(t) = -t\log\left|\log\frac{1}{|t|} - C\right| - \pi i t$$

と表せる。

3.3.1 (1) $(t-1)^2-4(t-1)(x-2)-(x-2)^2=C$: (3.19)

$$=\left((t-1)-2(x-2)\right)^2-4(x-2)^2-(x-2)^2$$

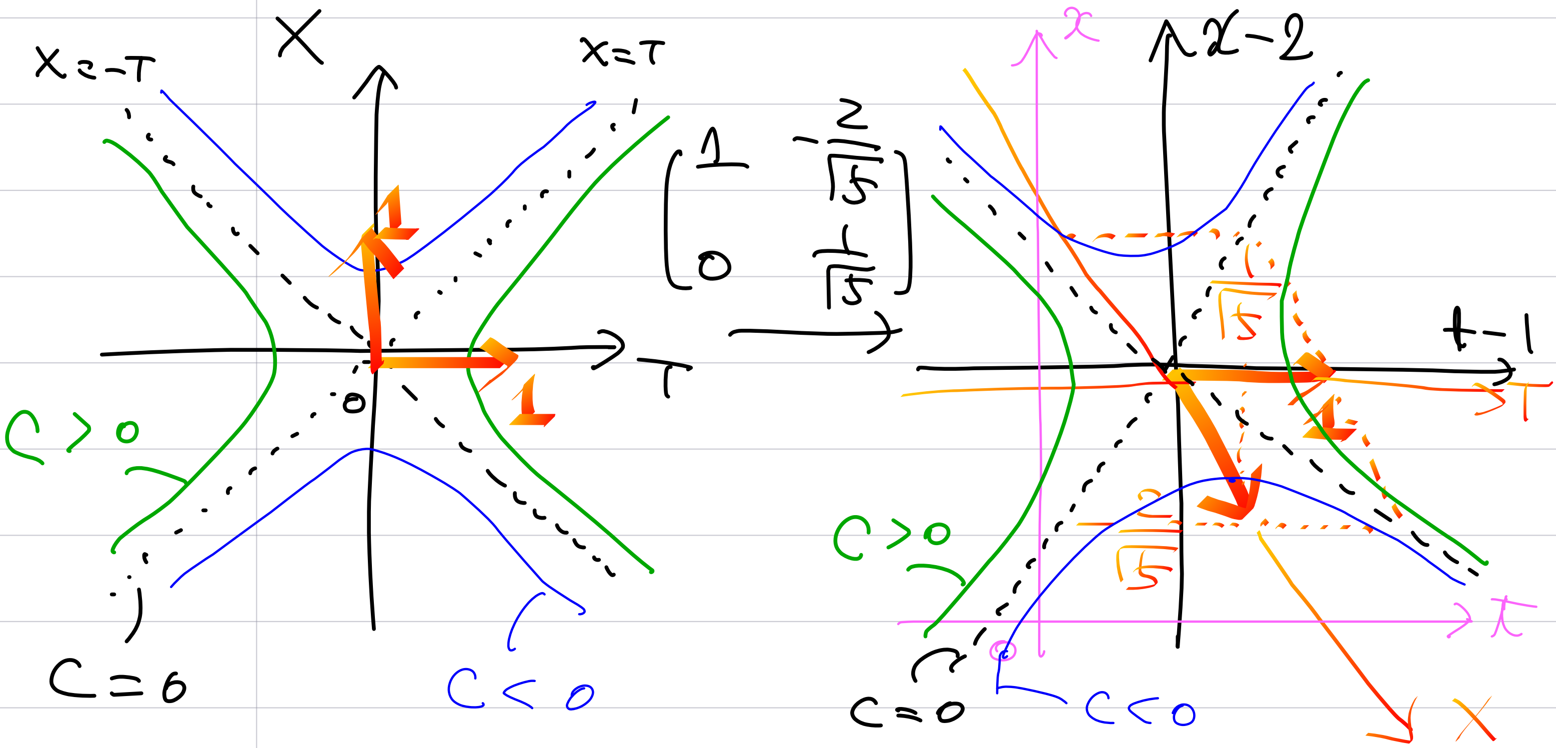
であるから, $k=2$, $l=\sqrt{5}$ である。

(2) $\begin{bmatrix} T \\ X \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t-1 \\ x-2 \end{bmatrix}$ より

$$\begin{bmatrix} t-1 \\ x-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} T \\ X \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ X \end{bmatrix}$$ である。

$$\therefore \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ X \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$T^2-X^2=C$ は C の符号により下図左のようであり, これを変換することで (t,x) 平面の解が得られる。



章末

3.1 (1) $(1-t)\dfrac{dx}{dt}+(1-x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{dx}{1-x}+\dfrac{dt}{1-t}=0$

$\therefore \log|1-x|+\log|1-t|=C$ (定数)

$\therefore (1-x)(1-t)=C_1$ $(=\pm e^C$, 定数)

(2) $x\dfrac{dx}{dt}+t=0 \Leftrightarrow xdx+tdt=0$

$\therefore \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{t^2}{2}=C$ (定数)

(3) $\dfrac{dx}{dt}=e^{t+x} \Leftrightarrow e^{-x}dx=e^t dt$

$\therefore -e^{-x}=e^t+C$ (定数)

(4) $\dfrac{dx}{dt}=\cos(t-x)-\cos(t+x)$

$=\cos t\cos x+\sin t\sin x$

$-\cos t\cos x+\sin t\sin x=2\sin t\sin x$

$\Leftrightarrow \dfrac{dx}{\sin x}=2\sin t dt$

$T=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと, $dT=(1+T^2)\dfrac{dx}{2}$,

$\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{2T}{1+T^2}$

$\tan' = 1+\tan^2$

$\therefore \dfrac{dx}{\sin x}=\dfrac{\frac{2dT}{1+T^2}}{\frac{2T}{1+T^2}}=\dfrac{dT}{T}, =2\sin t dt$

$\therefore \log|T|=-2\cos t+C$ (Cは定数)

$\therefore \tan\dfrac{x}{2}=Ae^{-2\cos t}$ $(A=\pm e^C)$ //

3.1 (5) $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{(1-x^2)t} \iff \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{t}\,dt$

$x = \sin\theta$ により、 $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = d\theta$

$\therefore\ \theta = \dfrac{2}{3}t^{3/2} + C$ （Cは定数）

$\therefore\ x = \sin\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{t}^3 + C\right)$ //

(6) $\dfrac{dx}{dt} = xte^{t^2}$

$\iff \dfrac{dx}{x} = te^{t^2}dt = e^s\dfrac{ds}{2}$ （$t^2 = s$とおいた）

$\therefore\ \log|x| = \dfrac{e^s}{2} + C$ （Cは定数）

$\therefore\ x = \pm e^C e^{e^{t^2}/2} = Ae^{e^{t^2}/2}$ （Aは定数） //

3.2 (1) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{t+x} = \dfrac{1}{1+x/t}$. $y = \dfrac{x}{t}$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(ty)}{dt} = y + t\frac{dy}{dt}, = \frac{1}{1+y}.$$

$$\therefore\ t\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{1+y} - y\right) = \frac{1-y-y^2}{1+y},$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+y}{-1+y+y^2}dy = \frac{dt}{-t}.$$

$y^2+y-1 = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(y+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(y+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ であり

$\dfrac{y+1}{y^2+y-1} = \dfrac{a}{y+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \dfrac{b}{y+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ とすると

$\left(\sqrt{5}(b-a) = 1.\right)$ $\begin{cases} a+b=1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}a + \frac{1+\sqrt{5}}{2}b = 1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a = \frac{1-\sqrt{5}^{-1}}{2} \\ b = \frac{1+\sqrt{5}^{-1}}{2} \end{cases}$

$$\therefore\ a\log\left|y+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| + b\log\left|y+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| = -\log|t| + C,$$

$$\left(y+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^a\left(y+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^b = At \quad \left(\begin{array}{l} C\text{は定数}, \\ A = \pm e^C \end{array}\right)$$

//

注 $T = \dfrac{t}{x}$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t+x}{t} = 1+\frac{x}{t},\ T + x\frac{dT}{dx} = 1+T^{-1},\ \frac{dT}{1+T^{-1}-T} = \frac{dx}{x}.$$

となるが、本質的に同じことである。

3.2 (2) $\dfrac{dx}{dt} = \tan\dfrac{x}{t} + \dfrac{x}{t}$. $y = x/t$ とおく, $x' = (ty)' = y + ty'$

$\Leftrightarrow y + t\dfrac{dy}{dt} = \tan y + y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{\tan y} = \dfrac{dt}{t}$.

$\dfrac{dy}{\tan y} = \dfrac{(\sin y)'}{\sin y}dy$ より, $\log|\sin y| = \log|t| + C$.

$\therefore \sin y = At$ (Aは定数, $A = \pm e^{C}$)

(3) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t+2x+1}{t-x-2}$. $\begin{cases} t = \tau + \alpha \\ x = \xi + \beta \end{cases}$ とおくと (α, βは定数)

$\Leftrightarrow \dfrac{d\xi}{d\tau} = \dfrac{\tau + 2\xi + (\alpha + 2\beta + 1)}{\tau - \xi + (\alpha - \beta - 2)}$

$= \dfrac{\tau + 2\xi}{\tau - \xi}$: $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0 \\ \alpha - \beta - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$ のとき.

$\eta = \xi/\tau$ とおけば

$\eta + \tau\dfrac{d\eta}{d\tau} = \dfrac{1+2\eta}{1-\eta}$ $\therefore \tau\dfrac{d\eta}{d\tau} = \dfrac{1+\eta-\eta^2}{1-\eta}$.

$\therefore \dfrac{d\tau}{\tau} = \dfrac{-1+\eta}{-1-\eta+\eta^2}d\eta = \dfrac{\eta-1}{(\eta-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}}d\eta$

$= \left(\dfrac{a}{\eta - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} + \dfrac{b}{\eta - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)d\eta$; $\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}a + \frac{1-\sqrt{5}}{2}b = 1 \end{cases}$ ($\Leftrightarrow a - b = \frac{1}{\sqrt{5}}$)

$\therefore \log|\tau| = \log\left|\left(\eta - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^a\left(\eta - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^b\right| + C$

($a = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$, $b = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$; Cは定数)

3.2 (4) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t+x+3}{2t+2x+1}$. $t+x = \dfrac{1}{2}(2t+2x)$ であり,

$u = 2t+2x+1$ とおくと, $\dfrac{du}{dt} = 2 + 2\dfrac{dx}{dt}$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\frac{du}{dt} - 1 = \frac{\frac{1}{2}u + \frac{5}{2}}{u} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2u}.$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{du}{dt} = 3 + \frac{5}{u}$$

$$\Leftrightarrow\ dt = \frac{du}{3+\frac{5}{u}} = \frac{u\,du}{3u+5} = \left(\frac{1}{3} + \frac{-\frac{5}{3}}{3u+5}\right)du$$

$$\therefore\ t + C = \frac{u}{3} - \frac{5}{9}\log\left|u + \frac{5}{3}\right| \quad (C\text{は定数})$$

$$Ae^{t} = e^{u/3}\cdot\left|u + \frac{5}{3}\right|^{-5/9}$$

$$\Leftrightarrow\ Ae^{t - \frac{u}{3}} = \left|2t + 2x + \frac{8}{3}\right|^{-5/9}$$

$$= Ae^{\frac{t}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}}$$

3.2 (5) $t\dfrac{dx}{dt} = x + \sqrt{t^2+x^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} + \sqrt{1+\left(\dfrac{x}{t}\right)^2}$ なので、$y = \dfrac{x}{t}$ とおくと

$\Leftrightarrow y + t\dfrac{dy}{dt} = y + \sqrt{1+y^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{dt}{t}$. ——(*)

ここで $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ であるので

$\log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) = \log|t| + C$

$\therefore\ y+\sqrt{1+y^2} = At$ (Aは定数; $A = \pm e^C$)

よって $1+y^2 = (At-y)^2$,

$\therefore\ A^2t^2 - 2Ayt - 1 = A^2t^2 - 2Ax - 1 = 0$,

$x = \dfrac{A^2t^2-1}{2A}$. //

Check $t\dfrac{dx}{dt} = At^2$;

$\sqrt{t^2+x^2} = \sqrt{t^2 + \left(\dfrac{At^2}{2}\right)^2 - \dfrac{t^2}{2} + \left(\dfrac{1}{2A}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{At^2+1}{2A}\right)^2}$

$\therefore\ x + \sqrt{t^2+x^2} = \dfrac{A^2t^2-1}{2A} + \dfrac{At^2+1}{2A} = At^2$. OK //

注) (*) で $y = \dfrac{e^s - e^{-s}}{2}$ とおいても解ける。

[$\sqrt{1+y^2} = \dfrac{e^s+e^{-s}}{2} = \dfrac{dy}{ds}$ より、$\dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = ds$.]

3.2 (6) $\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{t^2 - x^2} = \frac{2y}{1-y^2} \quad \left(y = \frac{x}{t}\right).$

$= y + t\frac{dy}{dt} \qquad \therefore\ t\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{1-y^2} - y.$

$\frac{dt}{t} = \frac{dy}{\frac{2y}{1-y^2} - y} = \frac{(1-y^2)\,dy}{2y - y(1-y^2)}$

$= \frac{1-y^2}{y} \cdot \frac{dy}{2-(1-y^2)} = \frac{2-(1+y^2)}{(1+y^2)} \frac{dy}{y}$

$= \left(\frac{2}{y(1+y^2)} - \frac{1}{y}\right)dy = \left(\frac{1}{y} - \frac{2y}{1+y^2}\right)dy$

$\therefore\ \log|t| + C = \log|y| - \log|1+y^2| = \log\left|\frac{y}{1+y^2}\right|$

$\frac{y}{1+y^2} = At \quad (A = \pm e^C,\ 定数).$

$\therefore\ \frac{x}{t^2+x^2} = A, \qquad x^2 + t^2 - \frac{x}{A} = 0$

$\therefore\ \left(x - \frac{1}{2A}\right)^2 = \frac{1}{4A^2} - t^2$ or $x = B \pm \sqrt{B^2 - t^2}$ //

check $(x-B)^2 = B^2 - t^2 \overset{?}{\Rightarrow} \frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{t^2 - x^2}$

$x^2 - 2Bx + t^2 = 0 \Rightarrow 2xx' - 2Bx' + 2t = 0$

$\therefore\ x'(x-B) + t = 0,$

$x' = \frac{-t}{x-B} = \frac{+2tx}{-2x(x-B)} = \frac{2tx}{2xB - 2x^2}.$

$2xB - x^2 = t^2$ であるから, OK. //

問を修正 ↓(2項目の分母子が逆)

3.2(7) $\dfrac{dx}{dt} = 1 + \dfrac{x}{t} + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2$; $y = \dfrac{x}{t}$ とおくと

$y + t\dfrac{dy}{dt} = 1 + y + y^2$, $t\dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2$.

$\therefore \dfrac{dt}{t} = \dfrac{dy}{1+y^2}$.

$y = \tan u$ により, $\dfrac{dy}{du} = 1 + \tan^2 u = 1 + y^2$
であるから $\dfrac{dy}{1+y^2} = du$ となり, 積分して

$\log|t| + C = u = \tan^{-1} y$ (Cは定数)

$\therefore$ $y = \tan(\log|t| + C)$ //

3.3 (1) $(1-x)(1-t)=C$, 定数

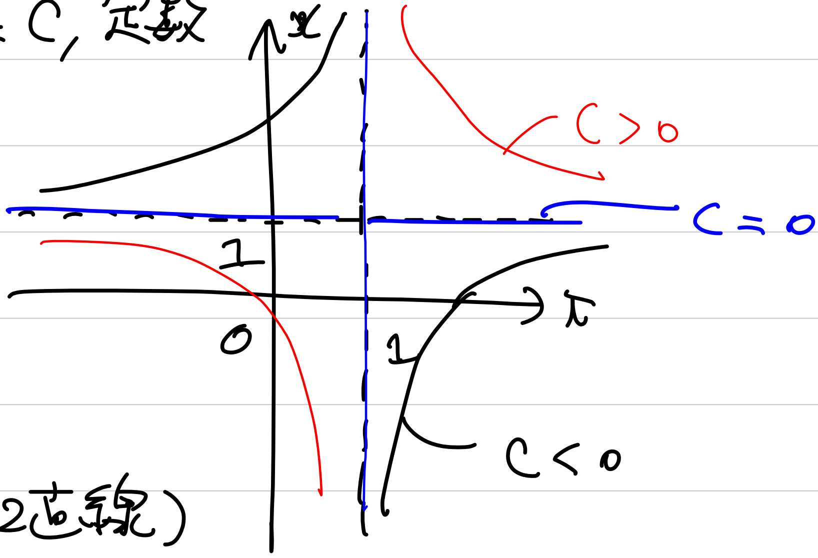
$t\neq 1$ のとき

$$x-1=\frac{C}{t-1}$$

であり，$C\neq 0$ ならば

これは双曲線．

($C=0$ ならば交わる2直線)



(2) $\frac{x^2}{2}+\frac{t^2}{2}=C$ (定数).

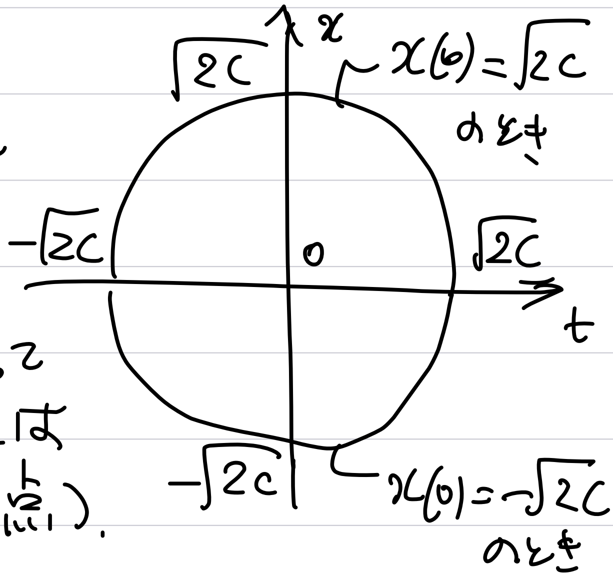
実数値の $x(t)$ は $C\geq 0$ のとき

$$-\sqrt{2C}\leq t\leq\sqrt{2C}$$

で定義され，$x(0)$ の正負に従って

原点を中心とする上半円または

下半円を描く ($C=0$ なら1点).



(3) $-e^{-x}=e^t+C$ (定数) より

$$x=-\log(-C-e^t)$$

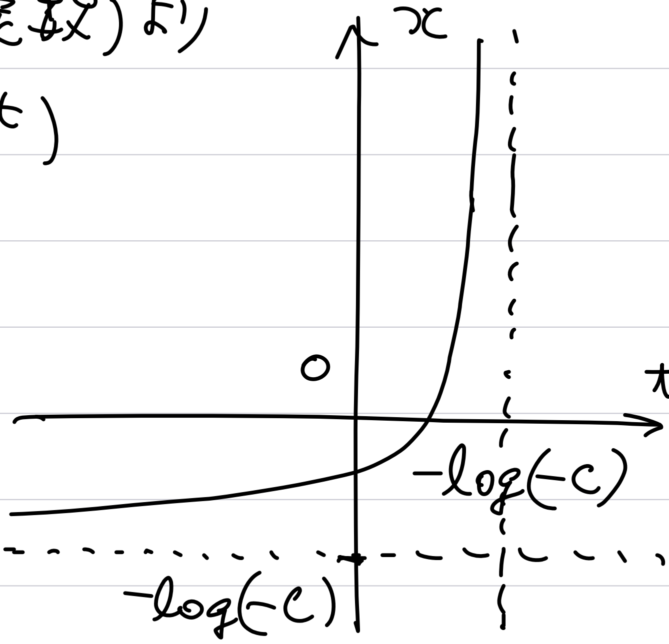
実数値の $x(t)$ は，

$$-C-e^t>0$$

より，$C<0$ のときのみ

$$t<\log(-C)$$

で定義される。



4章

4.2.1 (1) $x' + x = tx^3$.　　x^{-3}を掛けると,

$$\frac{x'}{x^3} + \frac{1}{x^2} = t \Leftrightarrow \frac{1}{-2}(x^{-2})' + x^{-2} = t.$$

$u = x^{-2}$とおくと, $-\frac{u'}{2} + u = t$ である。—(*)

定数変化法を用いる。

まず $-\frac{u'}{2} + u = 0$ の解は, $u = Ce^{2t}$ (Cは定数).

そこで, $u = C(t)e^{2t}$ を(*)に代入すると

$$-\frac{1}{2}(C'e^{2t} + 2Ce^{2t}) + Ce^{2t} = t \quad \therefore C' = -2te^{-2t}$$

$$\therefore C(t) = \int^t -2se^{-2s}ds = te^{-2t} + \frac{e^{-2t}}{2} + C$$

$$\therefore u = C(t)e^{2t} = t + \frac{1}{2} + Ce^{2t} \ (C\text{は定数})$$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{2} + Ce^{2t}}}.$$ //

(2) $2tx'+x=-3t^2x^2$. 両辺に x^{-2} を掛け $u=\frac{1}{x}$ とおくと,

$$2t\frac{x'}{x^2}+\frac{1}{x}=-3t^2 \iff -2tu'+u=-3t^2.$$

定数変化法を用いる。まず

$-2tu'+u=0 \iff u=2tu'$, $\frac{u'}{u}=\frac{1}{2t}$ を解くと

$\log u=\frac{1}{2}\log|t|+$定数 ∴ $u=Ct^{1/2}$ (Cは定数).

そこで, $u=C(t)t^{1/2}$ が $-2tu'+u=-3t^2$ をみたすとする

$$\iff -2t\left(C't^{1/2}+\frac{1}{2}Ct^{-1/2}\right)+Ct^{1/2}=-3t^2$$

$$\iff C'(t)=\frac{3}{2}t^{1/2}$$

∴ $C(t)=t^{3/2}+C$ (Cは定数),

$$x(t)=\frac{1}{C(t)t^{1/2}}=\frac{1}{t^2+Ct^{1/2}}.$$

---

check

$$(x^{-1})'=2t+\frac{C}{2}t^{-1/2}$$

$$+)\ \frac{1}{-2t}x^{-1}=-\frac{t}{2}-\frac{C}{2}t^{-1/2}$$

$$\frac{3}{2}t \ //.$$

章末

4.1 (1) $tx' + x = t(1-t^3)$

$\Leftrightarrow \quad (tx)' = t(1-t^3) = t - t^4$

$\therefore \; tx(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{5} + C$ (Cは定数),

$x(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^4}{5} + \frac{C}{t}$. //

(2) $x' - x = \cos t$. 定数変化法を用いる。

まず, $x' - x = 0$ の解は $x = Ce^t$ (Cは定数).

そこで $x(t) = C(t)e^t$ とすれば

$x' - x = C'e^t = \cos t \quad \therefore \; C'(t) = e^{-t}\cos t$.

これを積分すると

$C(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t\right) + C$ (Cは定数)

$\therefore \; x(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + Ce^t$. //

<u>check</u>

$\left(e^{-t}(a\cos t + b\sin t)\right)'$

$= -e^{-t}(a\cos t + b\sin t) + e^{-t}(-a\sin t + b\cos t)$

$= \left((b-a)\cos t - (a+b)\sin t\right)e^{-t}$

$\therefore \begin{cases} b - a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

4.1 (3) $t^2x' + (1-2t)x = t^2$. ——(*)

$$t^2x' + (1-2t)x = 0 \iff \frac{x'}{x} = \frac{2t-1}{t^2} = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}$$

$$\iff x(t) = e^{2\log t + t^{-1}} \cdot C$$

$$= t^2 e^{t^{-1}} \cdot C \qquad (Cは定数)$$

そこで $x(t) = t^2 e^{1/t} C(t)$ とおくと

$$x' = (t^2 e^{1/t})' C(t) + t^2 e^{1/t} C'(t)$$

$$= t^2 e^{1/t} \left(\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \right) C(t) + C'(t) \right)$$

$$= \frac{2t-1}{t^2} x(t) + t^2 e^{1/t} C'(t).$$

(*)より、$x' = \dfrac{2t-1}{t^2} x + 1$ であるから

$$t^2 e^{1/t} C'(t) = 1 \qquad \therefore C'(t) = \frac{e^{-1/t}}{t^2}$$

$$\therefore \quad C(t) = e^{-1/t} + 定数$$

$$\therefore \quad x(t) = t^2 e^{1/t} (e^{-1/t} + 定数)$$

$$= t^2 + C t^2 e^{1/t} \quad (Cは定数).$$

//

4.1 (4) $x' + 2x\tan t = \sin t$,

まず $x' + 2x\tan t = 0 \iff x' + 2x\dfrac{\sin t}{\cos t} = 0$

$\iff \dfrac{dx}{2x} = -\dfrac{\sin t}{\cos t}dt$ であり, この解は

$\dfrac{1}{2}\log x(t) = \log|\cos t| + C$ ∴ $x(t) = A\cos^2 t$

である (C は定数, $A = \pm e^C$). $x(t) = A(t)\cos^2 t$ により,

$A'\cos^2 + A(2\cos)(-\sin) + 2A\sin\cos = \sin t$,

$x' + 2x\tan t = \sin t \iff A'(t)\cos^2 t = \sin t$

∴ $A(t) = \displaystyle\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{\cos t} + C$

∴

$x(t) = \cos t + C\cos^2 t$. ($C$ は定数).

---

check

$x' = -\sin t - 2C\sin t\cos t$

$+)\ 2x\tan t = 2\sin t + 2C\sin t\cos t$

$x' + 2x\tan t = \sin t$. //

4.2 (1) $tx' + x = x^2 \log t.$

$\Leftrightarrow \quad t\dfrac{x'}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \log t.$ $u = \dfrac{1}{x}$ とおくと

$\Leftrightarrow \quad -tu' + u = \log t$ である。

$-tu' + u = 0$ のとき, $u = Ct$ (Cは定数)

$u(t) = C(t) \cdot t$ とすれば

$-tu' + u = \log t \Leftrightarrow -t^2 C'(t) = \log t$

$\therefore \quad C(t) = -\displaystyle\int^t \frac{\log t}{t^2} dt$

$= \dfrac{\log t}{t} - \displaystyle\int \frac{(\log t)'}{t} dt = \dfrac{\log t}{t} + \dfrac{1}{t} + C.$

$\therefore \quad u(t) = C(t) \cdot t = \log t + 1 + Ct$

$\therefore \quad x(t) = \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{1 + \log t + Ct}$ (Cは定数) //

<u>check</u> $t(x^{-1})' = tu' = t\left(\dfrac{1}{t} + C\right) = 1 + tC,$

$-)\quad x^{-1} = 1 + \log t + Ct.$

$tu' - u = -\log t.$ //

4.2 (2) $tx' + x = t\sqrt{x} \iff t\dfrac{x'}{x^{1/2}} + x^{1/2} = t.$

$u = x^{1/2}$ とおくと $u' = \dfrac{1}{2}\dfrac{x'}{x^{1/2}}$, $2u't + u = t.$

$2u't + u = 0$ のとき, $\log u = \displaystyle\int \frac{dt}{-2t} = -\frac{1}{2}\log t + C$

∴ $u = Ae^{-\frac{1}{2}\log t} = At^{-1/2}$ ($A = \pm e^{C}$, Cは定数)

$u = A(t)t^{-1/2}$ とすれば $u' = A't^{-1/2} - \frac{1}{2}At^{-3/2}$

$u = -2tu'$

$\dfrac{1}{-2t} = \dfrac{u'}{u}$

$$
\begin{array}{rl}
 & 2u't + u = t \\
+) & \dfrac{u}{2t} = \dfrac{1}{2}At^{-3/2} \\
\hline
 & 1/2 = A't^{-1/2}
\end{array}
$$

$\iff A'(t)\cdot 2t^{1/2} = t \iff A'(t) = \dfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}$

∴ $A(t) = \dfrac{1}{3}t^{3/2} + C.$ (Cは定数)

∴ $x(t) = u^2 = (A(t)t^{-1/2})^2 = \left(\dfrac{t}{3} + \dfrac{C}{\sqrt{t}}\right)^2$

<check>

$x' = 2\left(\dfrac{t}{3} + \dfrac{C}{\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{C}{\sqrt{t^3}}\right)$

$t^{-1}x = \left(\dfrac{t}{3} + \dfrac{C}{\sqrt{t}}\right)\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{C}{\sqrt{t^3}}\right)$

+)

$\left(\dfrac{t}{3} + \dfrac{C}{\sqrt{t}}\right)\cdot\dfrac{3}{3} = \sqrt{x}$

ok.

4.3
$$x' + x^2 = R(t)$$
$$-)\ x_1' + x_1^2 = R(t)$$
$$y = x - x_1 \quad (x = x_1 + y)$$
$$0 = (x - x_1)' + (x^2 - x_1^2) = y' + y\cdot(x + x_1)$$
$$= y' + y(2x_1 + y) = y' + 2x_1 y + y^2$$

4.4 (1) $x' + x^2 + 3x + 2 = 0$.

$x_1 = k$ (定数) が解とすると、$k^2 + 3k + 2 = 0$ ∴ $\begin{cases} k = -1 \\ k = -2 \end{cases}$

4.3と同様に、$x = k + y$ $(k = -1, -2)$ とすると

$$y' + (k+1+y)(k+2+y) = y' + (2k+3)y + y^2 = 0.$$

$u = \dfrac{1}{y}$ とおくと $\Leftrightarrow$ $-u' + (2k+3)u = -1$

$u = C(t)e^{(2k+3)t}$ とおき $\Leftrightarrow$ $-C'(t)e^{(2k+3)t} = -1$

∴ $C(t) = \dfrac{e^{-(2k+3)t}}{-(2k+3)} + C$ （Cは定数）

∴ $x(t) = k + \left(Ce^{(2k+3)t} - \dfrac{1}{2k+3}\right)^{-1}$

（$k = -1, -2$; Cは定数）//

check $x' = -(2k+3)Ce^{(2k+3)t}\cdot\left(Ce^{(2k+3)t} - \dfrac{1}{2k+3}\right)^{-2}$

$$(x+1)(x+2) = \left(k+1+\left(Ce^{(2k+3)t} - \frac{1}{2k+3}\right)^{-1}\right)\left(k+2+\left(Ce^{(2k+3)t} - \frac{1}{2k+3}\right)^{-1}\right)$$
$$= \frac{(2k+3)\left(Ce^{(2k+3)t} - \frac{1}{2k+3}\right) + 1}{\left(Ce^{(2k+3)t} - \frac{1}{2k+3}\right)^2}$$

+)

$$x' + (x+1)(x+2) = 0.$$ //

4.4 (2) $x' + e^{t}x^{2} + x = e^{-t}$

$x_1 = e^{-t}$ は $-e^{-t} + e^{t}\cdot e^{-2t} + e^{-t} = e^{-t}$ より解

$x = x_1 + y$ とすれば

$$\begin{array}{rl} & x' + e^{t}x^{2} + x = e^{-t} \\ -) & x_1' + e^{t}x_1^{2} + x_1 = e^{-t} \\ \hline & y' + e^{t}y(x + x_1) + y = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad y' + e^{t}(2x_1 + y)y + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-t}y' + (2x_1 + e^{-t})y = -y^{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-t}u' - 3e^{-t}u = 1 \quad : u = \frac{1}{y}$$

$u' - 3u = 0$ とすると $u = Ce^{3t}$ (Cは定数)

そこで $u = C(t)e^{3t}$ とすると

$$e^{-t}(C'e^{3t} + 3Ce^{3t}) - 3e^{-t}Ce^{3t} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(t) = e^{-2t} \quad \therefore C(t) = \frac{e^{-2t}}{-2} + C.$$

$$\therefore \quad u(t) = e^{3t}\left(\frac{e^{-2t}}{-2} + C\right) = y(t)^{-1}$$

$$\therefore \quad x(t) = e^{-t} + \frac{1}{e^{3t}\left(\frac{e^{-2t}}{-2} + C\right)}$$

$$= \frac{1}{e^{t}}\left(1 + \frac{1}{Ce^{3t} - 1/2}\right) \quad (C\text{は定数}) \quad //$$

7 $\underline{\text{check}}$ $x(t) = e^{-t} + \dfrac{1}{e^{3t}\left(\frac{e^{-2t}}{-2} + C\right)}$

$\Leftrightarrow \quad xe^{t} = 1 + \dfrac{1}{Ce^{2t} - 1/2}$

$\overset{?}{\Rightarrow} \quad x' + e^{t}x^{2} + x = e^{-t}$

$(xe^{t})' = x'e^{t} + xe^{t} = \dfrac{-2Ce^{2t}}{(Ce^{2t} - 1/2)^{2}}$

$\therefore$

$(x' + x)e^{t} + (xe^{t})^{2} \quad (= 1\,?)$

$= \dfrac{-2Ce^{2t}}{(Ce^{2t} - 1/2)^{2}} + \left(1 + \dfrac{1}{Ce^{2t} - 1/2}\right)^{2}$

$= \dfrac{-2Ce^{2t} + 1 + 2(Ce^{2t} - 1/2)}{(Ce^{2t} - 1/2)^{2}} + 1 = 1.$

ok

4.5 $t^2 x' + t^2 x^2 - 2 = 0$.

(1) $x_1 = \frac{-1}{t}$ は, $t^2 \cdot \frac{1}{t^2} + t^2 \frac{1}{t^2} - 2 = 0$ で解 //

(2) $y = x - x_1 = x + \frac{1}{t}$; $t^2 x_1' + t^2 x_1^2 - 2 = 0$

$$
\begin{array}{rl}
-) & t^2 x' + t^2 x^2 - 2 = 0 \\
\hline
& t^2 y' + t^2 y(x + x_1) = 0 \\
& = t^2 y' + t^2 y(2x_1 + y)
\end{array}
$$

∴ $t^2 y' + 2x_1 t^2 y + t^2 y^2 = 0 \Leftrightarrow y' + y^2 - \frac{2y}{t} = 0$ //

(3) $y = \frac{u'}{u}$ とおくと, $\frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{u^2} + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{2}{t} \frac{u'}{u}$

∴ $u'' = \frac{2}{t} u'$, $\frac{u''}{u'} = \frac{2}{t}$

∴ $\log u' = 2 \log |t| + C$

$u' = A t^2$, $u = \frac{A}{3} t^3 + B$.

∴ $x = y - \frac{1}{t} = \frac{A t^2}{\frac{A}{3} t^3 + B} - \frac{1}{t}$

$= \frac{t^2}{t^3/3 + C} - \frac{1}{t}$ ($C = \frac{B}{A}$, 定数)

<u>check</u>

$$x = \frac{t^2}{t^3/3 + C} - \frac{1}{t} \overset{?}{\Rightarrow} t^2x' + t^2x^2 - 2 = 0$$

$$x' = \frac{2t}{t^3/3+C} - \frac{t^2 \cdot t^2}{(t^3/3+C)^2} + \frac{1}{t^2}$$

$$= \frac{2t(t^3/3+C) - t^4}{(t^3/3+C)^2} + \frac{1}{t^2},$$

$$x^2 = \frac{t^4}{(t^3/3+C)^2} - \frac{2t}{t^3/3+C} + \frac{1}{t^2}.$$

$$\therefore x' + x^2 = \frac{2}{t^2}. \quad //$$

5.1.1. (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \iff xdx = -ydy$

$\therefore \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$

(2) $y/x = u$ とおくと, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xu) = u + x\frac{du}{dx}$

$\therefore u + x\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u} \iff x\frac{du}{dx} = -u - \frac{1}{u}$

$\iff \frac{dx}{x} = -\frac{du}{u+\frac{1}{u}} = -\frac{udu}{u^2+1}$

$\therefore \frac{du}{u+\frac{1}{u}} = -\frac{dx}{x}$ //

(3) $u = \tan\theta$ とすると $du = (\tan\theta)'d\theta = (1+\tan^2\theta)d\theta$

$\therefore \frac{du}{u+u^{-1}} = \frac{u}{u^2+1}\frac{du}{d\theta}d\theta = \frac{u}{\cancel{u^2+1}}\cancel{(1+u^2)}d\theta$

$\therefore \tan\theta\, d\theta = -\frac{dx}{x}$

$= -\frac{(\cos\theta)'}{\cos\theta}d\theta \quad \therefore \log|\cos\theta| = \log|x| + C.$

$\therefore x = A\cos\theta \quad (A = \pm e^C, 定数).$

このとき, $y = xu = A\cos\theta\cdot\tan\theta = A\sin\theta.$ //

別) $\frac{udu}{u^2+1} = \frac{d(u^2+1)}{2(u^2+1)} = \frac{1}{2}d\log(u^2+1)$

$\therefore \log\sqrt{u^2+1} = -\log|x| + C$ (Cは定数)

$\sqrt{u^2+1} = Ax^{-1}$ $(A = \pm e^C)$

$\therefore \frac{y^2}{x^2} + 1 = A^2\frac{1}{x^2} \quad \therefore x^2 + y^2 = A^2$

5.2.1. (5.9) : $x^2+x^4y^3-y^4=C$ （Cは定数）

x^2の2次方程式とみると

$$\left(x^2y^{3/2}+\frac{1}{2}y^{-3/2}\right)^2-\frac{1}{4}y^{-3}-y^4=C$$

$$\therefore\quad x^2y^{3/2}=-\frac{1}{2}y^{-3/2}\pm\sqrt{C+\frac{1}{4y^3}+y^4}$$

$$x^2y^3=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{Cy^3+\frac{1}{4}+y^7}$$

$$=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{y^3(C+y^4)+\frac{1}{4}}$$

$$x^2=\frac{1}{y^3}\left(-\frac{1}{2}\pm\sqrt{y^3(C+y^4)+\frac{1}{4}}\right).$$

実数Cに対し、$y>0$を$C+y^4>0$にとれば、

$\sqrt{y^3(C+y^4)+\frac{1}{4}}>\frac{1}{2}$. よって、右辺$>0$となり

$x=\sqrt{右辺}$も実数となる. よって、(5.9)をみたす

(x, y)は全てのCで存在する。//

5.2.2. $F(x,y)=x^2-y^2=C$ (定数) のとき

(1) $dF=0$ ∴ $xdx-ydy=0$ —(*)

∴ $y\dfrac{dy}{dx}=x$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$.

(*) より $\displaystyle\int^x xdx=\int^y ydy$ であるから

$\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{y^2}{2}+k$ (kは定数) を得る。

(2) $u=y/x$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$

∴ $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}-u \Leftrightarrow \dfrac{du}{u^{-1}-u}=\dfrac{dx}{x}$.

$u=\dfrac{\sinh t}{\cosh t}$ とおくと, $\dfrac{du}{dt}=1-\dfrac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}=\dfrac{1}{\cosh^2 t}$,

∴ $\dfrac{du}{u^{-1}-u}=\dfrac{\frac{\sinh t}{\cosh t}\cdot\left(1-\frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}\right)dt}{1-\frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}}=\dfrac{\sinh t}{\cosh t}dt$

これが $=\dfrac{dx}{x}$ より, $\log|x|=\log|\cosh t|+A$

(3) $x=k\cosh t$ ($k=\pm e^A$, 定数)

となるから, $y=ux=\dfrac{\sinh t}{\cosh t}\cdot k\cosh t=k\sinh t$.

$\cosh^2 t-\sinh^2 t=\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=1$

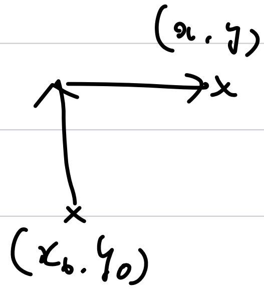
であるから, $x^2-y^2=C$ (定数) となる。//

注 ($C<0$ のとき) $C=k^2$ なので k を実数に限ると $C\geqq 0$ だが,
(2)の解においてAは一般に複素数も許されるため,
$x^2-y^2=C$ (Cは任意の定数) が得られる。

5.3.1 (1) $(x^2-y)dx+(y^2-x)dy=0$ について、完全性は

$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2-y)=-1=\dfrac{\partial}{\partial x}(y^2-x)$ より、解を求める。

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}(s^2-y)ds+\int_{y_0}^{y}(t^2-x_0)dt$$



$$=\left[\frac{s^3}{3}-sy\right]_{s=x_0}^{x}+\left[\frac{t^3}{3}-x_0t\right]_{t=y_0}^{y}$$

$$=\left\{\frac{x^3-x_0^3}{3}-(x-x_0)y\right\}+\left\{\frac{y^3-y_0^3}{3}-x_0(y-y_0)\right\}$$

$$=\frac{x^3+y^3}{3}-\frac{x_0^3+y_0^3}{3}-(xy-x_0y_0)=\frac{x^3+y^3}{3}-xy+\text{定数}$$

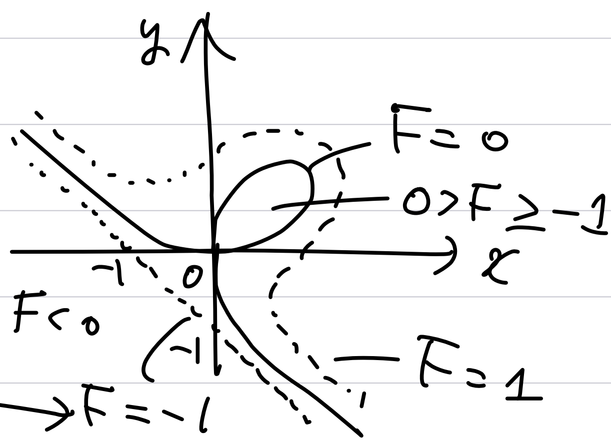
$$\therefore\ \frac{x^3+y^3}{3}-xy=C.\quad (C\text{は定数})$$

(2) $(x,y)=\left(\dfrac{3t}{1+t^3},\dfrac{3t^2}{1+t^3}\right)$ (tは実数) のとき

$$x^3+y^3-3xy=27\frac{t^3+t^6}{(1+t^3)^3}-3\frac{3t\cdot3t^2}{(1+t^3)^2}=0$$

であるから、$C=0$ の解曲線を与える。

$$\left(\begin{aligned}&x+y=-1\Rightarrow\\&x^3+y^3-3xy=-(x^2-xy+y^2)-3xy\\&=-x^2-(1+x)^2+2x(1+x)=-1\end{aligned}\right)\longrightarrow F=-1$$



章末5

5.1 (1) $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0.$

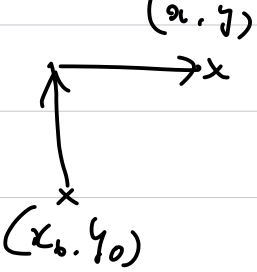
$\frac{\partial}{\partial y}(\cos y + y\cos x) = -\sin y + \cos x = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x - x\sin y)$

より、完全。解を求める。

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x}(\cos y + y\cos s)ds + \int_{y_0}^{y}(\sin x_0 - x_0\sin t)dt$$

$$= \{(x-x_0)\cos y + y(\sin x - \sin x_0)\} + \{(y-y_0)\sin x_0 + x_0(\cos y - \cos y_0)\}$$

$$= (x\cos y + y\sin x) - (x_0\cos y_0 - y_0\sin x_0)$$



$\therefore$ $x\cos y + y\sin x = C$ (Cは定数) //

(2) $(2e^{2x}y - 4x)dx + e^{2x}dy = 0.$ 完全性は

$\frac{\partial}{\partial y}(2e^{2x}y - 4x) = 2e^{2x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x})$ より、解を求めると

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x}(2e^{2s}y - 4s)ds + \int_{y_0}^{y} e^{2x_0}dt$$

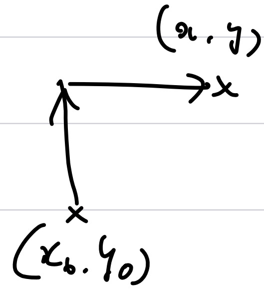
$$= (e^{2x} - e^{2x_0})y - 2(x^2 - x_0^2) + e^{2x_0}(y - y_0)$$

$$= (e^{2x}y - 2x^2) - (e^{2x_0}y_0 - 2x_0^2)$$

$\therefore$ $e^{2x}y - 2x^2 = C$ (Cは定数) //

5.1 (3) $\frac{2x}{y}dx+\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0.$

完全性は、$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y}\right)=-\frac{2x}{y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)$ より、解は



$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{2s}{y}ds+\int_{y_0}^{y}\left(1-\frac{x_0^2}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{x^2-x_0^2}{y}+(y-y_0)+x_0^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2}{y}+y\right)-\left(\frac{x_0^2}{y_0}+y_0\right)$$ より、$\frac{x^2}{y}+y=C$ (定数)。

(4) $(4x-5y+6)dx-(5x+3y-11)dy=0.$

$\frac{\partial}{\partial y}(4x-5y+6)=-5=\frac{\partial}{\partial x}(-5x-3y+11)$ より、完全。

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}(4s-5y+6)ds-\int_{y_0}^{y}(5x_0+3t-11)dt$$

$$=2(x^2-x_0^2)+(-5y+6)(x-x_0)-(5x_0-11)(y-y_0)+\frac{3}{2}(y^2-y_0^2)$$

$$=2x^2+(-5y+6)x+11y+\frac{3}{2}y^2$$
$$-2x_0^2-(-5y+6)x_0+(5x_0-11)y_0-5x_0y-\frac{3}{2}y_0^2$$

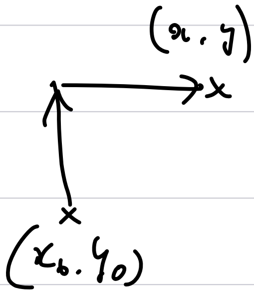
$$=2x^2+(-5y+6)x+11y+\frac{3}{2}y^2$$
$$-2x_0^2-(-5y_0+6)x_0-11y_0-\frac{3}{2}y_0^2$$ であるので、

$2x^2+(-5y+6)x+11y+\frac{3}{2}y^2=C$ (定数) が解。

[$\Longleftrightarrow 2x^2-5xy+\frac{3}{2}y^2+(6x+11y)=C.$]

5.1 (5) $(y+3x)dx + xdy = 0$. $\frac{\partial}{\partial y}(y+3x) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}x$ 故 完全.

解は



$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x}(y+3s)\,ds + \int_{y_0}^{y} x_0\,dt$$

$$= (x-x_0)y + 3\frac{x^2-x_0^2}{2} + x_0(y-y_0)$$

$$= \left(xy + \frac{3}{2}x^2\right) - \left(x_0y_0 + \frac{3}{2}x_0^2\right)$$

より, $xy + \frac{3}{2}x^2 = C$. (Cは定数) $\left[\Leftrightarrow\ y = \frac{C}{x} - \frac{3}{2}x\right]$

(6) $x(x+2y)dx + (x^2-y^2)dy = 0$.

$\frac{\partial}{\partial y}(x(x+2y)) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)$ より, 完全. 解は,

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} s(s+2y)\,ds + \int_{y_0}^{y}(x_0^2 - t^2)\,dt$$

$$= \frac{x^3-x_0^3}{3} + (x^2-x_0^2)y + x_0^2(y-y_0) - \frac{y^3-y_0^3}{3}$$

$$= \left(\frac{x^3-y^3}{3} + x^2y\right) - \left(\frac{x_0^3-y_0^3}{3} + x_0^2y_0\right)$$

より, $\frac{x^3-y^3}{3} + x^2y = C$ (Cは定数).

5.1 (7) $\dfrac{2xy+1}{y}dx + \dfrac{y-x}{y^2}dy = 0$.

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2xy+1}{y}\right) = -\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y-x}{y^2}\right)$ より，完全．

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{2sy+1}{y} ds + \int_{y_0}^{y} \frac{t-x_0}{t^2} dt$$

$$= (x^2 - x_0^2) + \frac{x-x_0}{y} + \left[\log t\right]_{y_0}^{y} + x_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)$$

$$= \left(x^2 + \frac{x}{y} + \log y\right) - \left(x_0^2 + \frac{x_0}{y_0} + \log y_0\right)$$

より，解は $x^2 + \dfrac{x}{y} + \log y = C$ （Cは一定）.

5.2

(1) $dF = \frac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} dR = \frac{1}{2r}(x\,dx + y\,dy) = \frac{x\,dx + y\,dy}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$(R = r^2)$

(2) $r^\alpha dF = \frac{r^{\alpha-1}}{2}(x\,dx + y\,dy)$ より,
$$\begin{cases} P = \frac{r^{\alpha-1}}{2} x = \frac{x}{2} R^{\frac{\alpha-1}{2}} \\ Q = \frac{r^{\alpha-1}}{2} y = \frac{y}{2} R^{\frac{\alpha-1}{2}} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} P_y = \frac{x}{2} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdot R_y R^{\frac{\alpha-3}{2}} = xy\frac{\alpha-1}{2} R^{\frac{\alpha-3}{2}} \\ Q_x = \frac{y}{2} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdot R_x R^{\frac{\alpha-3}{2}} = xy\frac{\alpha-1}{2} R^{\frac{\alpha-3}{2}} \end{cases}$$

(3)
$$r^\alpha dF \left[= R^{\alpha/2} dF = \frac{1}{2} R^{\frac{\alpha-1}{2}} dR = \frac{1}{2} \frac{d\left(R^{\frac{\alpha+1}{2}}\right)}{\frac{\alpha+1}{2}}\right]$$
$$\parallel$$
$$r^\alpha dr = \frac{d(r^{\alpha+1})}{\alpha+1} = d\left(\frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \qquad \therefore G = \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

6章

6.1.1 (1) $\dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ が x のみによるとき, 次を示す.

$$\lambda(x) = \exp\left(\int^x \frac{P_y - Q_s}{Q}(s,y)\,ds\right) \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_y P + \lambda P_y \\ = \lambda_x Q + \lambda Q_x.\end{array}$$

仮定より $\lambda_y = 0$ ゆえ, $\lambda P_y = \lambda_x Q + \lambda Q_x$ ならよい.

$$\Leftrightarrow \lambda_x = (\lambda P_y - \lambda Q_x)/Q \Leftrightarrow \frac{\lambda_x}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

λ の定義より, $\dfrac{d}{dx}(\log \lambda) = \dfrac{P_y - Q_x}{Q}(x,y)$ であるので OK. //

(2) $\dfrac{P_y - Q_x}{P}$ が y のみによるとき, 次を示す。

問題文を修正黒字部分

$$\lambda(y) = \exp\left(\int^y \frac{P_y - Q_x}{-P}(x,t)\,dt\right) \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_y P + \lambda P_y \\ = \lambda_x Q + \lambda Q_x.\end{array}$$

∵ 仮定より $\lambda_x = 0$ ゆえ, $\lambda_y P + \lambda P_y = \lambda Q_x$ なら良い.

$$\Leftrightarrow \lambda_y = \frac{\lambda Q_x - \lambda P_y}{P} \Leftrightarrow \frac{\lambda_y}{\lambda} = \frac{Q_x - P_y}{P}.$$

∵ $\log \lambda(y) = \displaystyle\int^y \frac{\lambda_y}{\lambda}\,dy = \int^y \frac{Q_x - P_y}{P}(x,t)\,dt$,

$$\lambda(y) = \exp\left(\int^y \frac{Q_x - P_y}{P}(x,t)\,dt\right). //$$

$$\left[= \exp\left(\int^y \frac{-1}{P(x,t)}\left(\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right)dt\right)\right]$$

6.2.1. $\begin{cases} e^{t}P(e^{t}x, e^{-t}y) = P(x,y) \\ e^{-t}Q(e^{t}x, e^{-t}y) = Q(x,y) \end{cases}$ を示し, $\mu = \dfrac{1}{xP - yQ}$ を求める.

(1) $-(xy+2)dx + x^2 dy = 0$. $\begin{cases} P = -xy-2 \\ Q = x^2 \end{cases}$ とおくと

$e^{t}P(e^{t}x, e^{-t}y) = e^{t}(-xy-2) = e^{t}P(x,y)$ であるので,

改めて $-(y+\frac{2}{x})dx + x dy = 0$: $\begin{cases} P = -y + \frac{2}{x} \\ Q = x \end{cases}$ と見る.
すると

$$\begin{cases} e^{t}P(e^{t}x, e^{-t}y) = e^{t}\left(-e^{-t}y + \dfrac{2}{e^{t}x}\right) = -y + \dfrac{2}{x} \\ e^{-t}Q(e^{t}x, e^{-t}y) = e^{-t}\cdot e^{t}x = x \end{cases}$$

となる. よって

$$\mu = \frac{1}{xP - yQ} = \frac{1}{(-xy+2) - yx} = \frac{1}{2(1-xy)}.$$

check $\mu\left(-y+\frac{2}{x}\right)dx + \mu x dy$

$$= \frac{x^{-1}(2-xy)}{2(1-xy)}dx + \frac{x}{2(1-xy)}dy$$

$$= \frac{2-xy}{2x(1-xy)}dx + \frac{x}{2(1-xy)}dy$$ となる.

このとき

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2-xy}{x(1-xy)}\right) = \dfrac{-x}{x(1-xy)} - \dfrac{2-xy}{x}\cdot\dfrac{-x}{(1-xy)^2} \\ \qquad = \dfrac{1}{xy-1} + \dfrac{2-xy}{(xy-1)^2} = \dfrac{1}{(xy-1)^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{1-xy}\right) = \dfrac{1}{1-xy} - x\dfrac{-y}{(1-xy)^2} = \dfrac{1}{(1-xy)^2} \end{cases}$$

であり, μはたしかに積分因子を与える. //

6.2.1. $\begin{cases} e^{t}P(e^{t}x, e^{-t}y) = P(x,y) \\ e^{-t}Q(e^{t}x, e^{-t}y) = Q(x,y) \end{cases}$ を示し, $\mu = \dfrac{1}{xP - yQ}$ を求める.

(2) $dx - x^2(1+xy)dy = 0.$ x で割って

$\Leftrightarrow \dfrac{dx}{x} - x(1+xy)\,dy = 0$ と見る; $\begin{cases} P = \dfrac{1}{x}, \\ Q = -x(1+xy). \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{t}P(e^{t}x, e^{-t}y) = e^{t}\cdot\dfrac{1}{e^{t}x} = \dfrac{1}{x}, \\ e^{-t}Q(e^{t}x, e^{-t}y) = e^{-t}\cdot\left(-e^{t}x(1+xy)\right) = -x(1+xy) \end{cases}$$

となり, 条件が満たされる. このとき

$$\mu = \frac{1}{xP - yQ} = \frac{1}{1 - y(-x(1+xy))} = \frac{1}{1+xy+(xy)^2},$$

$\therefore$

$$\mu\left(\frac{dx}{x} - x(1+xy)dy\right) = \frac{x^{-1}dx}{1+xy+x^2y^2} - \frac{x(1+xy)\,dy}{1+xy+x^2y^2}.$$

check

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^{-1}}{1+xy+x^2y^2}\right) = -\frac{x^{-1}(x+2x^2y)}{(1+xy+x^2y^2)^2} = -\frac{1+2xy}{(1+xy+x^2y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x(1+xy)}{1+xy+x^2y^2}\right) = -\frac{1+2xy}{1+xy+x^2y^2} + \frac{x(1+xy)(y+2xy^2)}{(1+xy+x^2y^2)^2}$$

$$= \frac{-(1+2xy)(1+xy+x^2y^2) + xy(1+xy)(1+2xy)}{(1+xy+x^2y^2)^2}$$

$$= -\frac{1+2xy}{(1+xy+x^2y^2)^2} \quad //$$

章末6

6.1 (1) $(xy^2-y^3)dx+(xy^2-x^2y)dy = Pdx+Qdy=0.$

$$\Rightarrow \frac{P_y-Q_x}{Q} = \frac{(2xy-3y^2)-(y^2-2xy)}{xy^2-x^2y}$$

$$= \frac{4xy-4y^2}{xy(y-x)} = \frac{4y(x-y)}{xy(y-x)} = -\frac{4}{x}$$

これはxのみによるので、定理6.1.1が適用できて、

$$\lambda(x) = \exp\int^x \frac{P_y-Q_x}{Q}dx = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = x^{-4}.$$

[check
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{x^4}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x^3}-\frac{y^3}{x^4}\right) = \frac{2y}{x^3}-\frac{3y^2}{x^4} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{x^4}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{x^3}-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{3y^2}{x^4}+\frac{2y}{x^3}. \end{cases}$$
]

解は $F(x,y) = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{y^2}{s^3}-\frac{y^3}{s^4}\right)ds + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{t^2}{x_0^3}-\frac{t}{x_0^2}\right)dt$

$$= \left[\frac{y^2}{-2s^2}-\frac{y^3}{-3s^3}\right]_{x_0}^{x} + \left[\frac{t^3}{3x_0^3}-\frac{t^2}{2x_0^2}\right]_{y_0}^{y}$$

$$= \left(\frac{y^2}{-2x^2}-\frac{y^2}{-2x_0^2}-\frac{y^3}{-3x^3}+\frac{y^3}{-3x_0^3}\right)+\left(\frac{y^3-y_0^3}{3x_0^3}-\frac{y^2-y_0^2}{2x_0^2}\right)$$

$$= \left(\frac{y^3}{3x^3}-\frac{y^2}{2x^2}\right)-\left(\frac{y_0^3}{3x_0^3}-\frac{y_0^2}{2x_0^2}\right)$$ より

$$\frac{y^3}{3x^3}-\frac{y^2}{2x^2} = C \text{ (定数)}$$ //

6.1. (2) $(x^2+y)dx - x\,dy = P\,dx + Q\,dy = 0.$

$\Rightarrow \dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{1+1}{-x}$ より、前問と同様にして

$$\lambda(x) = \exp \int^x \frac{P_y - Q_x}{Q} dx = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = x^{-2}.$$

check
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{P}{x^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1 + \dfrac{y}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q}{x^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-x}{x^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

解は $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left(1 + \frac{y}{s^2}\right) ds + \int_{y_0}^{y}\left(-\frac{1}{x_0}\right) dt = C$ (定数),

$$= (x - x_0) - \left(\frac{y}{x} - \frac{y}{x_0}\right) - \frac{y - y_0}{x_0} = \left(x - \frac{y}{x}\right) - \left(x_0 - \frac{y_0}{x_0}\right)$$

であるから、 $x - \dfrac{y}{x} = C$. //

(3) $2y\,dx - x\,dy = 0$. 変数分離形であり、$\lambda = \dfrac{1}{xy}$ で

$\lambda(2y\,dx - x\,dy) = \dfrac{2}{x}dx - \dfrac{1}{y}dy$ が完全となる。

解は、$\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{2}{s} ds - \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{t} = C$ (定数) であり

$$= 2\log\frac{x}{x_0} - \log\frac{y}{y_0} = \log\frac{x^2}{y} - \log\frac{x_0^2}{y_0}$$

$\therefore$ $\dfrac{x^2}{y} = C$ (定数はとりかえた). //

6.1.(4) $x\,dy-(y+2x^2)dx=0$

$\Leftrightarrow \quad (2x^2+y)dx-x\,dy = P\,dx+Q\,dy=0.$

$\dfrac{P_y-Q_x}{Q}=\dfrac{1+1}{-x}$ が x のみによるので、積分因子は

$\lambda=\exp\int^x \dfrac{2}{-x}dx = e^{-2\log x}=x^{-2}$

$$\left[\begin{array}{l} x^{-2}((2x^2+y)dx-x\,dy)=\left(2+\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\dfrac{dy}{x} \\ \Rightarrow \quad \left(2+\dfrac{y}{x^2}\right)_y=\dfrac{1}{x^2}=\left(-\dfrac{1}{x}\right)_x \qquad \text{OK} \end{array}\right]$$

解は、$\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left(2+\frac{y}{s^2}\right)ds-\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{x_0}=C$ (定数)

$=2(x-x_0)-y\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right)-\dfrac{y}{x_0}+\dfrac{y_0}{x_0}$

$=\left(2x-\dfrac{y}{x}\right)-\left(2x_0-\dfrac{y_0}{x_0}\right)$ より、$2x-\dfrac{y}{x}=C.$ //

---

check

$\dfrac{dy}{dx}=4x-C=4x-2x+\dfrac{y}{x}$
$=2x+\dfrac{y}{x}$

$$\left[\begin{array}{l}\Leftrightarrow 2x-C=\dfrac{y}{x} \\ y=x(2x-C). \\ \;\;=2x^2-Cx\end{array}\right]$$

$\Leftrightarrow \quad \left(2x+\dfrac{y}{x}\right)dx-dy=0$

$\Leftrightarrow \quad (2x^2+y)dx-x\,dy=0.$ OK //

6.2 $(2xy^2+y)dx+(y-x)dy = Pdx+Qdy=0.$

(1) $$\frac{Q_x-P_y}{P} = \frac{-1-(4xy+1)}{(2xy+1)y}$$

$$= \frac{-4xy-2}{2xy+1}y^{-1} = -2y^{-1}.$$

∴

$$\lambda(y) = \exp\int^y \frac{Q_x-P_y}{P}dy = e^{\int^y \frac{-2}{y}dy} = \frac{1}{y^2}$$

により、$\lambda Pdx+\lambda Qdy=0$ が完全になる。

$$\parallel$$

[check $\left(2x+\frac{1}{y}\right)dx+\frac{y-x}{y^2}dy$,

$\left(2x+\frac{1}{y}\right)_y = -\frac{1}{y^2} = \left(\frac{y-x}{y^2}\right)_x.$ //]

(2) $$\int_{x_0}^{x}\left(2s+\frac{1}{y}\right)ds+\int_{y_0}^{y}\frac{t-x_0}{t^2}dt = C\ (定数)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x_0^2)+\frac{x-x_0}{y}+\log\frac{y}{y_0}+x_0\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right)$$

$$= \left(x^2+\frac{x}{y}+\log y\right)-\left(x_0^2+\frac{x_0}{y_0}+\log y_0\right)$$

∴ $$x^2+\frac{x}{y}+\log y = C. //$$

6.3. $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(1) $r^{\alpha}(-y\,dx+x\,dy)=P\,dx+Q\,dy$ とする

$$P_y=Q_x \iff \left(-y\sqrt{x^2+y^2}^{\,\alpha}\right)_y=\left(x\sqrt{x^2+y^2}^{\,\alpha}\right)_x$$

$$\iff -r^{\alpha}-y\cdot\frac{\alpha r^{\alpha-2}}{2}\cdot 2y=r^{\alpha}+x\cdot\frac{\alpha r^{\alpha-2}}{2}\cdot 2x$$

$$\iff \alpha(x^2+y^2)r^{\alpha-2}+2r^{\alpha}=0$$

$\therefore \alpha=-2$ //

(2) $-y\,dx+x\,dy=0 \iff \dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y} \iff \dfrac{x}{y}=C.$

(3) $\displaystyle\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{-y\,dx+x\,dy}{r^2}$: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(0\leq\theta<2\pi)$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{+r\sin\theta\cdot r\sin\theta\,d\theta+r\cos\theta\cdot r\cos\theta\,d\theta}{r^2}\Bigg|_{r=R}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi.$$ //

7.1.1 ・ $x''+ax'+bx=0$, $a^2-4b<0$ のとき

$\lambda^2+a\lambda+b=0$ の2解が $\lambda=p\pm iq$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(p^2-q^2)+ap+b=0\\ 2pq+aq=0\end{cases}$,

$\because$ $\begin{cases} x=e^{pt}\cos qt \\ x'=pe^{pt}\cos qt-qe^{pt}\sin qt \\ x''=p^2e^{pt}\cos qt-2pqe^{pt}\sin qt-q^2e^{pt}\cos qt \end{cases}$

$\Rightarrow x''+ax'+bx$

$=(p^2+ap+b-q^2)e^{pt}\cos qt$

$-(2pq+aq)e^{pt}\sin qt$

$=0$, $x=e^{pt}\sin qt$ でも同様.

・ $x''+ax'+bx=0$, $a^2-4b=0$ のとき.

$\Leftrightarrow$ $\lambda^2+a\lambda+b=\left(\lambda+\frac{a}{2}\right)^2$, $\alpha=-\frac{a}{2}$.

$\because$ $x=e^{\alpha t}$, $x'=\alpha e^{\alpha t}$, $x''=\alpha^2e^{\alpha t}$

$\Rightarrow x''+ax'+bx=(\alpha^2+a\alpha+b)e^{\alpha t}=0$,

又 $x=te^{\alpha t}$, $x'=\alpha te^{\alpha t}+e^{\alpha t}$, $x''=\alpha^2te^{\alpha t}+2\alpha e^{\alpha t}$

$\Rightarrow x''+ax'+bx=(\alpha^2+a\alpha+b)te^{\alpha t}+(2\alpha+a)e^{\alpha t}$

$=0$. //

7.2.1 $\left(\frac{d}{dt}-\beta\right)x(t)=Ae^{\alpha t}$ (Aは定数)を定数変化法で解く

$x(t)=C(t)e^{\beta t}$とおくと $x'(t)=C'(t)e^{\beta t}+\beta C(t)e^{\beta t}$

$\therefore$ $C'(t)e^{\beta t}=A\cdot e^{\alpha t}$

$\therefore$ $C'(t)=Ae^{(\alpha-\beta)t}$ ここで仮定より$\alpha\neq\beta$,

$\therefore$ $C(t)=\frac{A}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)t}+B$ (Bは定数)

$\therefore$ $x(t)=C(t)e^{\beta t}=\frac{A}{\alpha-\beta}e^{\alpha t}+Be^{\beta t}$

$=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}$ ($C_1=\frac{A}{\alpha-\beta}$, $C_2=B$とおいた.)

//

章末7

7.1　$x''+5x'+6x=0$ について、　$\boxed{\text{ぬけていた}}$　(7.26)

(1). $x_1=e^{-2t} \Rightarrow x_1'=-2e^{-2t},\ x_2''=4e^{-2t}$

∴ $x_1''+5x_1'+6=\{4+5\cdot(-2)+6\}e^{-2t}=0$ //

・$x_2=e^{-3t} \Rightarrow x_1'=-3e^{-3t},\ x_2''=9e^{-3t}$

∴ $x_2''+5x_2'+6=(9+5\cdot(-3)+6)e^{-3t}=0.$ //

(2) $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}=0$ のとき

これを微分すると　$-2C_1e^{-2t}-3C_2e^{-2t}=0$

すなわち、
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{-2t} \\ C_2e^{-3t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$ があるので、　$\begin{pmatrix} C_1e^{-2t} \\ C_2e^{-3t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　∴ $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0. \end{cases}$ //

(3) 定義7.1.2など、定理7.1.2の内容による。

//

ぬけていた

7.2 $$x'' + 6x' + 9x = 0 \quad \cdots (7.27)$$

(1) $x_1(t) = e^{-3t} \Rightarrow x_1' = -3e^{-3t},\ x_2'' = 9e^{-3t}$

$\because\ x_1'' + 6x_1' + 9x_1 = (9 - 3\cdot 6 + 9)e^{-3t} = 0$ //

$x_2(t) = te^{-3t}$

$\Rightarrow x_2' = -3te^{-3t} + e^{-3t},\ x_2'' = 9te^{-3t} - 6e^{-3t}$

$\because\ x_2'' + 6x_2' + 9x_2 = (9 - 3\cdot 6 + 9)te^{-3t} + (6-6)e^{-3t} = 0$ //

(2) $C_1x_1 + C_2x_2 = 0 \Leftrightarrow C_1e^{-3t} + C_2te^{-3t} = 0$

$\Leftrightarrow C_1 + C_2t = 0$ $\because$ $\begin{cases} (t=0 \text{ として})\ C_1 = 0, \\ (\frac{d}{dt} \text{して})\ \ C_2 = 0. \end{cases}$ //

(3) 定義7.1.2など，定理7.1.2の内容による。//

7.3. (1) $x''-5x'+6x=0$: 特性方程式は

$\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ $\therefore \lambda=2,3$

$\therefore$ $x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$ (C_1, C_2は定数) //

(2) $x''-3x'+2x=0$. 特性方程式は

$\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ $\therefore \lambda=1,2$

$\therefore$ $x(t)=C_1e^{t}+C_2e^{2t}$, (C_1, C_2は定数) //

(3) $x''-4x'+4x=0$. 特性方程式は

$\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$ $\therefore \lambda=2$ (重根)

$\therefore$ $x(t)=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}$ (C_1, C_2は定数) //

(4) $x''+4x=0$. 特性方程式は

$\lambda^2+4=0$ $\therefore \lambda=\pm 2i$ (iは虚数単位)

$\therefore$ $x(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$ (C_1, C_2は定数) //

(定理7.1.2(2)参照)

7.4 $x'' = -kx - lx' \quad (k = \omega^2 > 0,\ l \geq 0)$

(1) $l = 0$ のとき; $x'' + kx = x'' + \omega^2 x = 0$.

特性方程式は, $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ $\therefore \lambda = \pm i\omega$.

$\therefore x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. ($C_1, C_2$ は定数) //

(2) $l > 0$ のとき. $D = l^2 - 4k$ とすると, 特性方程式は

$$\lambda^2 + l\lambda + k = \left(\lambda + \frac{l}{2}\right)^2 + k - \frac{l^2}{4} = 0 \quad \therefore \lambda = -\frac{l}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

よって解は, C_1, C_2 を定数として

$$\begin{cases} \cdot D > 0 \text{ のとき}, & x(t) = C_1 e^{-\frac{l+\sqrt{D}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{l-\sqrt{D}}{2}t} \\ \cdot D = 0 \text{ のとき}, & x(t) = C_1 e^{-\frac{l}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{l}{2}t} \\ \cdot D < 0 \text{ のとき}, & x(t) = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{|D|}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{|D|}}{2} t\right) e^{-\frac{l}{2}t} \end{cases}$$

//

問題文で $D \gtrless 0$ を説明入替る

↓

(3) $x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \iff$

過減衰 = $\cdot D > 0$ のとき, $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ \frac{l+\sqrt{D}}{2} C_1 + \frac{l-\sqrt{D}}{2} C_2 = 0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} C_1 = \frac{1 - l/\sqrt{D}}{2} \\ C_2 = \frac{1 + l/\sqrt{D}}{2} \end{cases}$

臨界減衰 = $\cdot D = 0$ のとき, $\begin{cases} C_1 = 1 \\ -\frac{l}{2} C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = +\frac{l}{2} \end{cases}$

減衰振動 = $\cdot D < 0$ のとき, $\begin{cases} C_1 = 1 \\ -\frac{l}{2} C_1 + \frac{\sqrt{|D|}}{2} C_2 = 0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{l}{\sqrt{|D|}} \end{cases}$

7.4 続

$\therefore$ $x(0)=1,\ x'(0)=0$ の解は $(D = l^2-4k = l^2-4\omega^2)$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-l/\sqrt{D}}{2} e^{-\frac{l+\sqrt{D}}{2}t} + \dfrac{1+l/\sqrt{D}}{2} e^{-\frac{l-\sqrt{D}}{2}t} \\ \quad = e^{-\frac{lt}{2}}\left(\cosh\dfrac{\sqrt{D}}{2}t + \dfrac{l}{\sqrt{D}}\sinh\dfrac{\sqrt{D}}{2}t\right) & : D>0 \\ x(t) = e^{-\frac{l}{2}t} + \dfrac{l}{2}te^{-\frac{l}{2}t} = e^{-\frac{lt}{2}}\left(1+\dfrac{lt}{2}\right) & : D=0 \\ x(t) = e^{-\frac{lt}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{|D|}}{2}t + \dfrac{l}{\sqrt{|D|}}\sin\dfrac{\sqrt{|D|}}{2}t\right) & : D<0 \end{cases}$$

$\cos + \dfrac{l}{\sqrt{D}}\sin = 0$

$\Leftrightarrow \tan\dfrac{\sqrt{|D|}}{2}t = -\dfrac{\sqrt{|D|}}{l},$

$t = \dfrac{2}{\sqrt{|D|}}\left(\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{|D|}}{-l} \bmod \pi\right)$

$= \dfrac{2}{\sqrt{|D|}}\left(\pi - \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{|D|}}{l}\right)$

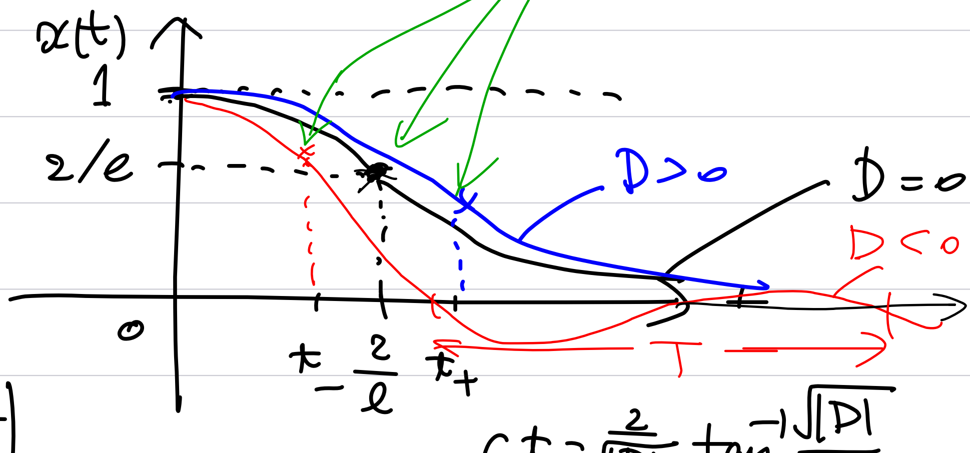
$= \dfrac{2\pi}{\sqrt{|D|}} - \dfrac{2}{l} + \cdots$

ここで

・$\cos\dfrac{\sqrt{|D|}}{2}t,\ \sin\dfrac{\sqrt{|D|}}{2}t$ は $T = \dfrac{4\pi}{\sqrt{|D|}}$ を周期にもつ。

・$x'' = -kx - lx' \Rightarrow x''(0) = -k = -\omega^2 < 0$

などよりグラフは次の如し。(× は変曲点)



なお変曲点は、

$$\begin{cases} t_+ = \dfrac{1}{\sqrt{D}}\log\left(\dfrac{1+\sqrt{D}/l}{1-\sqrt{D}/l}\right) \\ \quad = \dfrac{2}{l}\left(1+\dfrac{D}{3l^2}+\cdots\right) \\ x(t_+) = \dfrac{l}{\sqrt{k}}\left(\dfrac{1+\sqrt{D}/l}{1-\sqrt{D}/l}\right)^{-\frac{l}{2\sqrt{D}}} \end{cases} \xrightarrow[D\to 0]{} \frac{2}{e} \quad (D>0)$$

$$\begin{cases} t_0 = \dfrac{2}{l}, \\ x(t_0) = \dfrac{2}{e} \end{cases} \quad (D=0)$$

$$\begin{cases} t_- = \dfrac{2}{\sqrt{|D|}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{|D|}}{l} \\ \quad = \dfrac{2}{l}\left(1-\dfrac{|D|}{3l^2}+\cdots\right) \\ x(t_-) = \dfrac{2e^{-\frac{lt_-}{2}}}{\sqrt{1+\frac{|D|}{l^2}}} \end{cases} \xrightarrow[D\to 0]{} \frac{2}{e} \quad (D<0)$$

であることが分かる。//

8章

8.1.1

$$x'' - 3x' + 2x = \sin t \quad \cdots (8.4)$$

・ $x_1(t) = \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t$, $x_2(t) = x_1(t) + e^t$

$x_1' = \frac{-3}{10}\sin t + \frac{1}{10}\cos t$, $x_2' = x_1' + e^t$

$x_1'' = \frac{-3}{10}\cos t - \frac{1}{10}\sin t$, $x_2'' = x_1'' + e^t$

(i) $x_1'' - 3x_1' + 2x_1$

$$= \underbrace{\left(\frac{-3}{10} - \frac{3}{10} + \frac{6}{10}\right)}_{0}\cos t + \underbrace{\left(\frac{-1}{10} + \frac{(-3)^2}{10} + \frac{2}{10}\right)}_{1}\sin t = \sin t,$$

(ii) $(e^t)'' - 3(e^t)' + 2e^t = 0$ とあわせて

$$x_2'' - 3x_2' + 2x_2 = (x_1 + e^t)'' - 3(x_1 + e^t)' + 2(x_1 + e^t) = 0.$$

・一般解は，(8.4)で右辺=0の方程式

$x'' - 3x' + 2x = 0$ の解と1つの特殊解の和．

特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2$ より，

$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + x_1(t)$ … 特殊解 $= x_1$ のとき

$z = D_1 e^t + D_2 e^{2t} + x_2(t)$ … x_2 のとき

がともに一般解を与えるが，$x_2 = x_1 + e^t$ であるから，

これらは $C_1 = D_1 + 1$, $C_2 = D_2$ でつりあう。//

8.1.2 $x'' + ax' + bx = R(t)$ $\left(\begin{matrix} \lambda^2+a\lambda+b \\ =(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)\end{matrix}\right)$.

表8.1(ii) ; $R(t)=e^{\gamma t}$.

・<u>$\alpha, \beta \neq \gamma$のとき</u> $x = \dfrac{e^{\gamma t}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$; $x'=\gamma x$, $x''=\gamma^2 x$

$\Rightarrow x''+ax'+bx = \dfrac{\gamma^2+a\gamma+b}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}e^{\gamma t} = e^{\gamma t}$. //

・<u>$\alpha=\gamma, \beta \neq \gamma$ のとき</u> $x=\dfrac{te^{\gamma t}}{\gamma-\beta}$:

$x'=\gamma x+\dfrac{e^{\gamma t}}{\gamma-\beta}$, $x''=\gamma^2x+\dfrac{2\gamma e^{\gamma t}}{\gamma-\beta}$

$\therefore x''+ax'+bx = \underbrace{(\gamma^2+a\gamma+b)}_{0}x + \dfrac{2\gamma+a}{\gamma-\beta}e^{\gamma t} = \dfrac{2\gamma+a}{\gamma-\beta}e^{\gamma t}$

解と係数の関係より $a=-\gamma-\beta$ $\therefore \dfrac{2\gamma+a}{\gamma-\beta}=\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\beta}=1$ //

・<u>$\alpha=\beta=\gamma$のとき</u> $x=\dfrac{t^2}{2}e^{\gamma t}$:

$x'=\gamma x+te^{\gamma t}$, $x''=\gamma^2x+2\gamma te^{\gamma t}+e^{\gamma t}$

$\therefore x''+ax'+bx=\underbrace{(\gamma^2+a\gamma+b)}_{0}x+(2\gamma te^{\gamma t}+e^{\gamma t})+ate^{\gamma t}$

$=\underbrace{(2\gamma+a)}_{0}te^{\gamma t}+e^{\gamma t}=e^{\gamma t}$. //

8.1.2 続

$$x'' + ax' + bx = R(t) \quad \left(\begin{aligned} &x^2+ax+b \\ &=(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned} \right).$$

表8.1(i); $R(t) = t^m$

$\underline{\alpha\beta \neq 0 のとき}$ $x = c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \cdots + c_m$ とおくと

$$x' = mc_0 t^{m-1} + (m-1)c_1 t^{m-2} + \cdots + c_{m-1},$$

$$x'' = m(m-1)c_0 t^{m-2} + (m-1)(m-2)c_1 t^{m-3} + \cdots + 2c_{m-2}$$

$$x'' + ax' + bx = (amc_0 + bc_1)t^{m-1} + bc_0 t^m$$
$$+ (m(m-1)c_0 + a(m-1)c_1 + bc_2)t^{m-2}$$
$$+ ((m-1)(m-2)c_1 + a(m-2)c_2 + bc_3)t^{m-3} + \cdots$$
$$+ (2c_{m-2} + ac_{m-1} + bc_m) = t^m$$

$\Rightarrow bc_0 = 1,\ bc_1 + amc_0 = 0$, ここで $b = \alpha\beta \neq 0$.

$\therefore\ c_0 = \frac{1}{b},\ c_1 = -\frac{1}{b}amc_0 = -\frac{am}{b^2}.$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{b}(m(m-1)c_0 + a(m-1)c_1)$$
$$= -\frac{m(m-1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}m(m-1) = -\frac{a^2+1}{b^2}m(m-1),$$

$$c_3 = -\frac{1}{b}((m-1)(m-2)c_1 + a(m-2)c_2)$$
$$= +\frac{a}{b^3}m(m-1)(m-2) + a\frac{a^2+1}{b^3}m(m-1)(m-2)$$

$$c_4 = -\frac{1}{b}((m-2)(m-3)c_2 + a(m-3)c_3)$$
$$= \left(\frac{a^2+1}{b^3} + \frac{a(a^3+2a)}{-b^4}\right)m(m-1)(m-2)(m-3),$$

以下同様にして $c_1, \cdots, c_m$ が $c_0 = \frac{1}{b}$ で決まる。//

表8.1(i)、 $\alpha = 0 \neq \beta$ のとき　$\lambda^2 + a\lambda + b = \lambda(\lambda - \beta)$,　$\begin{cases} a = -\beta \\ b = 0 \end{cases}$

$$x = c_0 t^{m+1} + c_1 t^m + \cdots + c_m t$$

$$\Rightarrow x' = c_0(m+1)t^m + c_1 m t^{m-1} + \cdots + c_{m-1} 2t + c_m$$

$$x'' = c_0(m+1)m t^{m-1} + c_1 m(m-1) t^{m-2} + \cdots + 2c_{m-1}$$

$\therefore$

$$x'' + ax' + bx = x'' - \beta x'$$

$$= -\beta\left(c_0(m+1)t^m + c_1 m t^{m-1} + \cdots + c_{m-1} 2t + c_m\right) + c_0(m+1)m t^{m-1} + c_1 m(m-1) t^{m-2} + \cdots + 2c_{m-1}$$

$$= t^m$$

$$\Leftrightarrow -\beta(m+1)c_0 = 1,\ m\beta c_1 = (m+1)m c_0,\ (m-1)\beta c_2 = m(m-1)c_1,\ \ldots,\ 2\beta c_{m-1} = 2 \cdot 1 \cdot c_{m-2},\ \beta c_m = 2c_{m-1}$$

$$\therefore c_0 = \frac{-\beta^{-1}}{m+1},\ c_1 = \frac{(m+1)c_0}{\beta} = -\frac{1}{\beta^2},\ c_2 = \frac{m c_1}{\beta} = -\frac{m}{\beta^3},$$

$$c_3 = \frac{m-1}{\beta}c_2 = -\frac{m(m-1)}{\beta^4},\ c_4 = -\frac{m(m-1)(m-2)}{\beta^5} = -\frac{m!}{(m-3)!}\beta^{-5}, \ldots$$

$$\therefore c_0 = \frac{-\beta^{-1}}{m+1},\quad c_k = -\frac{m!\,\beta^{-k-1}}{(m-k+1)!}\quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

//

・$\alpha = \beta = 0$ のとき：$x'' = t^m$ であるから、2回積分すれば

$$x(t) = \frac{t^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + c_0 + c_1 t$$ が一般解.

//

定8.1(iii) $x'' + ax' + bx = A\cos(qt) + B\sin(qt)$

$\underline{\alpha, \beta \neq \pm iq \text{ のとき}}$ $(\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta))$

$x = C\cos qt + D\sin qt$ とすると

$x' = q(-C\sin qt + D\cos qt)$

$x'' = q^2(-C\cos qt - D\sin qt)$

$\therefore\ x'' + ax' + bx$

$= (-Cq^2 + aDq + bC)\cos qt + (-Dq^2 - aCq + bD)\sin qt$

$= A\cos(qt) + B\sin(qt) \iff \begin{cases} (b-q^2)C + aqD = A \\ -aqC + (b-q^2)D = B \end{cases}$

$$\therefore \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-q^2 & aq \\ -aq & b-q^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(b-q^2)^2 + a^2q^2} \begin{bmatrix} b-q^2 & -aq \\ aq & b-q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \ //$$

ここで $\underline{\alpha = iq = -\beta} \iff \lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - iq)(\lambda + iq)$, $\begin{cases} a = 0 \\ b = q^2 \end{cases}$

であるので, $\alpha, \beta \neq \pm iq$ のとき $(b-q^2)^2 + a^2q^2 \neq 0$. //

⑦

⑦ 続) $x''+ax'+bx = A\cos(qt)+B\sin(qt)$

$\alpha = iq = -\beta$ のとき; $\lambda^2+a\lambda+b = (\lambda-iq)(\lambda+iq)$, $\begin{cases} a=0 \\ b=q^2 \end{cases}$

$x = t(C\cos qt + D\sin qt)$ とすると

$x' = qt(-C\sin qt + D\cos qt) + (C\cos qt + D\sin qt)$

$x'' = q^2t(-C\cos qt - D\sin qt) + 2q(-C\sin qt + D\cos qt)$

$\therefore x''+bx$

$= q^2t(-C\cos qt - D\sin qt) + 2q(-C\sin qt + D\cos qt)$

$+bt(C\cos qt + D\sin qt) = A\cos(qt)+B\sin(qt)$

$\Leftrightarrow -2qC = A,\ 2qD = B$ $\quad \therefore \begin{cases} C = \dfrac{A}{-2q} \\ D = \dfrac{B}{2q} \end{cases}$ //

8.2.1 (1) $W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{vmatrix}$: $x_i'' + a x_i' + b x_i = 0$ $(i=1,2)$ のとき

$$W' = \underbrace{\begin{vmatrix} x_1' & x_1' \\ x_2' & x_2' \end{vmatrix}}_{0} + \begin{vmatrix} x_1 & x_1'' \\ x_2 & x_2'' \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x_1 & -a x_1' - b x_1 \\ x_2 & -a x_2' - b x_2 \end{vmatrix}$$

$$= -a \begin{vmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{vmatrix} - b \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{vmatrix}}_{0} = -aW.$$

ここで一般に、ベクトル値関数 $u(t), v(t) \in \mathbb{R}^2$ のなす行列式 $|u \ v| = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$ についての性質 $\frac{d}{dt}|u \ v| = |u' \ v| + |u \ v'|$ $\left(u' = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}\right)$ を用いた。

(2) $C'(t) = 0$ を示したいが、まず微分の定義は $\lim_{h \to 0} \frac{C(t+h) - C(t)}{h}$ であるから、これが意味をもつためには $C(t)$ が t を含む開区間で定義されている必要がある。すなわち分母 $x_1 \neq 0$ が必要である。そこで $x_1(t_0) \neq 0$ なる t_0 を含むある区間上で考えて $C'(t) = 0$ が恒等的に成り立つことを保証した。

8.2.2 (1) $x'' - 3x' + 2x = e^t$

・$x'' - 3x' + 2x = 0$ は, $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

より, 一般解 $C_1 e^t + C_2 e^{2t}$ をもつ.

$\Rightarrow$ $x = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{2t}$ とおき定数変化法を用いる.

$C_1' e^t + C_2' e^{2t} = 0$ と仮定すると

$$\begin{cases} x' = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} \\ x'' = (C_1 e^t + 2^2 C_2 e^{2t}) + (C_1' e^t + 2C_2' e^{2t}) \end{cases}$$

$\therefore$ $x'' - 3x' + 2x$

$= C_1((e^t)'' - 3(e^t)' + 2e^t) + C_2((e^{2t})'' - 3(e^{2t})' + 2e^{2t})$

$+ C_1' e^t + 2C_2' e^{2t}$

$$\therefore \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

よって $C_1 = -t$, $C_2 = -e^{-t}$ にとれて, 特殊解

$x(t) = -te^t - e^{-t} \cdot e^{2t} = -(1+t)e^t$ を得る.

[check $x' = -e^t - (1+t)e^t$, $x'' = -e^t - (2+t)e^t$

$x'' - 3x' + 2x = -((t+3) - 3(t+2) + 2(t+1))e^t = e^t$ //]

8.2.2 (2) $x'' - 3x' + 2x = \cos t.$

(1)と同様, $x = C_1(t)e^{t} + C_2(t)e^{2t}$ とおく.

$C_1' e^{t} + C_2' e^{2t} = 0$ と仮定すると

$$x'' - 3x' + 2x = C_1' e^{t} + 2C_2' e^{2t} = \cos t$$

$$\therefore \begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & 2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t}\cos t \\ e^{-2t}\cos t \end{pmatrix}$$

$$C_1(t) = \int^t -e^{-t}\cos t\,dt = \left[e^{-t}\cos t\right] + \int^t e^{-t}\sin t$$

$$= \left[e^{-t}\cos t\right] - \left[e^{-t}\sin t\right] + \underbrace{\int e^{-t}\cos t\,dt}_{= -C_1(t)}$$

$C_1 = \frac{C-S}{2}e^{-t}$

$C_1' = \frac{-S-C}{2}e^{-t} - \frac{C-S}{2}e^{-t}$

$= -\cos t\, e^{-t}$

$C_2 = \frac{S-2C}{5}e^{-2t}$

$C_2' = \frac{C+2S}{5}e^{-2t} - 2\frac{S-2C}{5}e^{-2t}$

$= \cos t\, e^{-2t}$

$$\therefore 2C_1(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$C_2(t) = \int^t e^{-2t}\cos t\,dt = \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\cos t\right] + \int \frac{e^{-2t}}{-2}\sin t\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\cos t\right] + \left[\frac{e^{-2t}}{(-2)^2}\sin t\right] - \int \frac{e^{-2t}}{(-2)^2}\cos t\,dt$$

$$\therefore \frac{5}{4}C_2(t) = e^{-2t}\frac{-2\cos t + \sin t}{4}$$

$$\therefore x(t) = \frac{\cos t - \sin t}{2} + \frac{-2\cos t + \sin t}{5} = \frac{\cos t - 3\sin t}{10}$$

check

$$x'' - 3x' + 2x = -3\,\frac{\sin t + 3\cos t}{10} + \frac{\cos t - 3\sin t}{10} = \cos t.$$

8.3.1.(1) $x'' - 3x' + 2x = R(t) \Leftrightarrow (D-1)(D-2)x = R(t)$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{(D-1)(D-2)}R = \left(\frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1}\right)R$$ であり

$$\frac{1}{D-2}R = \frac{1}{-2}\left(\frac{1}{1-D/2}\right)R = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{D}{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \cdots\right)R.$$

<u>$R=\cos t$ のとき</u> $D^2\cos t = -\cos t$ に注意すると

$$\frac{1}{D-2}(\cos t) = -\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{-1}{4} + \left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \cdots\right)\cos t - \left(\frac{1}{2} + \frac{-1}{2^3} + \cdots\right)\sin t\right]$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{-2}\right)^2}\cos t + \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{1}{-2}\right)^2}\sin t = \frac{-2\cos t + \sin t}{5} \quad \text{—①}$$

同様に, $$\frac{1}{1-D}\cos t = \left(\frac{1}{1-D^2} + \frac{D}{1-D^2}\right)\cos t$$

$$= \frac{1}{1-(-1)}\cos t + \frac{1}{1-(-1)}(-\sin t) = \frac{\cos t - \sin t}{2} \quad \text{—②}$$

∴ $$x = \left(\frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1}\right)\cos t = ① + ②$$

$$= \left(\frac{-2}{5} + \frac{1}{2}\right)\cos t + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)\sin t = \frac{\cos t - 3\sin t}{10}. \quad //$$

注 [例18.3.2(2)参照], $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $De^{\pm it} = \pm i e^{\pm it}$ より

$$\frac{1}{D-2}\cos t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i-2}e^{it} + \frac{1}{-i-2}e^{-it}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos t + i\sin t}{i-2} + \frac{\cos t - i\sin t}{-i-2}\right) = -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$$

同様に, $$\frac{1}{D-1}\cos t = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}}{i-1} + \frac{e^{-it}}{-i-1}\right) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

このようにしても上の特解が得られる. //

参 $$\frac{1}{1-\varepsilon D}\cos t = \left(\frac{1}{1-\varepsilon^2 D^2} + \frac{\varepsilon D}{1-\varepsilon^2 D^2}\right)\cos t = \frac{\cos t}{1+\varepsilon^2} + \frac{-\varepsilon\sin t}{1+\varepsilon^2},$$

$$\frac{1}{1-\varepsilon D}\sin t = \left(\frac{1}{1-\varepsilon^2 D^2} + \frac{\varepsilon D}{1-\varepsilon^2 D^2}\right)\sin t = \frac{\sin t}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon\cos t}{1+\varepsilon^2}$$ である.

//

$R = e^t$ のとき

・まず、$\dfrac{1}{D-2}e^t = \dfrac{1}{-2}\dfrac{1}{1-\frac{D}{2}}e^t = \dfrac{1}{-2}\left(1+\dfrac{D}{2}+\left(\dfrac{D}{2}\right)^2+\cdots\right)e^t$

$= -\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\right)e^t = \dfrac{-1/2}{1-1/2}e^t = -e^t$

・次に $\dfrac{1}{D-1}e^t = u$ を求める。これまでと同様にすると

$-\dfrac{1}{1-D}e^t = -(1+D+D^2+\cdots)e^t = -(1+1+\cdots)e^t$

となり、発散してしまう。(これは作用素が必ずしも逆元をもたないことの1つの現れである。) 元へ戻って考えると

$u' - u = e^t$

を解けば良い。定数変化法 $u = C(t)e^t$ により

$C'e^t + \cancel{Ce^t} - \cancel{Ce^t} = e^t$ $\therefore C(t) = t + $定数

定数 $= 0$ とおいてよく [注意 §3.1(2)], $u = te^t$ を得る。 ④

③④より、$(D-1)(D-2)x = R(t)$ の解として

③ − ④ $= -e^t - te^t = -(1+t)e^t$ を得る。//

注 例1 §3.1(3) のように、$r \to 1$ であるパラメータ r を考え

$(D-1)\dfrac{e^{rt}-e^t}{r-1} = e^{rt} \to (D-1)(te^t) = e^t \ (r \to 1)$

によっても、$u = te^t$ が得られる。また、注意 §3.2 によれば

$(D-1)u = e^t \Leftrightarrow e^{-t}(D-1)u = 1 \Leftrightarrow D(e^{-t}u) = 1$

$\therefore e^{-t}u = t + C$, $u = (t+C)e^t$ ともできる。

$e^{-t}u = C(t)$ と見れば、これは定数変化法と同値である。//

8.3.1(2) $LQ'' + RQ' + C^{-1}Q = E,\ E = E_0\cos\omega t$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{C^{-1}}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2-4L/C}}{2L} = \lambda_\pm$$

より, $Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{C^{-1}}{L}Q = (D-\lambda_+)(D-\lambda_-)Q$

∴

$$Q = \frac{1}{(D-\lambda_+)(D-\lambda_-)}\left(\frac{E}{L}\right) = \frac{E_0/L}{\lambda_+-\lambda_-}\left(\frac{1}{D-\lambda_+} - \frac{1}{D-\lambda_-}\right)(\cos\omega t).$$

ここで

$$\frac{1}{D-\lambda_\pm}\cos\omega t = \frac{1}{D-\lambda_\pm}\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\omega t}}{i\omega-\lambda_\pm} + \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega-\lambda_\pm}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{i\omega-\lambda_\pm}+\frac{1}{-i\omega-\lambda_\pm}\right)\frac{\cos\omega t}{2} + \left(\frac{i}{i\omega-\lambda_\pm} - \frac{i}{-i\omega-\lambda_\pm}\right)\frac{\sin\omega t}{2}$$

$$= \frac{-\lambda_\pm}{\lambda_\pm^2+\omega^2}\cos\omega t + \frac{\omega}{\lambda_\pm^2+\omega^2}\sin\omega t$$

∴

$$Q = \frac{E_0/L}{\lambda_+-\lambda_-}\left\{\left(\frac{-\lambda_+}{\lambda_+^2+\omega^2} - \frac{-\lambda_-}{\lambda_-^2+\omega^2}\right)\cos\omega t + \left(\frac{\omega}{\lambda_+^2+\omega^2} - \frac{\omega}{\lambda_-^2+\omega^2}\right)\sin\omega t\right\}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{-\lambda_+}{\lambda_+^2+\omega^2}+\dfrac{\lambda_-}{\lambda_-^2+\omega^2}}{\lambda_+-\lambda_-} = \dfrac{\dfrac{1}{\lambda_+-\lambda_-}\left(-\lambda_+\lambda_-^2+\lambda_-\lambda_+^2-\omega^2(\lambda_+-\lambda_-)\right)}{(\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2)} = \dfrac{C^{-1}/L-\omega^2}{(\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2)} \\[2ex] \dfrac{\dfrac{\omega}{\lambda_+^2+\omega^2}-\dfrac{\omega}{\lambda_-^2+\omega^2}}{\lambda_+-\lambda_-} = \dfrac{\omega\dfrac{\lambda_-^2-\lambda_+^2}{\lambda_+-\lambda_-}}{(\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2)} = \dfrac{\omega\dfrac{R}{L}}{(\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2)} \end{cases}$$

であり, 又 $\lambda_\pm^2+\omega^2 = \frac{R^2}{4L^2}+\frac{R^2-4L/C}{4L^2} \mp \frac{R\sqrt{R^2-4L/C}}{2L^2}+\omega^2$,

∴

$$(\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2) = \left(\frac{R^2-2L/C}{2L^2}+\omega^2\right)^2 - \frac{R^2(R^2-4L/C)}{(2L^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(LC)^2} + \left(\frac{R^2}{L^2}-\frac{2}{LC}\right)\omega^2+\omega^4 = \left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{R\omega}{L}\right)^2$$

より,(1.8)を得る。//

check

$$Q=\frac{E_0/L}{\lambda_+-\lambda_-}\left\{\left(\frac{-\lambda_+}{\lambda_+^2+\omega^2}-\frac{-\lambda_-}{\lambda_-^2+\omega^2}\right)\cos\omega t+\left(\frac{\omega}{\lambda_+^2+\omega^2}-\frac{\omega}{\lambda_-^2+\omega^2}\right)\sin\omega t\right\}.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{-\lambda_+}{\lambda_+^2+\omega^2}+\frac{\lambda_-}{\lambda_-^2+\omega^2}}{\lambda_+-\lambda_-}=\dfrac{\frac{1}{\lambda_+-\lambda_-}\left(-\lambda_+\lambda_-^2+\lambda_-\lambda_+^2-\omega^2(\lambda_+-\lambda_-)\right)}{(\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2)}=\dfrac{C^{-1}/L-\omega^2}{(\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2)}\\[2ex] \dfrac{\frac{\omega}{\lambda_+^2+\omega^2}-\frac{\omega}{\lambda_-^2+\omega^2}}{\lambda_+-\lambda_-}=\dfrac{\omega\,\frac{\lambda_-^2-\lambda_+^2}{\lambda_+-\lambda_-}}{(\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2)}=\dfrac{\omega\frac{R}{L}}{(\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2)}\end{cases}$$

であり、又 $\lambda_\pm^2+\omega^2=\dfrac{R^2}{4L^2}+\dfrac{R^2-4L/C}{4L^2}\mp\dfrac{R\sqrt{R^2-4L/C}}{2L^2}+\omega^2$,

$$\therefore (\lambda_+^2+\omega^2)(\lambda_-^2+\omega^2)=\left(\frac{R^2-2L/C}{2L^2}+\omega^2\right)^2-\frac{R^2(R^2-4L/C)}{(2L^2)^2}$$

$$=\frac{1}{(LC)^2}+\left(\frac{R^2}{L^2}-\frac{2}{LC}\right)\omega^2+\omega^4=\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{R\omega}{L}\right)^2$$

$$\Rightarrow Q=\frac{E_0}{L}\,\frac{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)\cos\omega t+\frac{R\omega}{L}\sin\omega t}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{R\omega}{L}\right)^2}$$

$$=E_0\,\frac{(C^{-1}-L\omega^2)\cos\omega t+R\omega\sin\omega t}{\sqrt{(C^{-1}-L\omega^2)^2+(R\omega)^2}^{\,2}}$$

$$=E_0\,\frac{\cos(\omega t-\delta_0)}{\sqrt{(C^{-1}-L\omega^2)^2+(R\omega)^2}},$$

但

$$\begin{cases}\cos\delta_0=\dfrac{C^{-1}-L\omega^2}{\sqrt{(C^{-1}-L\omega^2)^2+(R\omega)^2}}\\[2ex]\sin\delta_0=\dfrac{R\omega}{\sqrt{(C^{-1}-L\omega^2)^2+(R\omega)^2}}\end{cases}$$

//

章末

8.1 (1) $x''-4x'+4x=3t^2+1$: $x=At^2+Bt+C$ とすると

$x'=2At+B,\ x''=2A$

$\therefore\ x''-4x'+4x=4At^2+(4B-8A)t+(4C-4B)$

$=3t^2+1 \iff 4A=3,\ 4B-8A=0,\ 4C-4B=1$

$\therefore\ A=\frac{3}{4},\ B=\frac{3}{2},\ C=\frac{7}{4};\ x=\frac{3t^2+6t+7}{4}$ //

(2) $x''-7x'+12x=\sin t\sin 2t$:

$x=A\sin t+B\cos t+C\sin 3t+D\cos 3t$ とすると

$x'=A\cos t-B\sin t+3C\cos 3t-3D\sin 3t,$

$x''=-A\sin t-B\cos t-9C\sin 3t-9D\cos 3t$

$\therefore\ x''-7x'+12x=(11A+7B)\sin t+(11B-7A)\cos t$

$+(3C+21D)\sin 3t+(3D-21C)\cos 3t$

$t'=it$

$\frac{e^{t'}-e^{-t'}}{2i}\cdot\frac{e^{2t'}-e^{-2t'}}{2i}$

$=\frac{e^{3t'}+e^{-3t'}}{-4}-\frac{e^{t'}+e^{-t'}}{-4}$

これが

$=\sin t\sin 2t=\frac{-\cos 3t+\cos t}{2} \iff \begin{cases} 11A+7B=3C+21D=0 \\ -7A+11B=21C-3D=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore\ A=\frac{-7}{340},\ B=\frac{11}{340},\ C=\frac{7}{300},\ D=\frac{-1}{300}$ ($\because$ 注)

$\therefore\ x=\frac{-7\sin t+11\cos t}{340}+\frac{7\sin 3t-\cos 3t}{300}$ //

$\because$ 注 $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 21 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\frac{1}{121+49}\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=\frac{1}{-3\cdot 50}\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

check

$$x = \frac{-7\sin t + 11\cos t}{340} + \frac{7\sin 3t - \cos 3t}{300}$$

$$x' = \frac{-7\cos t - 11\sin t}{340} + \frac{21\cos 3t + 3\sin 3t}{300}$$

$$x'' = \frac{7\sin t - 11\cos t}{340} + \frac{-63\sin 3t + 9\cos 3t}{300}$$

$$x'' - 7x' + 12x = \frac{(7+77-7\cdot 12)\sin t + (-11+49+132)\cos t}{340}$$

$$+ \frac{(-63-21+84)\sin 3t + (9-147-12)\cos 3t}{300}$$

$$= \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t \quad //$$

8.1 (3) $x''+x=(t^2+1)e^t$, $x(t)=(At^2+Bt+C)e^t$

$\Rightarrow x' = x+(2At+B)e^t = (At^2+(2A+B)t+B+C)e^t$

$x'' = x+(4At+B)e^t = (At^2+(4A+B)t+(2A+2B+C))e^t$

$\therefore x''+x = (2At^2+(4A+2B)t+2(A+B+C))e^t$

$= (1+t^2)e^t \Leftrightarrow A=\frac{1}{2},\ A+\frac{B}{2}=0,\ A+B+C=\frac{1}{2}$

$\therefore B=-1,\ C=1.\quad x=\frac{t^2-2t+2}{2}e^t.$

②をトル

<u>check</u> $x' = x+(t-1)e^t$, $x'' = x+2(t-1)e^t+e^t = \left(\frac{t^2}{2}+t\right)e^t$

$\therefore x''+x=(t^2+1)e^t$ //

(4) $x''-4x'+5x = e^{\cancel{2}t}\cos t$; $x(t)=e^t(A\cos t+B\sin t)$

$\Rightarrow x' = x+e^t(-A\sin t+B\cos t)$

$x'' = x+2e^t(-A\sin t+B\cos t)+e^t(-A\cos t-B\sin t)$

$\therefore x''-4x'+5x = x-2e^t(-A\sin t+B\cos t)$

$= e^t\cos t \Leftrightarrow (A\cos t+B\sin t)-2(-A\sin t+B\cos t)=\cos t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A-2B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A=1/5 \\ B=-2/5 \end{cases},\quad x=e^t\,\frac{\cos t-2\sin t}{5}.$

<u>check</u> $x' = x+e^t\cdot\frac{-\sin t-2\cos t}{5} = e^t\,\frac{-\cos t-3\sin t}{5}$

$x'' = x'+e^t\,\frac{\sin t-3\cos t}{5} = e^t\,\frac{-4\cos t-2\sin t}{5}$

$x''-4x'+5x = e^t\,\frac{(-4+4+5)\cos t+(-2+12-10)\sin t}{5} = \cos t.$ //

(注) $x'' - 4x' + 5x = e^{2t}\cos t$ のとき.

$$x = te^{2t}(A\cos t + B\sin t) \quad \text{とおくと}$$

$$x' = e^{2t}(A\cos t + B\sin t) + 2x + te^{2t}(-A\sin t + B\cos t)$$

$$x'' = 2e^{2t}(A\cos t + B\sin t) + 2x'$$
$$+ 2e^{2t}(-A\sin t + B\cos t) + 2te^{2t}(-A\sin t + B\cos t)$$
$$+ te^{2t}(-A\cos t - B\sin t)$$

$$x'' - 4x' + 5x = 2e^{2t}(A\cos t + B\sin t) + 2te^{2t}(-A\sin t + B\cos t)$$
$$+ 2e^{2t}(-A\sin t + B\cos t) + te^{2t}(-A\cos t - B\sin t)$$
$$-2\left(e^{2t}(A\cos t + B\sin t) + 2x + te^{2t}(-A\sin t + B\cos t)\right) + 5x$$
$$= \underline{x + te^{2t}(-A\cos t - B\sin t)} + 2e^{2t}(-A\sin t + B\cos t)$$
$$= e^{2t}\cos t \iff A = 0,\ B = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ \underline{x = \frac{t}{2}e^{2t}\sin t.}$$

check $\quad x' = \frac{1}{2}e^{2t}\sin t + te^{2t}\sin t + \frac{t}{2}e^{2t}\cos t$

$$x'' = e^{2t}\sin t + \frac{e^{2t}}{2}\cos t$$
$$+ e^{2t}\sin t + 2te^{2t}\sin t + te^{2t}\cos t$$
$$+ \frac{1}{2}e^{2t}\cos t + te^{2t}\cos t - \frac{t}{2}e^{2t}\sin t$$

$$x'' - 4x' + 5x = e^{2t}\sin t\left(2 + 2t - \frac{t}{2} - 2 - 4t + \frac{5}{2}t\right)$$
$$+ e^{2t}\cos t(1 + 2t - 2t) = e^{2t}\cos t.$$

//OK

$$\frac{(e^{it}-e^{-it})(e^{2it}+e^{-2it})}{2i} = \frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i} - \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

8.2(1) $x'' - 5x' + 6x = 2\sin t \cos 2t$

$$\Leftrightarrow (D-3)(D-2)x = \sin 3t - \sin t \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

$$x = \frac{1}{(D-3)(D-2)}(\sin 3t - \sin t) = \left(\frac{1}{D-3} - \frac{1}{D-2}\right)(\sin 3t - \sin t)$$

$$\cdot\ \frac{1}{D-3} = \frac{D+3}{D^2-9},\quad \frac{1}{D-2} = \frac{D+2}{D^2-4},\quad \begin{cases} D \sin \lambda t = \lambda \cos \lambda t \\ D^2 \sin \lambda t = -\lambda^2 \sin \lambda t \end{cases}$$

$$\because \begin{cases} \dfrac{1}{D-3}\sin 3t = \dfrac{D+3}{D^2-9}\sin 3t = \dfrac{3\cos 3t + 3\sin 3t}{-9-9} = \dfrac{\cos 3t + \sin 3t}{-6}, \\ \dfrac{1}{D-3}\sin t = \dfrac{D+3}{D^2-9}\sin t = \dfrac{\cos t + 3\sin t}{-1-9} = \dfrac{\cos t + 3\sin t}{-10} \\ \dfrac{1}{D-2}\sin 3t = \dfrac{D+2}{D^2-4}\sin 3t = \dfrac{3\cos 3t + 2\sin 3t}{-9-4} \\ \dfrac{1}{D-2}\sin t = \dfrac{D+2}{D^2-4}\sin t = \dfrac{\cos t + 2\sin t}{-1-4} \end{cases}$$

$$\therefore x = \frac{\cos 3t + \sin 3t}{-6} - \frac{\cos t + 3\sin t}{-10} - \frac{3\cos 3t + 2\sin 3t}{-13} + \frac{\cos t + 2\sin t}{-5}$$

$$= \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{13}\right)\cos 3t + \left(\frac{1}{-6} + \frac{2}{13}\right)\sin 3t + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right)\cos t + \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}\right)\sin t$$

$$= \frac{5\cos 3t - \sin 3t}{78} + \frac{-\cos t - \sin t}{10} \;//$$

check

$$x' = \frac{-15\sin 3t - 3\cos 3t}{78} + \frac{\sin t - \cos t}{10}$$

$$x'' = \frac{-45\cos 3t + 9\sin 3t}{78} + \frac{\cos t + \sin t}{10}$$

$$x'' - 5x' + 6x = \frac{-45+15+30}{78}\cos 3t + \frac{9+75-6}{78}\sin 3t$$

$$+ \frac{1+5-6}{10}\cos t + \frac{1-5-6}{10}\sin t = \sin 3t - \sin t \;//$$

8.2(2) $x''-3x'+2x=e^t\cos t \iff (D-2)(D-1)x=e^t\cos t$

$$\Rightarrow x=\left(\frac{1}{D-2}-\frac{1}{D-1}\right)e^t\cos t.$$

$$\frac{1}{D-2}(e^t\cos t)=e^t\frac{1}{D-1}\cos t$$ [注意8.3.2参照]

$$=e^t\frac{D+1}{D^2-1}\cos t=e^t\frac{-\sin t+\cos t}{-1-1}$$

同様に

$$\frac{1}{D-1}(e^t\cos t)=e^t\frac{1}{D}\cos t=e^t\frac{D}{D^2}\cos t=e^t\frac{-\sin t}{-1}$$

$$\therefore\ x=e^t\left(\frac{\sin t-\cos t}{2}-\sin t\right)=e^t\cdot\frac{\sin t+\cos t}{-2}.$$

<u>check</u> $x'=x+e^t\frac{\cos t-\sin t}{-2}=e^t\frac{2\cos t}{-2}=-e^t\cos t$

$$x''=e^t(-\cos t+\sin t)$$

$$\therefore\ x''-3x'+2x=e^t\left(-\cos t+\sin t+3\cos t+2\cdot\frac{\sin t+\cos t}{-2}\right)$$

$$=e^t\cos t. \quad //$$

8.2 (3) $x'' - 4x' + 4x = t^2+3 \iff (D-2)^2 x = t^2+3$

$\Rightarrow x = (2-D)^{-2}(t^2+3) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{-2}(t^2+3)$,

$\left(1-\frac{D}{2}\right)^{-1}(t^2+3) = \left(1+\frac{D}{2}+\left(\frac{D}{2}\right)^2\right)(t^2+3)$ (∵ $D^3t^2=0$)

$= (t^2+3)+t+\frac{1}{2} = t^2+t+\frac{7}{2}$.

∴ $x = \frac{1}{4}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{-2}(t^2+3) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{D}{2}+\left(\frac{D}{2}\right)^2\right)\left(t^2+t+\frac{7}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\left(t^2+t+\frac{7}{2}\right)+\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(t^2+2t+\frac{9}{2}\right)$. //

check $(D-2)\left(t^2+2t+\frac{9}{2}\right) = (2t+2)-2\left(t^2+2t+\frac{9}{2}\right) = -2t^2-2t-7$,

$(D-2)(-2t^2-2t-7) = (-4t-2)-2(-2t^2-2t-7) = 4(t^2+3)$. //

(4) $x''+4x = \sin t - \cos 2t \iff (D^2+4)x = \sin t - \cos 2t$.

・$\frac{1}{D^2+4}(\sin t) = \frac{1}{-1+4}\sin t = \frac{\sin t}{3}$.

・$(D^2+4)(\cos 2t) = 0$ に注意すると, $2+\varepsilon \to 2$ ($\varepsilon \to 0$) のとき

$(D^2+4)\frac{\cos(2+\varepsilon)t - \cos 2t}{\varepsilon} = (D^2+4)\frac{\cos(2+\varepsilon)t}{\varepsilon}$

$= \frac{-(2+\varepsilon)^2+4}{\varepsilon}\cos(2+\varepsilon)t \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -4\cos 2t$

∴ $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos(2+\varepsilon)t-\cos 2t}{4\varepsilon} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\cos(2+\varepsilon)t\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{-t\sin 2t}{4}$

$= (D^2+4)^{-1}(-\cos 2t)$ ∴ $x = \frac{\sin t}{3} - \frac{t\sin 2t}{4}$. //

$(t\sin 2t)''$
$= (\sin 2t + 2t\cos 2t)'$
$= 4\cos 2t - 4t\sin 2t$

check $x'' = \frac{-\sin t}{3} - \left(\frac{4\cos 2t - 4t\sin 2t}{4}\right)$, $x''+4x = \frac{3\sin t}{3} - \cos 2t$.

▷ 8.3 a, b, c : 定数, $x'' + ax' + bx = ct^m$ (m は自然数)

$bc \neq 0$ とする

$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, $\alpha \neq \beta$

($\alpha \neq \beta$ は実は不要)

$x(t) = \sum_{j=0}^{m} x_j t^j$ とする.

(1) $x'(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{m-1} (j+1) x_{j+1} t^j$

$$x''(t) = \sum_{j=1}^{m-1} (j+1) j x_{j+1} t^{j-1} = \sum_{j=0}^{m-2} (j+2)(j+1) x_{j+2} t^j$$

(2) $x'' + ax' + bx$

$$= \sum_{j=0}^{m-2} \left\{ (j+2)(j+1) x_{j+2} + a(j+1) x_{j+1} + b x_j \right\} t^j + (a m x_m + b x_{m-1}) t^{m-1} + b x_m t^m$$

$$= ct^m \iff \begin{cases} b x_m = c, \quad a m x_m + b x_{m-1} = 0, \\ (j+2)(j+1) x_{j+2} + a(j+1) x_{j+1} + b x_j = 0 \quad (0 \leq j \leq m-2) \end{cases}$$

(3) $x_m = \dfrac{c}{b}$, $x_{m-1} = -\dfrac{am}{b} x_m = -\dfrac{ac}{b} m$,

$$x_{m-2} = -\frac{1}{b}\left(m(m-1) x_m + a(m-1) x_{m-1} \right)$$

$$= -\frac{m(m-1)}{b^2} c + \frac{m(m-1)}{b^2} a^2 c = \frac{m(m-1)}{b^2} (a^2 - 1) c,$$

$$x_{m-3} = -\frac{1}{b}(m-1)(m-2) \frac{-ac}{b} m - \frac{a}{b}(m-2) \cdot \frac{m(m-1)}{b^2} (a^2 - 1) c$$

$$= m(m-1)(m-2) \left(\frac{ac}{b^2} - \frac{ac}{b^3}(a^2 - 1) \right) = \frac{m(m-1)(m-2)}{b^3} ac (b - a^2 + 1)$$

. . . .

//

8.4 (1) $D_t^2 + a(t)D_t + b(t) = (D_t - f)(D_t - g)$

$\Leftrightarrow x'' + a(t)x' + b(t)x = (x' - gx)' - f(x' - gx)$

$= x'' - (g'x + gx') - fx' + fgx$

$= x'' - (f+g)x' + (fg - g')x$

$\therefore -a(t) = f + g,\ b(t) = fg - g'.$

(2) $s = \int^t f(t)dt$ のとき, $\frac{ds}{dt} = f(t)$ $\therefore \frac{1}{f(t)}\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds}$

$\therefore (D_t - f(t))x(t) = R(t)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(t)}D_t - 1\right)x(t) = \frac{1}{f(t)}R(t)$

$\Leftrightarrow (D_s - 1)x = \frac{R}{f}$

$\Leftrightarrow e^{-s}(D_s - 1)x = e^{-s}\frac{R}{f}$

$= \underbrace{D_s(e^{-s}x)}_{= e^{-s}x' - e^{-s}x = e^{-s}(D-1)x.}$

$\therefore e^{-s}x = D_s^{-1}\left(e^{-s}\frac{R}{f}\right),\ x = e^{s}D_s^{-1}\left(e^{-s}\frac{R}{f}\right)$ //

$\left[\Leftrightarrow x(s) = e^{s}\int^{s} e^{-s}\frac{R}{f}ds \right.$

$\left. = e^{\int^t f(t)dt}\int^t e^{-\int^t f(t)dt}R(t)\,dt. \right]$

9章

問9.2.1 $N=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ のとき，$N^2=O$ であるので

$$e^{tN}=E+tN+\frac{t^2N^2}{2}+\cdots=E+tN=\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}.$$

問9.3.1 (1) $B=\begin{bmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{bmatrix}$ のとき．

$B=\alpha E+\beta J$ $\left(E=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right)$ であり，

$EJ=JE$，定理9.3.1(2)より，$e^B=e^{\alpha E}e^{\alpha J}$ となる．

例9.2.1より，

・$e^{\alpha E}=e^{\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\alpha\end{bmatrix}}=\begin{pmatrix}e^\alpha&0\\0&e^\alpha\end{pmatrix}=e^\alpha E$

・$e^{\beta J}=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}$

であるので

$$e^B=e^\alpha E\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}=e^\alpha\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}.$$

(2) $C=\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}=\lambda E+N$ $\left(N=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)$ であり，

(1)と同様に $EN=NE$ より $e^{tC}=e^{t\lambda E}e^{tN}$ である．

$e^{t\lambda E}=e^{t\lambda}E$，$e^{tN}=\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}$ であるので

$$e^{tC}=e^{t\lambda}E\cdot\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}=e^{t\lambda}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}.$$

(古5)

$\mathbb{V}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$; 補題 9.4.1 では $\mathbb{X}(t)$

問 9.4.1

補題(2) : $\dfrac{d}{dt}(A\mathbb{X})(t) = \dfrac{dA}{dt}(t)\mathbb{X}(t) + A(t)\dfrac{d}{dt}\mathbb{X}(t)$

$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とすると

$$(A\mathbb{X})(t) = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(A\mathbb{X})(t) = \begin{pmatrix} (a_{11}x + a_{12}y)' \\ (a_{21}x + a_{22}y)' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}'x + a_{11}x') + (a_{12}'y + a_{12}y') \\ (a_{21}'x + a_{22}x') + (a_{21}'y + a_{22}y') \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}A(t)\right)\mathbb{X}(t) + A(t)\left(\frac{d}{dt}\mathbb{X}(t)\right).$$

//

章末9

9.1 $A=\begin{bmatrix}1 & \alpha \\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -\alpha & 1\end{bmatrix}$ のとき

・$A+B=\begin{bmatrix}2 & \alpha \\ -\alpha & 2\end{bmatrix} = 2E+\alpha\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}$,

$$\therefore\ e^{A+B} = e^{2E}e^{\alpha\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}} = e^{2}\cdot\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}. //$$

・$e^{A}e^{B} = e^{E+\alpha N}\,e^{E-\alpha N'}$ $\left(N=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\ N'=\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)$

$$\begin{cases} e^{E+\alpha N} = e^{E}e^{\alpha N} = e\cdot\begin{bmatrix}1 & \alpha \\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ e^{E-\alpha N'} = e^{E}e^{-\alpha N'} = e\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -\alpha & 1\end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\therefore\ e^{A}e^{B} = \left(e\begin{bmatrix}1 & \alpha \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\left(e\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -\alpha & 1\end{bmatrix}\right) = e^{2}\begin{bmatrix}1-\alpha^{2} & \alpha \\ -\alpha & 1\end{bmatrix} //$$

・$$e^{B}e^{A} = \left(e\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -\alpha & 1\end{bmatrix}\right)\left(e\begin{bmatrix}1 & \alpha \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = e^{2}\begin{bmatrix}1 & \alpha \\ -\alpha & 1-\alpha^{2}\end{bmatrix}. //$$

9.2 $\quad x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = q + t p$, $\mathbb{X}(t) = R(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$\left(R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = e^{tJ},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ のとき

$x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R(t)^{-1} \mathbb{X}(t)$ は $\frac{d^2}{dt^2} x(t) = 0$ をみたす。

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \left(R(t)^{-1} \mathbb{X}(t) \right) = 0.$$

$\frac{d}{dt}(e^{tJ}) = J e^{tJ}$, $R(t)^{-1} = e^{-tJ}$, $\frac{d}{dt} x(t) = p$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(R(t)^{-1} \mathbb{X}(t) \right) &= \frac{d}{dt}\left(e^{-tJ} \right) \mathbb{X}(t) + e^{-tJ} \frac{d}{dt} \mathbb{X}(t) \\ &= -J e^{-tJ} \mathbb{X}(t) + e^{-tJ} \frac{d}{dt} \mathbb{X}(t) \\ &= R(t)^{-1} \left(\frac{d}{dt} - J \right) \mathbb{X}(t) \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d^2}{dt^2}\left(R(t)^{-1} \mathbb{X} \right) &= \frac{d}{dt}\left(R(t)^{-1} \left(\frac{d}{dt} - J \right) \mathbb{X} \right) \\ &= R(t)^{-1} \left(\frac{d}{dt} - J \right)^2 \mathbb{X}(t) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt} - J \right)^2 \mathbb{X}(t) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{X}''(t) - 2J\mathbb{X}'(t) - \mathbb{X}(t) = 0.$$

//

9.3 $F(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ \sin 2t & -\cos 2t \end{bmatrix}$, $\mathbb{x}(t) = F(t)\mathbb{x}_0 = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ のとき

$$F(t)' = 2\begin{bmatrix} -\sin 2t & \cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F(t)$$

$$\left(= 2F(t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

であるから

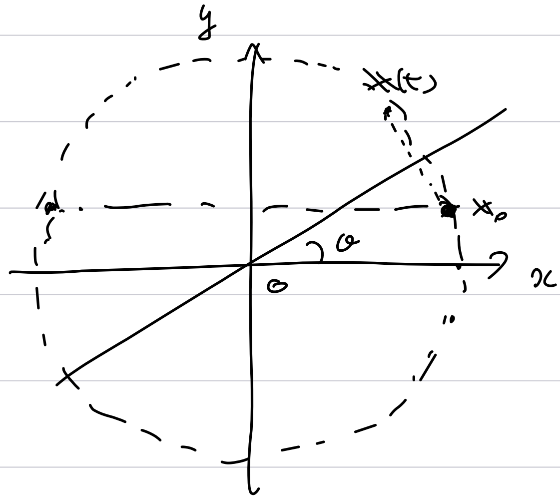
$$\mathbb{x}'(t) = F(t)'\mathbb{x}_0 = 2JF(t)\mathbb{x}_0$$

$$= 2J\mathbb{x}(t). \quad \left(J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

軌跡は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \cdot x_0 + \sin 2t \cdot y_0 \\ \sin 2t \cdot x - \cos 2t \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

より、$x(t)^2 + y(t)^2 = x_0^2 + y_0^2$.



問 10.1.1 (1) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$.　$|A-\lambda E|=(3-\lambda)^2-4=0$, $\lambda-3=\pm 2$

∴ 固有値は $\lambda=1,5$ である. 対応する固有ベクトルを求める。

・$\lambda=1$のとき

$$(A-E)\vec{v_1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \text{ より, } \vec{v_1}=c\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\ (c\neq 0).$$

・$\lambda=5$のとき

$$(A-5E)\vec{v_5}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\vec{v_5}=\vec{0} \text{ より, } \vec{v_5}=c\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\ (c\neq 0).$$

そこで $P=[\vec{v_1},\vec{v_5}]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ とすれば

$$AP=[A\vec{v_1},A\vec{v_5}]=[1\cdot\vec{v_1},5\cdot\vec{v_5}]=[\vec{v_1},\vec{v_5}]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$
$$=P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

$|P|=-4\neq 0$ より P^{-1} があるので,

これを左から掛け $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ を得る。//

(2) $B=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. $|B-\lambda E|=\lambda^2+4=0$ より, $\lambda=\pm 2i$.

対応する固有ベクトルを $\vec{v_\pm}$ とすると

$$(A\mp 2iE)\vec{v_\pm}=\begin{bmatrix}\mp 2i & -4\\ 1 & \mp 2i\end{bmatrix}\vec{v_\pm}=\vec{0} \text{ より, } \vec{v_\pm}=c\begin{pmatrix}\pm 2i\\ 1\end{pmatrix}.$$

∴ $P=(\vec{v_+},\vec{v_-})=\begin{pmatrix}2i & -2i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とおけば　$(c\neq 0)$

$$BP=[B\vec{v_+},B\vec{v_-}]=[2i\vec{v_+},-2i\vec{v_-}]=[\vec{v_+},\vec{v_-}]\begin{pmatrix}2i & 0\\ 0 & -2i\end{pmatrix}$$
$$=P\begin{bmatrix}2i & 0\\ 0 & -2i\end{bmatrix}$$

$|P|=4i\neq 0$ より $P^{-1}\left(=\frac{1}{4i}\begin{pmatrix}1 & 2i\\ -1 & 2i\end{pmatrix}\right)$ がある。左から掛ければ

$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}2i & 0\\ 0 & -2i\end{pmatrix}$ を得る。//

問10.3.1 (1) $K=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda E+N\left(E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$ のとき

$EN=NE$ なので、$e^{t(\lambda E+N)}=e^{t\lambda E}e^{tN}$ である。

$e^{t\lambda E}=e^{t\lambda}E$, $e^{tN}=\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}$ $\therefore e^{tK}=e^{t\lambda}\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}$ //

(2) $A=\begin{bmatrix}3&1\\4&3\end{bmatrix}$; $P=\begin{bmatrix}1&1\\-2&2\end{bmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}$ なので、

(3) イ) とすべきだった

(1) $A=P\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}P^{-1}$ $\therefore e^{tA}=e^{tP\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}P^{-1}}=Pe^{t\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}}P^{-1}$.

$e^{t\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}e^t&0\\0&e^{5t}\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}2&-1\\2&1\end{bmatrix}$ であるから

$$e^{tA}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}1&1\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t&0\\0&e^{5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}1&1\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^t&-e^t\\2e^{5t}&e^{5t}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}2e^t+2e^{5t}&-e^t+e^{5t}\\-4e^t+4e^{5t}&2e^t+2e^{5t}\end{bmatrix}. \quad //$$

$B=\begin{bmatrix}0&-4\\1&0\end{bmatrix}$; $P=\begin{bmatrix}2i&-2i\\1&1\end{bmatrix}$ により $B=P\begin{bmatrix}2i&0\\0&-2i\end{bmatrix}P^{-1}$,

$$\therefore e^{tB}=e^{tP\begin{bmatrix}2i&0\\0&-2i\end{bmatrix}P^{-1}}=Pe^{t\begin{bmatrix}2i&0\\0&-2i\end{bmatrix}}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2i&-2i\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2it}&0\\0&e^{-2it}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{4i}\begin{bmatrix}1&2i\\-1&2i\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4i}\begin{bmatrix}2i&-2i\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2it}&2ie^{2it}\\-e^{-2it}&2ie^{-2it}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}&i(e^{2it}-e^{-2it})\\\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{4i}&\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t&-2\sin 2t\\\frac{\sin 2t}{2}&\cos 2t\end{bmatrix} \quad //$$

⑦ (2) ・ $\mathbb{X}' = A\mathbb{X}$ の解は，$\mathbb{X}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ とすれば

$$\mathbb{X}(t) = e^{tA}\mathbb{X}(0) = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 2e^t+2e^{5t} & -e^t+e^{5t} \\ -4e^t+4e^{5t} & 2e^t+2e^{5t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{e^t+e^{5t}}{2}x_0 + \dfrac{e^t-e^{5t}}{4}y_0 \\ (e^t-e^{5t})x_0 - \dfrac{e^t+e^{5t}}{2}y_0 \end{bmatrix} //$$

・同様に，$\mathbb{X}' = B\mathbb{X}$ の解は

$$\mathbb{X}(t) = e^{tB}\mathbb{X}(0) = \begin{bmatrix} \cos 2t & -2\sin 2t \\ \dfrac{\sin 2t}{2} & \cos 2t \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_0\cos 2t - 2y_0\sin 2t \\ \dfrac{x_0}{2}\sin 2t + y_0\cos 2t \end{bmatrix}. //$$

章末10

10.1 3)

$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(1) 固有値は、

$$0 = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda-3)(\lambda-7)$$

より、$\lambda = 3, 7$. 対応する固有ベクトルは、

・<u>$\lambda = 3$のとき</u>: $(A-3)v_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v_3 = 0$ $\therefore v_3 = k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$

・<u>$\lambda = 7$のとき</u>: $(A-7)v_7 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} v_7 = 0$ $\therefore v_7 = k\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$

(2) (1)より、$P = [v_3, v_7] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ により

$$AP = [Av_3, Av_7] = [v_3, v_7]\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$|P| \neq 0$ より P^{-1} があり、$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$. //

(3)
$$e^{tA} = e^{tP\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}P^{-1}} = Pe^{t\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{7t} \\ -e^{3t} & e^{7t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{3t} + 3e^{7t} & -3e^{3t} + 3e^{7t} \\ -e^{3t} + e^{7t} & 3e^{3t} + e^{7t} \end{bmatrix}. //$$

イ) (1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$: $|A-\lambda E|=\lambda^2-4\lambda+5=(\lambda-2)^2+1=0$ より

固有値 $\lambda=2\pm i$. 対応する固有ベクトル $\vec{v}_\pm$ は

$(A-(2\pm i)E)\vec{v}_\pm=\begin{bmatrix}-1\mp i & 2\\ -1 & 1\mp i\end{bmatrix}\vec{v}_\pm=\vec{0}$ より $\vec{v}_\pm=c\begin{bmatrix}1\mp i\\ 1\end{bmatrix}$ $(c\neq 0)$. //

(2) $P=(\vec{v}_+,\vec{v}_-)=\begin{bmatrix}1-i & 1+i\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ とおけば $AP=P\begin{bmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{bmatrix}$ であり

$|P|=-2i\neq 0$ より P^{-1} が存在する. $\therefore A=P\begin{bmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{bmatrix}P^{-1}$. //

(3) $e^{tA}=e^{tP\begin{bmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{bmatrix}P^{-1}}=Pe^{t\begin{pmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{pmatrix}}P^{-1}$

$=\dfrac{e^{2t}}{-2i}\begin{bmatrix}1-i & 1+i\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{it} & 0\\ 0 & e^{-it}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1-i\\ -1 & 1-i\end{bmatrix}$

$=\dfrac{e^{2t}}{-2i}\begin{pmatrix}1-i & 1+i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}e^{it} & -(1+i)e^{it}\\ -e^{-it} & (1-i)e^{-it}\end{bmatrix}$

$=e^{2t}\begin{bmatrix}-\sin t+\cos t & 2\sin t\\ -\sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix}$. //

ウ) (1) $A=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -1 & 9\end{bmatrix}$: $|A-\lambda E|=\lambda^2-6\lambda-23=(\lambda-3)^2-32$ より

typo. 修正次頁 (→) △

固有値は $\lambda=3\pm4\sqrt{2}$. 対応する固有ベクトル $\vec{v}_\pm$ は

$(A-(3\pm4\sqrt{2})E)\vec{v}_\pm=\begin{bmatrix}-6\mp4\sqrt{2} & 4\\ -1 & 6\mp4\sqrt{2}\end{bmatrix}\vec{v}_\pm=\vec{0}$ より, $\vec{v}_\pm=c\begin{bmatrix}6\mp4\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}$ $(c\neq0)$

(2) $P=(\vec{v}_+,\vec{v}_-)=\begin{bmatrix}6-4\sqrt{2} & 6+4\sqrt{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ により $A=P\begin{bmatrix}6-4\sqrt{2} & 0\\ 0 & 6+4\sqrt{2}\end{bmatrix}P^{-1}$.

(3) $e^{tA}=Pe^{t\begin{bmatrix}6-4\sqrt{2} & 0\\ 0 & 6+4\sqrt{2}\end{bmatrix}}P^{-1}=e^{6t}P\begin{bmatrix}e^{-4\sqrt{2}t} & 0\\ 0 & e^{4\sqrt{2}t}\end{bmatrix}P^{-1}$

$=\dfrac{e^{6t}}{-8\sqrt{2}}\begin{bmatrix}6-4\sqrt{2} & 6+4\sqrt{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-4\sqrt{2}t} & 0\\ 0 & e^{4\sqrt{2}t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -6-4\sqrt{2}\\ -1 & 6-4\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$=\dfrac{e^{6t}}{-8\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(6-4\sqrt{2})e^{-4\sqrt{2}t}-(6+4\sqrt{2})e^{4\sqrt{2}t} & -4e^{-4\sqrt{2}t}-4e^{4\sqrt{2}t}\\ e^{-4\sqrt{2}t}-e^{4\sqrt{2}t} & -(6+4\sqrt{2})e^{-4\sqrt{2}t}+(6-4\sqrt{2})e^{4\sqrt{2}t}\end{bmatrix}$ //

(修正版)

10.1 ウ) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$ の場合.

$$|A - \lambda| = \lambda^2 - 6\lambda + (36-27) = (\lambda-3)^2,$$

(1) $(A-3E)v = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} v = 0 \iff v = k\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(2) $(A-3E)v' = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{=v} \iff \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} v' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ v' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \ell\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$P = [v, v'] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1/2 \end{bmatrix}$ により $|P| \neq 0$,

$$AP = [3v, 3v'+v] = [v, v']\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore\ P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad \left(P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

(3) $e^{tA} = P e^{t\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} P^{-1} = P e^{t\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} e^{t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} P^{-1}$

$$= P\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= e^{3t} P\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = e^{3t}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-3t & 2t \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1-6t & 4t \\ -9t & 6t+1 \end{bmatrix} \quad //$$

10.2 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $|A-\lambda E| = \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ とする。

・$\alpha\neq\beta$ なら、$A=P\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}P^{-1}$ と対角化でき、$e^{tA}=P\begin{bmatrix} e^{t\alpha} & 0 \\ 0 & e^{t\beta} \end{bmatrix}P^{-1}$

$$\Rightarrow |e^{tA}-\lambda E| = \left|P\begin{bmatrix} e^{t\alpha}-\lambda & 0 \\ 0 & e^{t\beta}-\lambda \end{bmatrix}P^{-1}\right| = (e^{t\alpha}-\lambda)(e^{t\beta}-\lambda).$$

ここで、行列式の性質 $|PQ|=|P||Q|$, $|P^{-1}|=|P|^{-1}$ を用いた。とくに

$$|e^{tA}| = e^{t(\alpha+\beta)} = e^{t(a+d)} = e^{t\,\mathrm{Tr}\,A}$$ ∵ 解と係数の関係。

・$\alpha=\beta$ のとき、$A=\alpha E$ または $A=R\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}R^{-1}$ の形である。

(定理10.2.1(3)). 前者の場合 A は対角なので上と同じである。

$A=R(\alpha E+N)R^{-1}$ のときは $\left(N=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$$e^{tA}=Re^{t(\alpha E+N)}R^{-1} = R\cdot e^{t\alpha}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot R^{-1}$$

$$\because\ |e^{tA}-\lambda E| = \left|R\begin{bmatrix} e^{t\alpha}-\lambda & te^{t\alpha} \\ 0 & e^{t\alpha}-\lambda \end{bmatrix}R^{-1}\right| = (e^{t\alpha}-\lambda)^2.$$ 特に

$$|e^{tA}| = e^{2t\alpha} \overset{(*)}{=} e^{t\,\mathrm{Tr}\,A}$$ も成り立つ。[(*)：下の注]

注 一般に、$\mathrm{Tr}(AA')=\mathrm{Tr}(A'A)$ が成り立つ：A, A' 共 2×2 なら、

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) = (aa'+bc')+(b'c+dd') \\ \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (aa'+b'c)+(bc'+dd') \end{cases}$$

とくに、$\mathrm{Tr}(R^{-1}AR) = \mathrm{Tr}(R^{-1}(AR))$

$$= \mathrm{Tr}((AR)R^{-1}) = \mathrm{Tr}\,A.$$

これより、(*)は $2\alpha=\mathrm{Tr}(\alpha E+N)=\mathrm{Tr}\,A$ とたしかめられる。

($\alpha\neq\beta$ のときと同じく解と係数の関係からも分る。) //

$\boxed{\boldsymbol{x}(t)}$

10.3 $\quad \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{f}(t)$ とする.

(1) $\boldsymbol{y} = e^{-tA}\boldsymbol{x}$ とおくと $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{y}$,

∴ $\boldsymbol{x}' = (e^{tA})'\boldsymbol{y} + e^{tA}\boldsymbol{y}' = A\cdot e^{tA}\boldsymbol{y} + e^{tA}\cdot\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{x} + e^{tA}\boldsymbol{y}'$.

これと $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ と比較し, $e^{tA}\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}$ を得る. //

(2) $\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = e^{-tA}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ より, 積分すれば $\boldsymbol{y}$ を得る.

∴ $\boldsymbol{y}(t) = \int^t e^{-sA}\boldsymbol{f}(s)\,ds = \boldsymbol{f}(0) + \int_0^t e^{-sA}\boldsymbol{f}(s)\,ds$.

(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ \cos t \end{bmatrix}$ のとき. まず e^{tA} を求めると

$|A-\lambda E| = \lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$ より, 固有値は $\lambda=-1,-2$

固有ベクトルは,

・$\lambda=-1$ のとき, $(A+E)\vec{v}_{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\vec{v}_{-1} = \vec{0}$ より, $\vec{v}_{-1} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. $(c\neq 0)$

・$\lambda=-2$ のとき, $(A+2E)\vec{v}_{-2} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\vec{v}_{-2} = \vec{0}$ より, $\vec{v}_{-2} = c\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$. (同)

∴ $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ により, $A = P\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}P^{-1}$ となり,

$$e^{tA} = P\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4e^{-t} & 3e^{-t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-t}-3e^{-2t} & 3(e^{-t}-e^{-2t}) \\ 4(-e^{-t}+e^{-2t}) & -3e^{-t}+4e^{-2t} \end{bmatrix}\right).$$

↗

⑦ 続)

$$\therefore\ x(t) = e^{tA}\int^t e^{-sA} f(s)\,ds$$

$$= P\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}P^{-1}\int^t P\begin{bmatrix} e^{s} & 0 \\ 0 & e^{2s}\end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix} e^{s} \\ \cos s\end{bmatrix}ds$$

$$= P\int^t \begin{bmatrix} e^{s-t} & 0 \\ 0 & e^{2(s-t)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4e^{s}+3\cos s \\ e^{s}+\cos s\end{bmatrix}ds = P\int^t \begin{bmatrix} e^{s-t}(4e^{s}+3\cos s) \\ e^{2s-2t}(e^{s}+\cos s)\end{bmatrix}ds.$$

ここで

$$\left\{\begin{aligned} &\int^t e^{s-t}(4e^s+3\cos s)\,ds = 4e^{-t}\int^t e^{2s}ds + 3e^{-t}\int^t e^{s}\cos s\,ds \\ &= 2e^{-t}\cdot e^{2t} + 3e^{-t}\cdot e^{t}\frac{\cos t+\sin t}{2} = 2e^{t} + 3\frac{\cos t+\sin t}{2}, \\ &\int^t e^{2s-2t}(e^s+\cos s)\,ds = e^{-2t}\int^t e^{3s}ds + e^{-2t}\int^t e^{2s}\cos s\,ds \\ &= e^{-2t}\cdot\frac{1}{3}e^{3t} + e^{-2t}\cdot e^{2t}\frac{2\cos t+\sin t}{5} = \frac{e^t}{3} + \frac{2\cos t+\sin t}{5}, \end{aligned}\right.$$

$$\therefore\ x(t) = P\begin{bmatrix} 2e^t + 3\dfrac{\cos t+\sin t}{2} \\ \dfrac{e^t}{3} + \dfrac{2\cos t+\sin t}{5}\end{bmatrix},\quad P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4\end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} e^t + 3\dfrac{\cos t+\sin t}{2} - 3\dfrac{2\cos t+\sin t}{5} \\ -\dfrac{2}{3}e^t - 3\dfrac{\cos t+\sin t}{2} + 4\dfrac{2\cos t+\sin t}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + \dfrac{3\cos t+9\sin t}{10} \\ -\dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{\cos t-7\sin t}{10}\end{bmatrix}. \quad //$$

$$\because\ \left\{\begin{aligned} &\left(e^t(\cos t+\sin t)\right)' = e^t(\cos t+\sin t) + e^t(-\sin t+\cos t) = 2e^t\cos t \\ &\left(e^{2t}\frac{2\cos t+\sin t}{5}\right)' = 2e^{2t}\frac{2\cos t+\sin t}{5} + e^{2t}\frac{-2\sin t+\cos t}{5} = e^{2t}\cdot\cos t \end{aligned}\right.$$

11章

問11.1.1

$x(t)$, $\tilde{x}(t)$ がともに (11.1) の解とする。すべての t に対して

$x(t) = \tilde{x}(t)$ とすれば、$t=0$ のとき $x(0) = x_0 = \tilde{x}(0)$。

つまり $x \equiv \tilde{x} \Rightarrow x(0) = \tilde{x}(0)$。

「初期値が異なれば解は異なる」は、この対偶である。⊗ //

⊗ 結局
解が一意性
を認めれば自明

問11.1.2

$$x(t) = e^{tA} x_0 \quad : (e^{tA})' = Ae^{tA} \text{ より、(11.1)の解}$$

$$= P e^{\begin{pmatrix} \lambda_+ t & 0 \\ 0 & \lambda_- t \end{pmatrix}} P^{-1} x_0 \quad : A\text{が対角化できるという仮定より}$$

$$x_0 = c_+ v_+ + c_- v_- \quad : \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ なら、} v_+ \text{ と } v_- \text{(1次独立)}$$

$$= P \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \quad : P = (v_+, v_-) \text{ の定義}$$

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \quad : \text{上の式を2行目に代入した}$$

$$= P \begin{pmatrix} c_+ e^{\lambda_+ t} \\ c_- e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \quad : \text{積の計算}$$

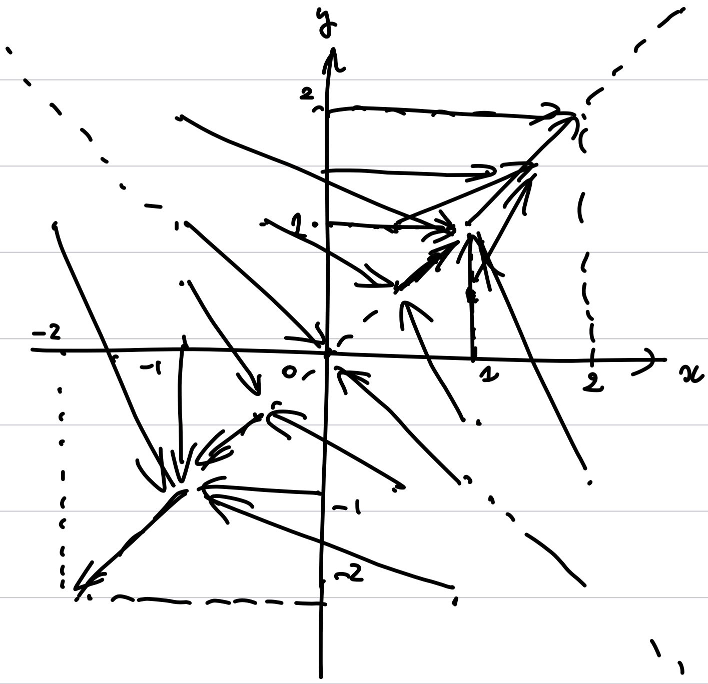
$$= c_+ e^{\lambda_+ t} v_+ + c_- e^{\lambda_- t} v_- \quad : P = (v_+, v_-) \text{ より。}$$

//

訂

系11.1.1 ~~の~~ 「(11.1)の」 線形方程式 とする。
(一般には2次元でない)

問11.2.1　$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ のときの、(11.4) のベクトル場は、点 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ を描いたものである。



㊟ 解を近似する観点では、(11.5) のように、$\varepsilon A\boldsymbol{x}$（$\varepsilon$は小）を描く方が実感がわく。

問11.2.2.(1) $A=\begin{bmatrix}3&1\\4&3\end{bmatrix}$ のとき, $\mathbb{x}'=A\mathbb{x}$ の解曲線

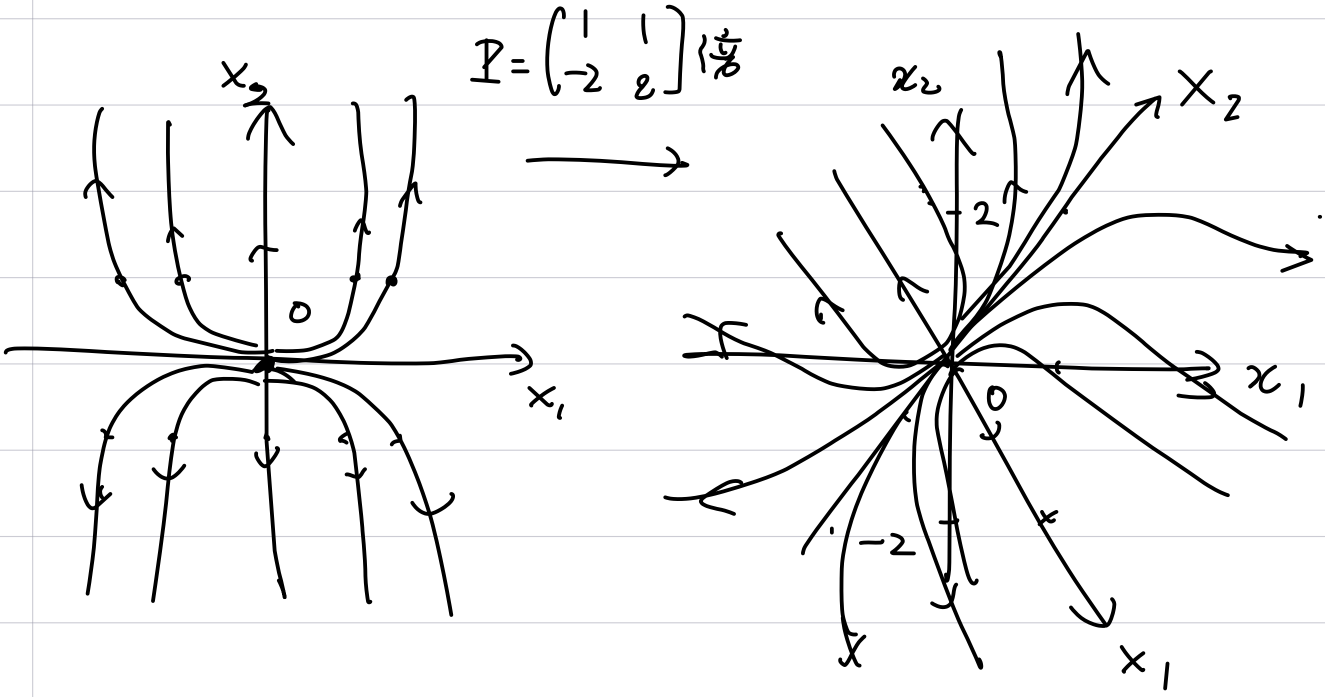
問10.1.1.より, $P=[\vec{v_1},\vec{v_5}]=\begin{bmatrix}1&1\\-2&2\end{bmatrix}$ により

$$A=P\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}P^{-1},\quad \therefore\ e^{tA}=P\begin{bmatrix}e^{t}&0\\0&e^{5t}\end{bmatrix}P^{-1}.$$

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ とすれば, $x(t)=e^{tA}x(0)$

$$\Longleftrightarrow\ \begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{pmatrix}=P^{-1}x(t)=P^{-1}P\begin{bmatrix}e^{t}&0\\0&e^{5t}\end{bmatrix}P^{-1}\cdot P\begin{pmatrix}X_1(0)\\X_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t}X_1(0)\\e^{5t}X_2(0)\end{pmatrix}$$

$\therefore\ X_2=X_1^{5}\times$定数.



(2) $A=\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}$. $|A-\lambda E|=\lambda^2-4=0$ より, 固有値は ± 2.

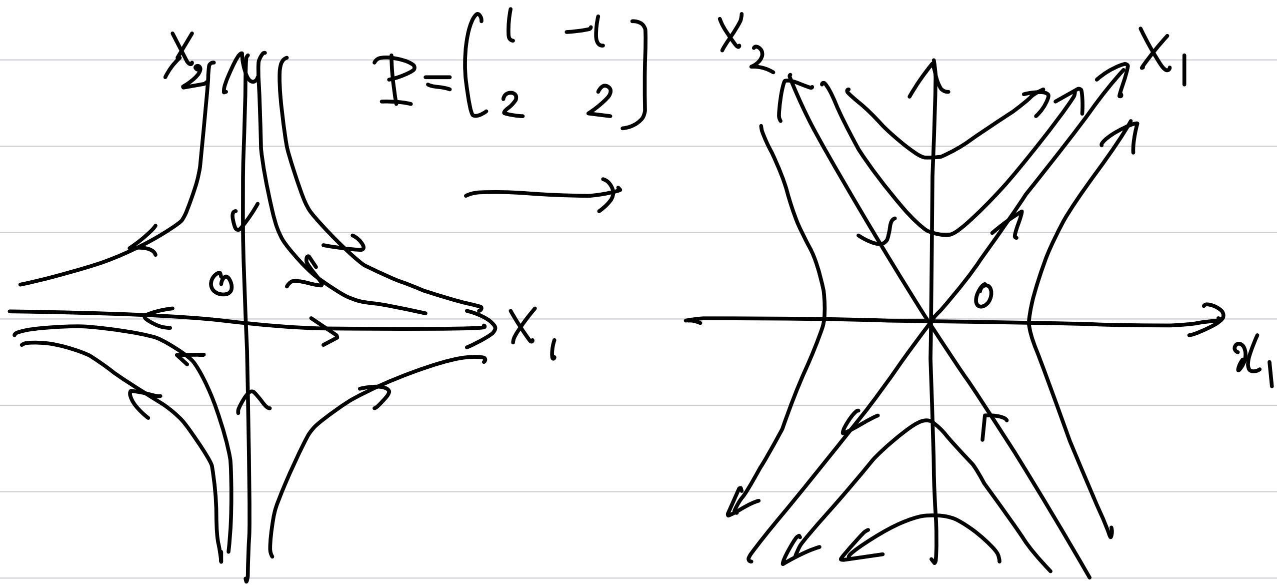
$(A-(\pm 2)E)\vec{v}_\pm=\begin{bmatrix}\mp 2&1\\4&\mp 2\end{bmatrix}\vec{v}_\pm$ より, $\begin{pmatrix}\pm 1\\2\end{pmatrix}=\vec{v}_\pm$ が固有ベクトル.

$P=\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}$ により, $AP=P\begin{bmatrix}2&0\\0&-2\end{bmatrix}$, $e^{tA}=P\begin{pmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{-2t}\end{pmatrix}P^{-1}$.

∴ $x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{pmatrix}$ とすれば,

$$x(t)=e^{tA}\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}=P\begin{bmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{-2t}\end{bmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}X_1(0)\\X_2(0)\end{pmatrix}=P\begin{bmatrix}e^{2t}X_1(0)\\e^{-2t}X_2(0)\end{bmatrix}$$

解曲線は, $X_1X_2=\text{Const.}$ を P 倍したものとなる。



問 11.2.3 $B=\begin{bmatrix}0&-4\\1&0\end{bmatrix}$ のとき.

$$|B-\lambda E| = \begin{vmatrix}-\lambda & -4\\1&-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2+4=0 \iff \lambda=\pm 2i$$

固有ベクトルを $\vec{v}_\pm$ とすると

$$(B\mp 2i)\vec{v}_\pm = \begin{pmatrix}\mp 2i & -4\\ 1 & \mp 2i\end{pmatrix}\vec{v}_\pm = \vec{0} \qquad \because\ \vec{v}_\pm = c\begin{bmatrix}\pm 2i\\1\end{bmatrix}\ (c\neq 0)$$

$\vec{v}_\pm = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \pm i\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \vec{p} \pm i\vec{q}$ と書くと, $\left.\begin{matrix}\vec{p}\\ i\vec{q}\end{matrix}\right\} = \dfrac{\vec{v}_+ \pm \vec{v}_-}{2}$,

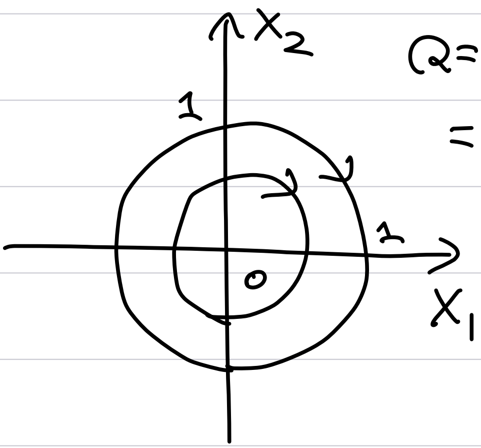
$$\begin{aligned}B(\vec{p}\pm i\vec{q}) &= \pm 2i(\vec{p}\pm i\vec{q})\\ &= -2\vec{q} \pm 2i\vec{p}\end{aligned} \iff \begin{cases} B\vec{p} = -2\vec{q} \\ B\vec{q} = 2\vec{p} \end{cases}.$$

$$\iff B(\vec{p},\vec{q}] = (\vec{p},\vec{q}]\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}.$$

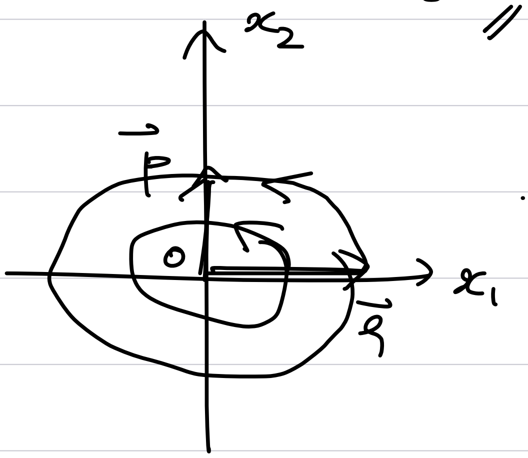
$\because$ $Q=(\vec{p},\vec{q}] = \begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$ により, $B = Q\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}Q^{-1}$,

$$e^{tB} = Q\, e^{2t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}} Q^{-1} = Q\begin{bmatrix}\cos 2t & \sin 2t\\ -\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}Q^{-1}$$

$\vec{x}(t) = Q\begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{pmatrix}$ とすれば, $\vec{x}(t) = Q\begin{bmatrix}\cos 2t & \sin 2t\\ -\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X_1(0)\\X_2(0)\end{pmatrix}$ //



$Q=(\vec{p},\vec{q}] = \begin{bmatrix}0&2\\1&0}\end{bmatrix}$ $\longrightarrow$



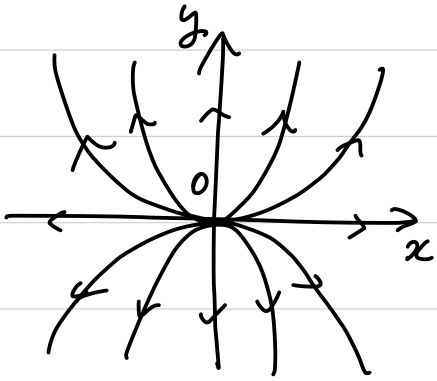
章末11

11.1

(1) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

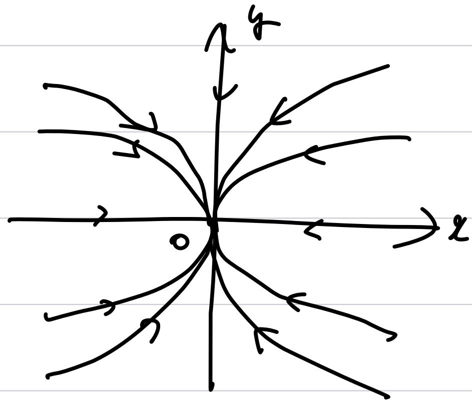
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} x(0) \\ e^{2t} y(0) \end{pmatrix}$$



(2) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

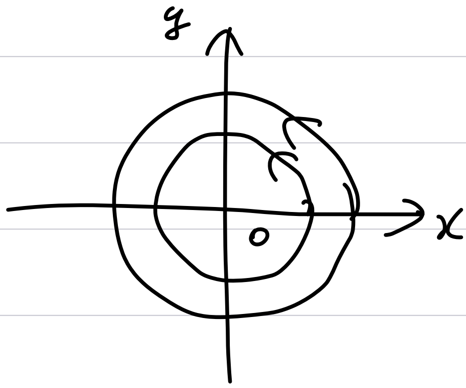
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} x(0) \\ e^{-2t} y(0) \end{pmatrix}$$



(3) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$



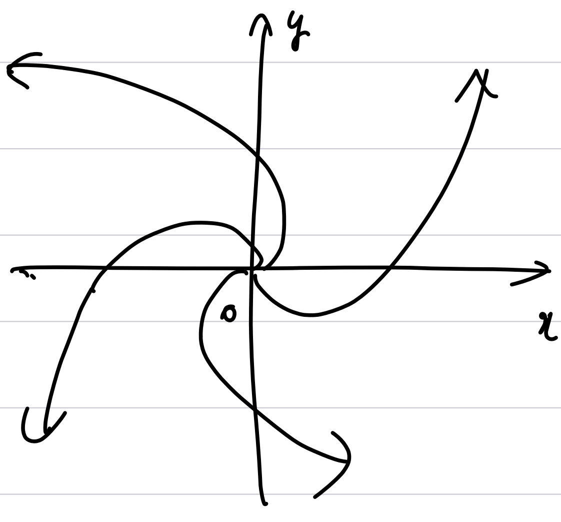
(4) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であり

$$e^{tA} = e^{tE} e^{t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= e^{t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$



(次回に ▷ 修正有)

(5) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. $|A - \lambda E| = \lambda(\lambda+1) + 6 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$.

$\lambda_\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2} i$ に対し、固有ベクトルを $\vec{v}_\pm$ とすれば

$$(A - \lambda_\pm)\vec{v}_\pm = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{23} i}{2} & 2 \\ -3 & -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{23} i}{2} \end{pmatrix} \vec{v}_\pm = \vec{0} \quad \therefore \vec{v}_\pm = c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 \pm \sqrt{23} i}{4} \end{pmatrix} \quad (c \neq 0).$$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} \end{pmatrix}$ により $\vec{v}_\pm = \vec{p} \pm i\vec{q}$, $Q = [\vec{p}, \vec{q}]$ とおく。

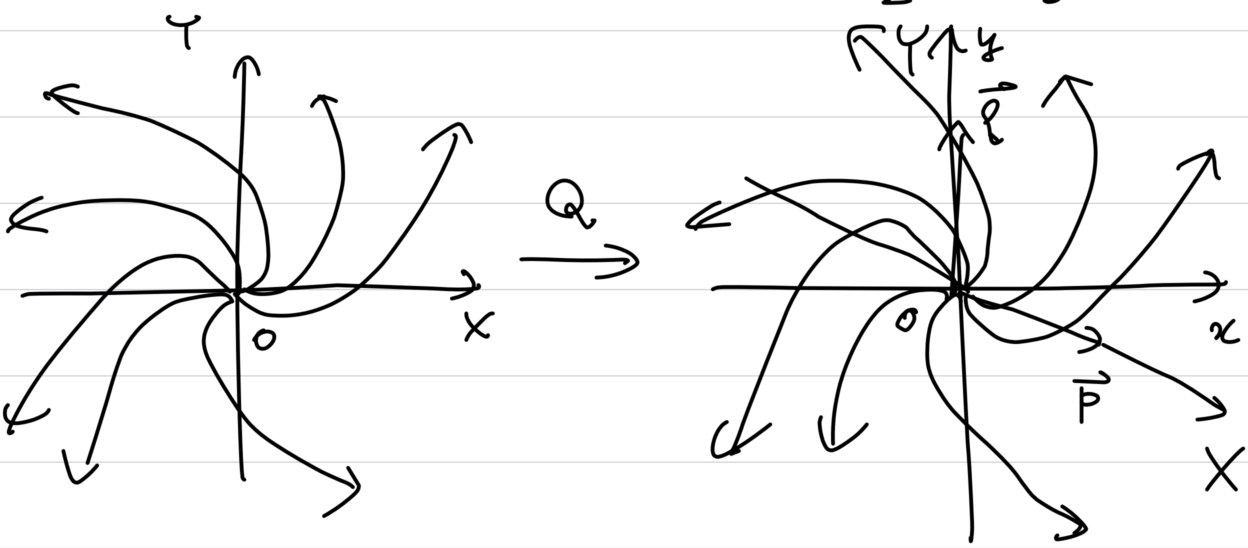
$$\Rightarrow A(\vec{p} \pm i\vec{q}) = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2} i\right)(\vec{p} \pm i\vec{q}) = \left(-\frac{1}{2}\vec{p} - \frac{\sqrt{23}}{2}\vec{q}\right) \pm i\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}\right)$$

より

$$A[\vec{p}, \vec{q}] = (\vec{p}, \vec{q}) \frac{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{23} \\ -\sqrt{23} & 1 \end{pmatrix}}{2} \qquad \left(J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{とおく}\right)$$

$$\therefore e^{tA} = Q \cdot e^{\frac{t}{2}(E + \sqrt{23} J)} Q^{-1} = Q e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{23}}{2}t & -\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t \\ \sin\frac{\sqrt{23}}{2}t & \cos\frac{\sqrt{23}}{2}t \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \text{により} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{23}}{2}t & -\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t \\ \sin\frac{\sqrt{23}}{2}t & \cos\frac{\sqrt{23}}{2}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix}.$$



修正版：(5)の $A=\begin{pmatrix}0&2\\-3&-1\end{pmatrix}$ で，左下の符号を変え+3としたとき。$\left(\Longleftrightarrow y'=+3x-y\right)$

(5)′：$A=\begin{pmatrix}0&2\\+3&-1\end{pmatrix}$ の場合. $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2\\3&-1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda+3)(\lambda-2)$.

$\therefore$ 固有値は $\lambda=2,-3$.

$\lambda=2$の固有ベクトルは

$$(A-2E)v_2=\begin{bmatrix}-2&2\\3&-3\end{bmatrix}v_2=0 \text{ より, } v_2=k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\ (k\neq0).$$

$\lambda=-3$

$$(A-(-3E))v_{-3}=\begin{bmatrix}3&2\\3&2\end{bmatrix}v_{-3}=0 \text{ より, } v_{-3}=k\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\ (k\neq0).$$

$\therefore$

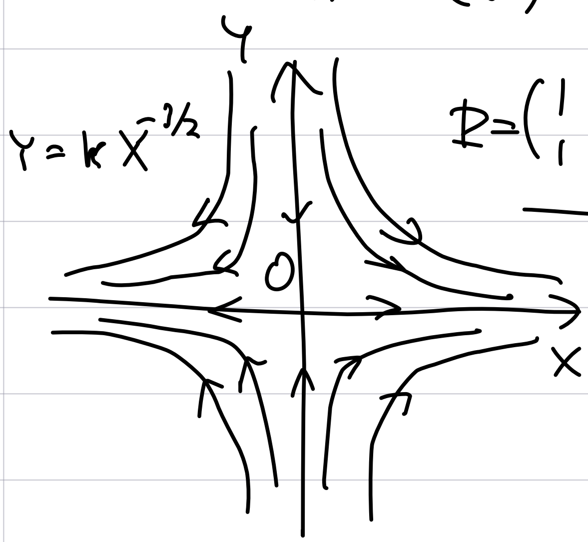
$$P=\begin{bmatrix}1&-2\\1&3\end{bmatrix} \text{ により, } AP=P\begin{bmatrix}2&0\\0&-3\end{bmatrix},\ A=P\begin{bmatrix}2&0\\0&-3\end{bmatrix}P^{-1}.$$

$\therefore$ $e^{tA}=P\begin{bmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{-3t}\end{bmatrix}P^{-1}$ であり, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}'=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ の解は

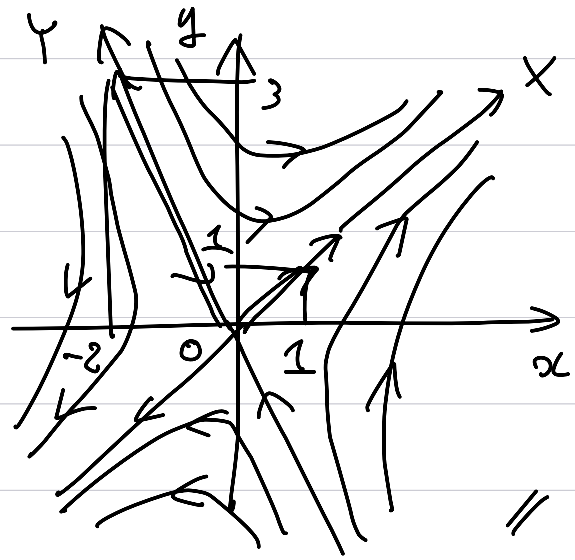
$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{-3t}\end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\end{bmatrix}.$$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ とすれば $\begin{bmatrix}X(t)\\Y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(0)\\Y(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}X(0)\\e^{-3t}Y(0)\end{bmatrix}$

軌跡は $\left(\dfrac{X(t)}{X(0)}\right)^{1/2}=\left(\dfrac{Y(t)}{Y(0)}\right)^{-1/3}$ $\therefore$ $X^3Y^2=C$ (定数) をみたす.



$P=\begin{pmatrix}1&-2\\1&3\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$



//

(6) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$. 固有値を求めると

$|A - \lambda E| = (\lambda+1)(\lambda-5) - 27 = \lambda^2 - 4\lambda - 32 = (\lambda-8)(\lambda+4)$ ∴ $\lambda = 8, -4$.

$\underline{\lambda = 8}$ の固有ベクトルは　　　$\underline{\lambda = -4}$

$(A - 8E)\vec{v}_8 = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\vec{v}_8 = \vec{0}$　　$(A + 4E)\vec{v}_{-4} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\vec{v}_{-4} = \vec{0}$

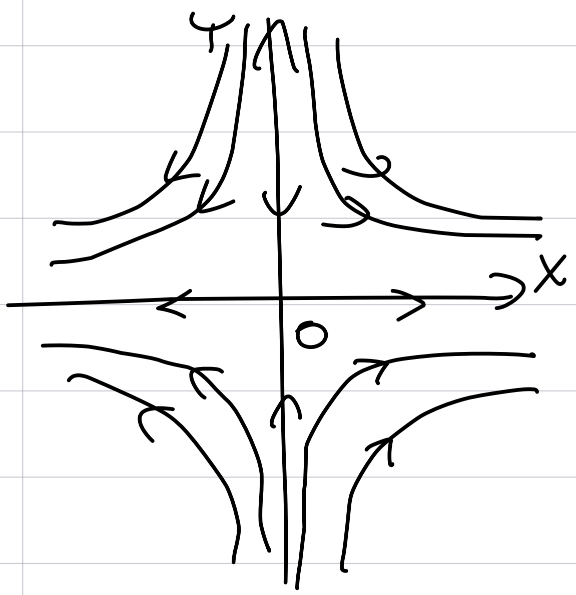
∴ $\vec{v}_8 = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$　　∴ $\vec{v}_{-4} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$

∴ $P = (\vec{v}_8, \vec{v}_{-4}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ により、$AP = P\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$,

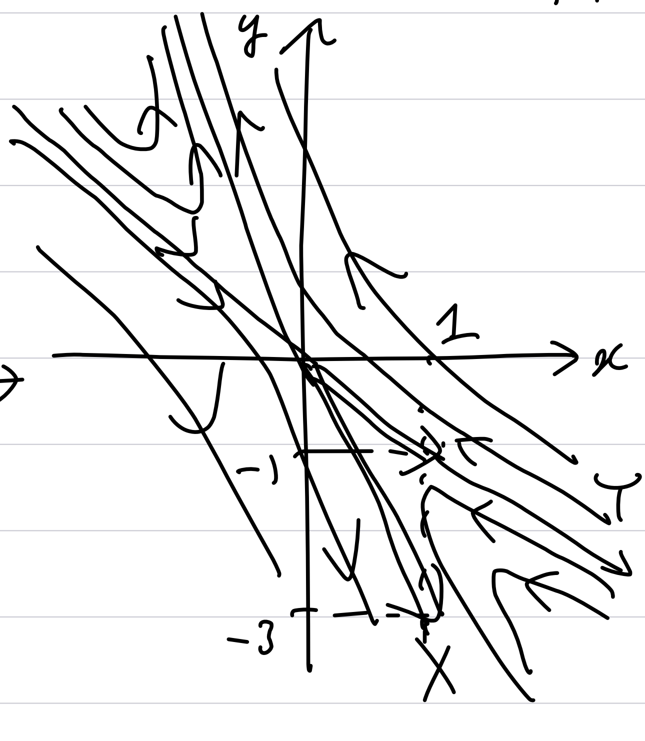
$e^{tA} = P e^{t\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}} P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{8t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} P^{-1}$.

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ とすれば、$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{8t}X(0) \\ e^{-4t}Y(0) \end{pmatrix}$ となる.

このとき $XY^2 = \text{Const}$. これを P でうつして解曲線を得る



$\xrightarrow{P}$



11,2 $\begin{pmatrix}R\\J\end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix}R\\J\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$

(1) $|A-\lambda E| = (a-\lambda)^2-b^2$, ∴ $\lambda = a\pm b = \lambda_\pm$. 固有ベクトルは

$$(A-\lambda_\pm E)\vec{v}_\pm = \begin{pmatrix}\mp b & b\\ b & \mp b\end{pmatrix}\vec{v}_\pm = \vec{0}$$ より, $\vec{v}_\pm = c\begin{pmatrix}\pm 1\\ 1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$.

(2) $P=(\vec{v}_+, \vec{v}_-) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ により, $AP = P\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}$ となり

$$e^{tA} = Pe^{t\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}}P^{-1} = P\begin{pmatrix}e^{(a+b)t} & 0\\ 0 & e^{(a-b)t}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

(3) $\begin{pmatrix}R(t)\\J(t)\end{pmatrix} = e^{at}P\begin{pmatrix}e^{bt} & 0\\ 0 & e^{-bt}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}R(0)\\J(0)\end{pmatrix}$, $R(0)=J(0)$とすると

$$= \frac{e^{at}}{2}\begin{pmatrix}e^{bt} & -e^{-bt}\\ e^{bt} & e^{-bt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R(0)+J(0)\\ -R(0)+J(0)\end{pmatrix} = R(0)\begin{pmatrix}e^{(a+b)t}\\ e^{(a-b)t}\end{pmatrix}.$$

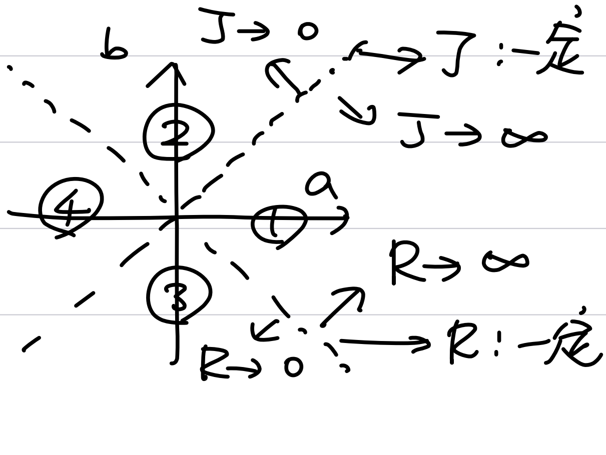
∴

$$\frac{R(t)}{R(0)} \xrightarrow{t\to\infty} \begin{cases}\infty \\ 0\end{cases} (a+b \gtrless 0),\quad \frac{J(t)}{J(0)} \xrightarrow{t\to\infty} \begin{cases}\infty \\ 0\end{cases} (a-b \gtrless 0)$$

∴ $R(0)=J(0)>0$ とすると、$t\to\infty$ において

① $a+b>0$, $a-b>0 \Rightarrow$ $R(t)$, $J(t)$ とも $+\infty$ に,
② $a+b>0$, $a-b<0 \Rightarrow$ $R(t)\to\infty$ だが $J(t)\to 0$
③ $a+b<0$, $a-b>0 \Rightarrow$ $R(t)\to 0$, $J(t)\to\infty$
④ $a+b<0$, $a-b<0 \Rightarrow$ $R(t)$, $J(t)$ とも 0 となる.

また $a+b=0$ なら $R(t)=$一定, $a-b=0$ なら $J(t)=$一定である. //



($\begin{pmatrix}R\\J\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ とすると

$\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{(a+b)t}X(0)\\ e^{(a-b)t}Y(0)\end{pmatrix}$.)

11.3 $\begin{pmatrix}R\\J\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}a & b\\ -b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R\\J\end{pmatrix}$, $a>b>0$; $R(0)=J(0)$.

(1) R' は R と J の正の係数の和なので, $R(t)\to$ 大 $(t\to\infty)$
J' は 〃 負の 〃 $J(t)\to$ 小 と思われる.

訂正

(2) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & -a\end{pmatrix}$: $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ -b & -a-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-a^2+b^2$ より

$\lambda_\pm = \pm\sqrt{a^2-b^2}$ が固有値となる. 固有ベクトルは

$(A-\lambda_\pm E)\vec{v}_\pm = \vec{0}$ より, $\vec{v}_\pm = c\begin{bmatrix} b\\ \pm\sqrt{a^2-b^2}-a\end{bmatrix}$ $(c\neq 0)$

(3) $P=(\vec{v}_+,\vec{v}_-)=\begin{bmatrix} b & b\\ \sqrt{a^2-b^2}-a & -\sqrt{a^2-b^2}-a\end{bmatrix}$ により $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}$

∴ $e^{tA} = P\begin{pmatrix}e^{t\lambda_+} & 0\\ 0 & e^{t\lambda_-}\end{pmatrix}P^{-1}$. $\left(P^{-1}=\frac{1}{2b\sqrt{a^2-b^2}}\begin{bmatrix}a+\sqrt{a^2-b^2} & b\\ -a+\sqrt{a^2-b^2} & -b\end{bmatrix}\right)$

問題文要修正.
(常に $\lambda_\pm \gtrless 0$)
↓
「$t\to\infty$ における
2人のいットスル

(4) $\begin{pmatrix}R(t)\\J(t)\end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix}R(0)\\J(0)\end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2b\sqrt{a^2-b^2}}\begin{bmatrix} b & b\\ \sqrt{a^2-b^2}-a & -\sqrt{a^2-b^2}-a\end{bmatrix}\begin{pmatrix}e^{t\lambda_+} & 0\\ 0 & e^{t\lambda_-}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a+\sqrt{a^2-b^2} & b\\ -a+\sqrt{a^2-b^2} & -b\end{bmatrix}\begin{pmatrix}R(0)\\J(0)\end{pmatrix}$$

$$= \frac{R(0)}{2b\sqrt{a^2-b^2}}\begin{bmatrix} be^{t\lambda_+} & be^{t\lambda_-}\\ (\sqrt{a^2-b^2}-a)e^{t\lambda_+} & -(\sqrt{a^2-b^2}+a)e^{t\lambda_-}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+b+\sqrt{a^2-b^2}\\ -a-b+\sqrt{a^2-b^2}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{R(0)}{b\sqrt{a^2-b^2}}\begin{bmatrix} b(a+b)\,\mathrm{sh}\,t\lambda_+ + b\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{ch}\,t\lambda_+\\ \left(\sqrt{a^2-b^2}^{\,2}-a(a+b)\right)\mathrm{sh}\,t\lambda_+ + \left((a+b)\sqrt{a^2-b^2}-a\sqrt{a^2-b^2}\right)\mathrm{ch}\,t\lambda_+\end{bmatrix}$$

$$= R(0)\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,\mathrm{sh}\,t\lambda_+ + \mathrm{ch}\,t\lambda_+\\ -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,\mathrm{sh}\,t\lambda_+ + \mathrm{ch}\,t\lambda_+\end{pmatrix} \to \begin{bmatrix}\infty\\ -\infty\end{bmatrix} \quad (t\to\infty).$$

↑ (∵ $1-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}<0$)

但 $R(0)>0$ とした.

§12

問12.1.1 $x'' = -kx \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = -kx \end{cases}$ $(k>0)$

(1) 解曲線: $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と見て求めてみる.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{k} \\ -\sqrt{k} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = K^{-1}JK \quad \left(J = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{k} \\ -\sqrt{k} & 0 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

より, $e^{t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}} = K^{-1}e^{tJ}K = \begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \cos\sqrt{k}t & \sin\sqrt{k}t \\ -\sin\sqrt{k}t & \cos\sqrt{k}t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} X = \sqrt{k}x \\ Y = y \end{cases}$ は, $\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\sqrt{k}t & \sin\sqrt{k}t \\ -\sin\sqrt{k}t & \cos\sqrt{k}t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix}$ で与えられ

$X(t)^2 + Y(t)^2 = X(0)^2 + Y(0)^2$ (一定) となる. $\therefore$ $kx(t)^2 + y(t)^2 = C$ (一定) //

(2) 楕円 $kx^2 + y^2 = C$ 上の点で $|x|$ が最大なのは,

$(x, y) = \left(\pm\sqrt{\frac{C}{k}}, 0\right)$ の2点であることからわかる.

(3) 平衡点 $\iff \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ -kx = 0 \end{cases}$ $\therefore$ $(x, y) = (0, 0)$ //

解が周期的であることは, たとえば(1)で行った計算より

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \cos\sqrt{k}t & \sin\sqrt{k}t \\ -\sin\sqrt{k}t & \cos\sqrt{k}t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

なので, $\sqrt{k}T = 2\pi$ より $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ を周期にもつと確認できる.

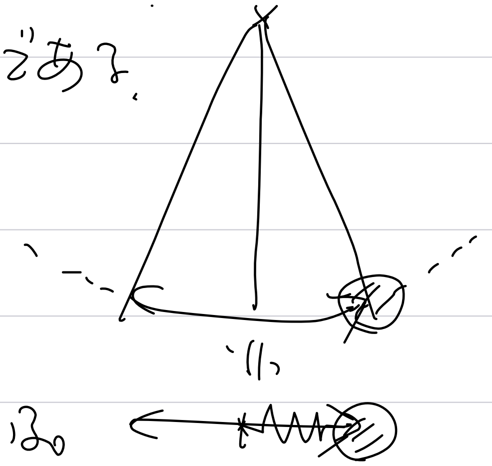
問12.2.1 $E(x,y)=\dfrac{kx^2+y^2}{2}$ とすれば，$(x,y)=(x(t),y(t))$ が

$\begin{cases} x'=y \\ y'=-kx \end{cases}$ の解であるとき

$$\frac{d}{dt}E(x(t),y(t))=2\frac{kxx'+yy'}{2}=kx\cdot y+y\cdot(-kx)=0 \quad //$$

また，$\begin{cases} x'=y \\ y'=-k\sin x \end{cases}$ の解に対し $\dfrac{y(t)^2}{2}-k\cos x(t)=C$ (定数) だが，

x が小さいとき $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+\cdots$ である。



$$\therefore \quad \frac{y(t)^2}{2}-k\left(1-\frac{x(t)^2}{2}+\cdots\right)=C$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y(t)^2+kx(t)^2}{2}+\cdots=C+k$$

すなわち，$E(x,y)$ は左辺を近似している。

12.2.2 $(12.1) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=f_1(x,y) \\ y'=f_2(x,y) \end{cases}$ である。 $\dfrac{f_2}{f_1}=\dfrac{g_2(x)}{g_1(y)}$ のとき，

$g_2(x)dx-g_1(y)dy$ について $\dfrac{\partial}{\partial y}g_2(x)=0=\dfrac{\partial}{\partial x}g_1(y)$ より

$$E(x,y)=\int_{x_0}^{x}g_2(s)ds-\int_{y_0}^{y}g_1(t)dt$$

が定まり，$\dfrac{\partial E}{\partial x}=g_2(x)$，$\dfrac{\partial E}{\partial y}=-g_1(y)$ となる。

$$\because \quad \frac{d}{dt}E(x(t),y(t))=\frac{dx(t)}{dt}\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{dy(t)}{dt}\frac{\partial E}{\partial y}=x'g_2-y'g_1$$

$$=f_1g_2-f_2g_1=0 \quad \left(\because =f_1g_1k-f_1k\cdot g_1,\ \frac{f_2}{f_1}=k=\frac{g_2}{g_1}\right) \quad //$$

問 12.2.3 (1) $x'' = -(D_x U)(x(t))$ を $x(t)$ が満たすとき

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{x'(t)^2}{2} + U(x(t))\right)$$
$$= x'(t)x''(t) + x'(t)(D_x U)(x(t))$$
$$= x'(t)\left(x'' + (D_x U)(x(t))\right) = 0. \quad //$$

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -D_x U \end{pmatrix}$, $U = \frac{kx^2}{2}$

であり、$x'' = -D_x U(x(t)) = -kx$ となる。

問題文に挿入

同値 $(12.14) \Leftrightarrow y\,dy + D_x U(x)\,dx = 0$

について：($y = x' = \frac{dx}{dt}$ に注意※)

※つまり
$(12.14) \Leftrightarrow \begin{cases} y\,dy + D_x U\,dx = 0 \\ dx = y\,dt \end{cases}$
ということ。

$\Rightarrow$) $x(t)$ が (12.14) の解のとき、$y(t) = x'(t)$ として、$(x(t), y(t))$ は

$$y\frac{dy}{dt} + D_x U(x(t))\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (*)$$

をみたす。つまり $y\,dy + D_x U(x)\,dx = 0$ の解曲線をなる。

$\Leftarrow$) $y\,dy + D_x U(x)\,dx = 0$ の解曲線の点が $(x(t), y(t))$ と表せたとすれば、$(*)$ をみたす。$y = \frac{dx}{dt}$ であるので※

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} + D_x U(x(t))\right)\cdot\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + D_x U(x(t)) = 0 \quad \text{となる。} //$$

※→
時間方向のとり方(reparametrize)の可能性とは $dt = \frac{dx}{y} \Leftrightarrow y = x'$ できまっている。

微分積分学の基本定理 12.2.1 に従って求めると

$$E = \int_{y_0}^{y} y\,dy + \int_{x_0}^{x} D_x U(x)\,dx = \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2) + (U(x) - U(x_0))$$
$$= \frac{y^2}{2} + U(x) + (\text{定数})$$

となり、(1) の E と定数を除き一致する。//

問12.3.1 (12.17) : $\left(\frac{1}{x}-1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0$ を積分すると
(定理12.2.1)

$$E(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{y}-1\right)dy$$

$$=\left[\log x-x\right]_{x_0}^{x}+\left[\log y-y\right]_{y_0}^{y}$$

$$=\log x-x+\log y-y+(\text{定数})$$

を得る。これは符号と定数を除き(12.16)と一致する。

また $\begin{cases} x'=x(1-y) \\ y'=-y(1-x) \end{cases}$ のとき

$$\frac{d}{dt}E(x(t),y(t))=\frac{dx}{dt}\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial E}{\partial y}$$

$$=x(1-y)\left(\frac{1}{x}-1\right)-y(1-x)\left(\frac{1}{y}-1\right)=0.$$

//

12章末

12.1 $x'' + \mu(x^2-1)x' + x = 0 \quad (\mu > 0)$

(1) $y = x'$ とおくと，$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \mu(x^2-1)y \end{cases}$

(2) 平衡点は $\begin{cases} y = 0 \\ x + \mu(x^2-1)y = 0 \end{cases}$ より，$(x, y) = (0, 0)$ のみ．

(3) $xx' + yy' = xy + y(-x - \mu(x^2-1)y) = -\mu(x^2-1)y^2$ //

(4) (3)より，$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{x}\|^2 = \mu(1-x^2)y^2$

$\leqq \mu y^2 \leqq \mu \|x\|^2$

$\therefore \|\vec{x}\|^2 \leqq e^{2\mu t} \cdot \|\vec{x}(0)\|^2$. //

〈修正版〉　　　　　　　　　　　　〈問題直す〉

12.2 ： $x'' + ax' + bx + cx^3 = 0$ （a, b, c は定数）のとき，

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = y & (= f_1) \\ y' = -ay - bx - cx^3 & (= f_2) \end{cases}$ である。

(2) $\begin{cases} a = 0 \\ b = c = 1 \end{cases}$ のとき，平衡点 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x - x^3 = 0 \end{cases}$ ∴ $(x, y) = (0, 0)$.

(3) $U = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ とすれば，

$x'' = -D_x U \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} + (D_x U) = 0$ である。

よって問12.2.3(1)のように，$E = \frac{y^2}{2} + U(x)$ が保存量となる。

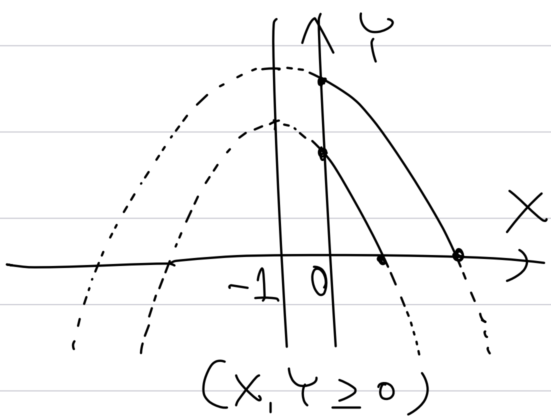
実際，$\frac{d}{dt}\left(\frac{y^2}{2} + U(x)\right) = y(t) \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} \cdot D_x U(x(t))$

$= y(t)\left(\frac{dy}{dt} + D_x U\right) = 0$. //

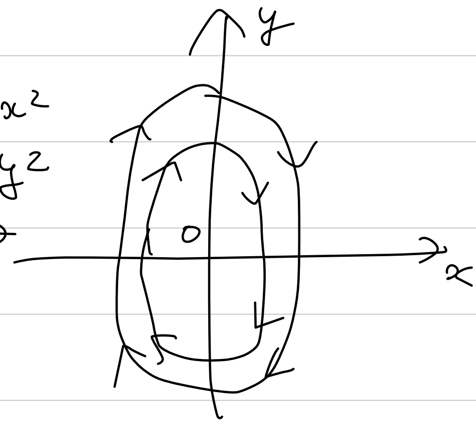
(4) $X = x^2$, $Y = y^2$ とおくと

$E = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = \frac{Y}{2} + \frac{X}{2} + \left(\frac{X}{2}\right)^2 = C$ （定数）

$\Leftrightarrow \frac{Y}{2} + \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = C + \frac{1}{4}$ であるから，下図のようになる。



$\begin{cases} X = x^2 \\ Y = y^2 \end{cases} \longleftrightarrow$



注）バネのやフックの法則からずれた一つの場合がダッフィング方程式といえるが，一般のパラメータのとき解の挙動は複雑である。

例えば $a = c = 1$, $b = 0$ の場合は $\boxed{\text{別紙}}$ のようになる。

（別紙＝duffing_1）

§13

問13.1.1

例13.1.1で$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$と書いているが$(0,0)$と同じ.

例13.1.1：$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}(x^2+1)(x+y)\\x^2-y^2-2y\end{pmatrix}$ の$(0,0)$での線型化は

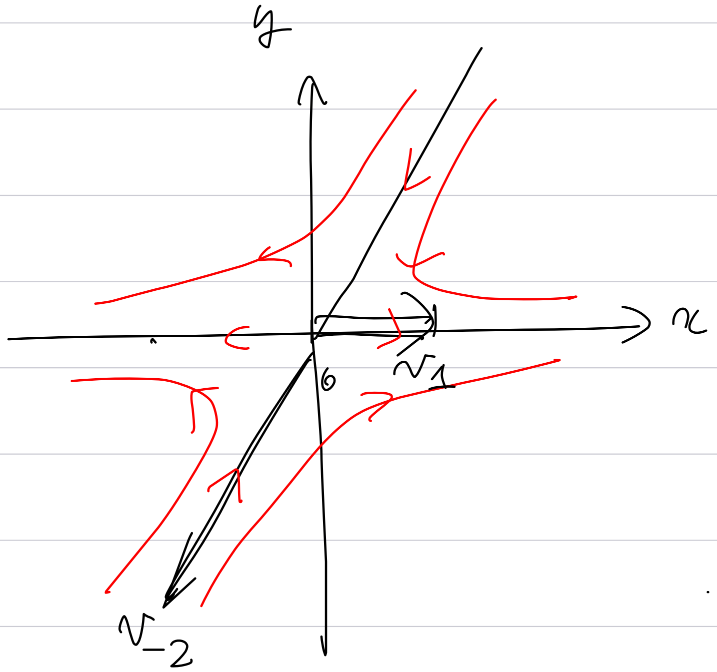
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$ であった.

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}$は正の固有値1と負の固有値$-2$を1つずつ持つので,

定理13.1.1の(3)の場合がおこる.

$$\begin{cases} Av_1 = v_1 \Leftrightarrow v_1 = c\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad (c\neq 0)\\ Av_{-2} = -2v_{-2} \Leftrightarrow v_2 = c\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \quad (c\neq 0)\end{cases}$$

が固有ベクトルであるから, $(0,0)$のまわりでの解曲線はほぼ下図のようになる。



問 13.2.1 (1) $x''+cx'+k\sin x=0$ $(k,c>0)$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'=\begin{bmatrix}y\\-cy-k\sin x\end{bmatrix}$, $=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ とすると $\begin{cases}y=0\\ \sin x=0\end{cases}$

∴ 臨界点は $(x,y)=(n\pi,0)$ (nは整数)

(2) $x=0$ の近くでは, $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\cdots$ であるので

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}y\\-cy-kx\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-k&-c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$ を得る.

(3) $A=\begin{pmatrix}0&1\\-k&-c\end{pmatrix}$ の固有値は, $|A-\lambda E|=\lambda(\lambda+c)+k=0$ で定まる.

∴ $\lambda=-\frac{c}{2}\pm\frac{\sqrt{c^2-4k}}{2}=\lambda_\pm$. 対応する固有ベクトルを $v_\pm$ とすると,

$$(A-\lambda_\pm E)v_\pm=\begin{bmatrix}\frac{c}{2}\mp\frac{\sqrt{c^2-4k}}{2} & 1\\ -k & -\frac{c}{2}\mp\frac{\sqrt{c^2-4k}}{2}\end{bmatrix}v_\pm=0 \quad ∴ v_\pm=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{c}{2}\pm\frac{\sqrt{c^2-4k}}{2}\end{bmatrix}$$

$\lambda^2+c\lambda+k$
$=(\lambda+\frac{c}{2})^2+k-(\frac{c}{2})^2$

i) $c^2-4k>0$ のとき, $P=(v_+,v_-)$ により, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_+&0\\0&\lambda_-\end{pmatrix}$ となる.

ii) $c^2-4k<0$ ならば, $v_\pm=\begin{pmatrix}1\\-c/2\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{c^2-4k}}{2}\end{pmatrix}=p\pm iq$, $Q=(p,q)$ で

$$Q^{-1}AQ=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_+&0\\0&\lambda_-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+i&+1\\+i&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{bmatrix}i\lambda_+&\lambda_+\\i\lambda_-&-\lambda_-\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2i}\begin{bmatrix}i\lambda_++i\lambda_-&\lambda_+-\lambda_-\\-\lambda_++\lambda_-&i\lambda_++i\lambda_-\end{bmatrix}=-\frac{c}{2}E+\frac{\sqrt{4k-c^2}}{2}J,\quad J=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}.$$

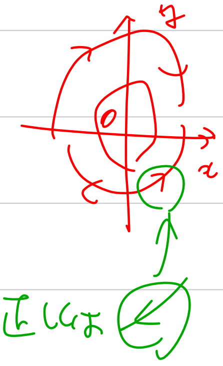
[$P=Q\begin{bmatrix}1&1\\i&-i\end{bmatrix}$, および $\lambda_\pm=-\frac{c}{2}\pm\frac{\sqrt{c^2-4k}}{2}$ に注意.]

iii) $c^2-4k=0$ のとき, $\lambda_\pm=-\frac{c}{2}$. $(A+\frac{c}{2}E)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-c/2\end{pmatrix}$, $(A+\frac{c}{2})\begin{pmatrix}1\\-c/2\end{pmatrix}=0$.

∴ $R=\begin{bmatrix}1&0\\-c/2&1\end{bmatrix}$ により, $R^{-1}AR=\begin{bmatrix}-c/2&1\\0&-c/2\end{bmatrix}=-\frac{c}{2}E+N$,

$N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

(修正) p(0) 図13.1の 0付近の矢印



正しくは

① $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \begin{bmatrix}0&1\\-k&-c\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の解は ($\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix} = P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ などにより)

i)のとき, $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = P\begin{bmatrix}e^{\lambda_+ t}&0\\0&e^{\lambda_- t}\end{bmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}$ ここで, $\lambda_\pm<0$.

ii)のとき, $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = e^{-\frac{c}{2}t} Q \begin{bmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\ -\sin\beta t & \cos\beta t\end{bmatrix} Q^{-1}\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}$ $\left(\beta = \frac{\sqrt{4k-c^2}}{2}\right)$

iii)のとき, $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = e^{-\frac{c}{2}t} R\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}R^{-1}\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}$.

よって線形近似の相平面での解の概形は次のようになる.

<メモ>

i)のとき

$v_\pm = \begin{bmatrix}1\\ -\frac{c}{2}\pm\frac{\sqrt{c^2-4k}}{2}\end{bmatrix}$

$\left|\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right| = e^{\sqrt{c^2-4k}\,t}\left|\begin{matrix}X(0)\\Y(0)\end{matrix}\right| \to \infty$,

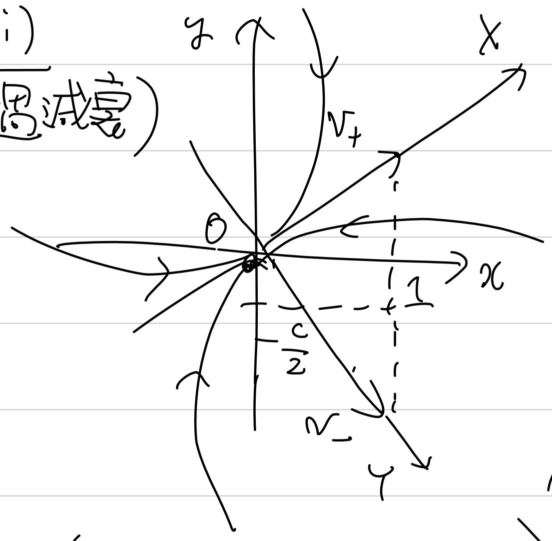
iii)のとき

$(A+\frac{c}{2}E)\begin{pmatrix}1\\-c/2\end{pmatrix}=0$, $(A+\frac{c}{2}E)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-c/2\end{pmatrix}$

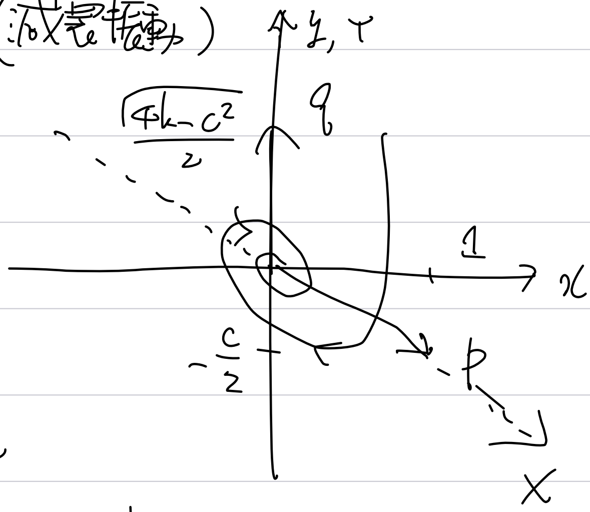
$R=\begin{bmatrix}1&0\\-c/2&1\end{bmatrix}$ により

$R^{-1}AR = \begin{bmatrix}-c/2&1\\0&-c/2\end{bmatrix}$

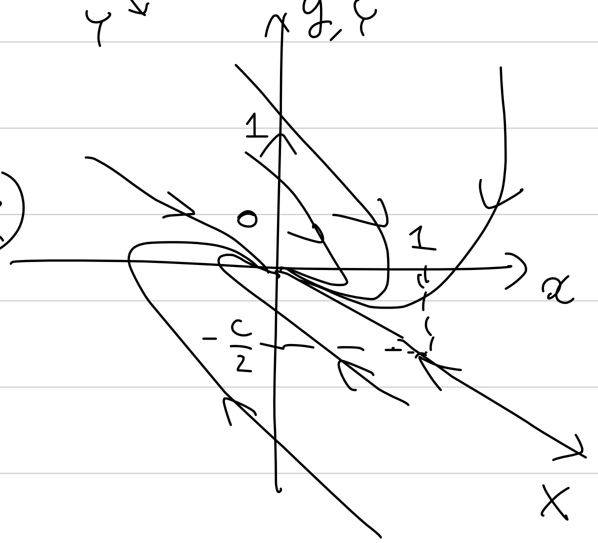
i) (過減衰)



ii) (減衰振動)



iii) (臨界減衰, 図11.7参照)



§7.4で $D \gtrless 0$ の 符号が逆です

これらは章末問題7.4の過減衰(i), 減衰振動(ii), 臨界減衰(iii)に対応する.

kを止めてcをc=0から大きくすると, (ii)→(iii)→(i)のように変化する.

問13.2.2 $a, b > 0$, $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$; $P(0, b)$, $Q(aX, b\sqrt{1-X^2})$ とする。

$Q(x, y)$ がこの楕円上を動くとき、$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$ ∴ $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$.

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b^2 x}{a^2 y}\right)^2}\,dx$$

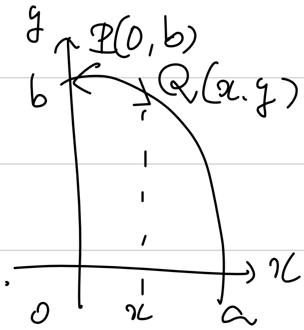
が微小な弧長を与える。

$$∴ \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right)^2}\,dx = a\int_0^X \sqrt{1 + \left(\frac{b^2 X}{a y}\right)^2}\,dX \quad \left(X = \frac{x}{a},\ dX = \frac{dx}{a}\right)$$

$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2$ より、

$$= a\int_0^X \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{b}{a}X\right)^2}{1 - X^2}}\,dX$$

$$= a\int_0^X \frac{\sqrt{1 + \left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right)X^2}}{\sqrt{1 - X^2}}\,dX$$



周の長さ L は、$x = a$ ($\Leftrightarrow X = 1$) のときの弧長の4倍なので、

$$L = 4a\int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right)X^2}}{\sqrt{1 - X^2}}\,dX$$

となる。//

章末

13.1(a) : $\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = (x^2-1)xy \end{cases}$

(1) $\begin{cases} y^2 = 0 \\ (x^2-1)xy = 0 \end{cases}$ ∴ $y=0$, x は任意：すなわち $(x,0)$ はすべて平衡点.

(2) $x = x_0$, $y = 0$ の近傍で, $x = x_0+\eta$, $y = 0+\xi$ とおくと

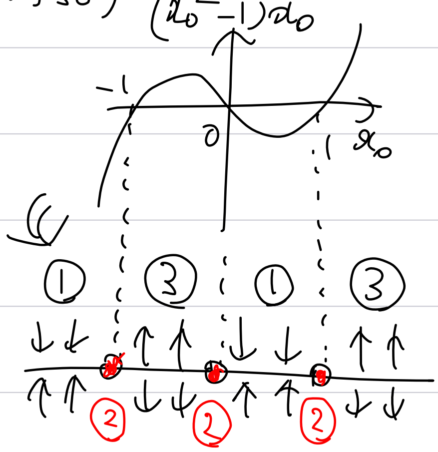
$$\begin{cases} y^2 = 0+\xi^2 = 0+(2\text{次以上}), \\ (x^2-1)xy = ((x_0+\eta)^2-1)(x_0+\eta)(0+\xi) = 0+(x_0^2-1)x_0\xi + (2\text{次以上}) \end{cases}$$

∴ 線形化方程式は $\begin{bmatrix} \eta' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (x_0^2-1)x_0\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (x_0^2-1)x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}$,

(3) $\begin{bmatrix} \eta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta(0) \\ e^{(x_0^2-1)x_0 t}\xi(0) \end{bmatrix}$. $(x_0^2-1)x_0$ の符号より

$$\xrightarrow{t\to\infty} \begin{cases} \begin{bmatrix} \eta(0) \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} x_0 < -1 \text{ or} \\ 0 < x_0 < 1 \end{matrix} \right) & ① \\ \begin{bmatrix} \eta(0) \\ \xi(0) \end{bmatrix} (x_0 = 0, \pm 1) & ② \\ \begin{bmatrix} \eta(0) \\ \infty \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} x_0 > 1 \text{ or} \\ -1 < x_0 < 0 \end{matrix} \right) & ③ \end{cases} ;$$

($t\to-\infty$ では①と③が入れかわる)

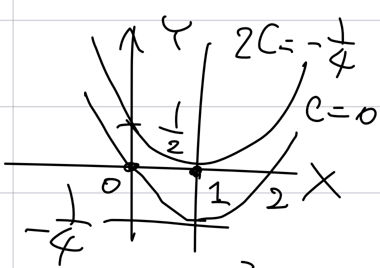


(4) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y^2}{(x^2-1)xy} = \dfrac{y}{(x^2-1)x} \iff (x^2-1)x\,dx - y\,dy = 0$

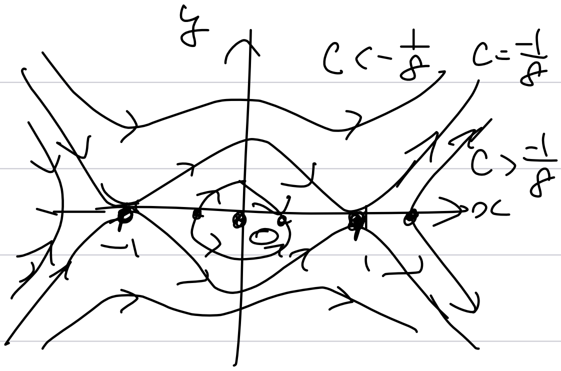
完全形なので, 積分すると $E = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = C$ (定数) を得る。

(5) $\begin{cases} X = x^2 \\ Y = y^2 \end{cases}$ により, $Y = \dfrac{X^2}{2} - X - 2C$
$= \dfrac{1}{2}(X-1)^2 - \left(2C + \dfrac{1}{4}\right)$

$\iff E = C$ となる.



(このうち第1象限)



13.1, b) $\begin{cases} x' = -xy \\ y' = xy - y \end{cases}$

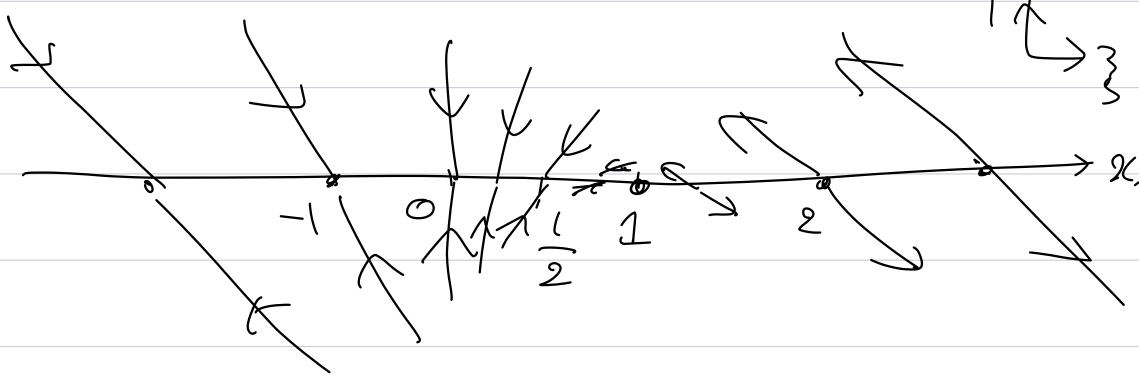
(1) $-xy = 0$ かつ $xy - y = 0 \Rightarrow y = 0$, xは任意。//

(2) $(x, y) = (x_0+\xi, \eta)$ とすると $\begin{cases} -xy = -(x_0+\xi)\eta = -x_0\eta + (2次以上) \\ xy - y = x_0\eta - \eta + (2次以上) \end{cases}$

∴ 線形化方程式は、$\begin{bmatrix}\xi \\ \eta\end{bmatrix}' = \begin{pmatrix}-x_0\eta \\ (x_0-1)\eta\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -x_0 \\ 0 & x_0-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}$ //

(3) $A = \begin{bmatrix}0 & x_0 \\ 0 & x_0-1\end{bmatrix}$ の固有値は $\begin{cases} 0 & : 固有ベクトルは \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} \\ x_0-1 & : 〃 \begin{pmatrix}x_0 \\ 1-x_0\end{pmatrix} \end{cases}$

すなわち、(2)の方程式で $\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$ 方向は変化せず、$\begin{pmatrix}x_0 \\ 1-x_0\end{pmatrix}$ が x_0-1 倍される。$x_0 \gtrless 1$ で固有値の符号が変化し、挙動が変わる。各$(x_0, 0)$での様子を図示すると以下のようになる。



(点x_0において $\begin{pmatrix}x_0 \\ 1-x_0\end{pmatrix}$ を、固有値の大きさと符号に従い矢印を記して書いた。)

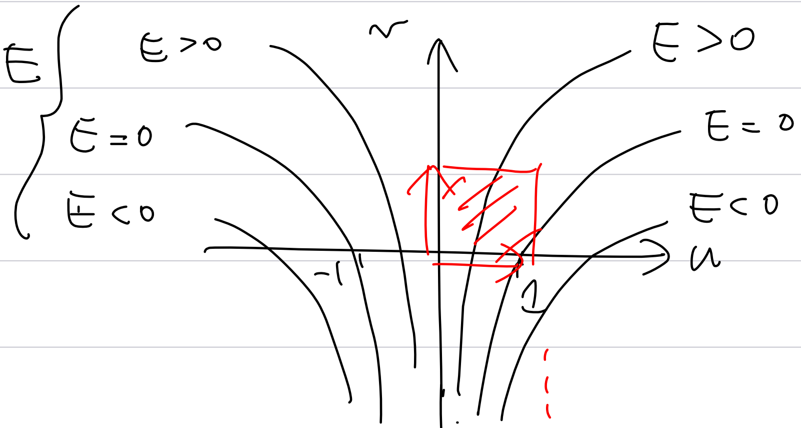
(4) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-xy}{xy-y} = \dfrac{-x}{x-1} \iff \dfrac{x-1}{x}dx + dy = 0$ より、

$E = x - \log|x| + y$ (=一定) が b) の第1積分を与える。

(5) $\begin{cases} u = x \\ v = x+y \end{cases}$ とすれば、$v = \log|u| + E$ が解曲線を与える。

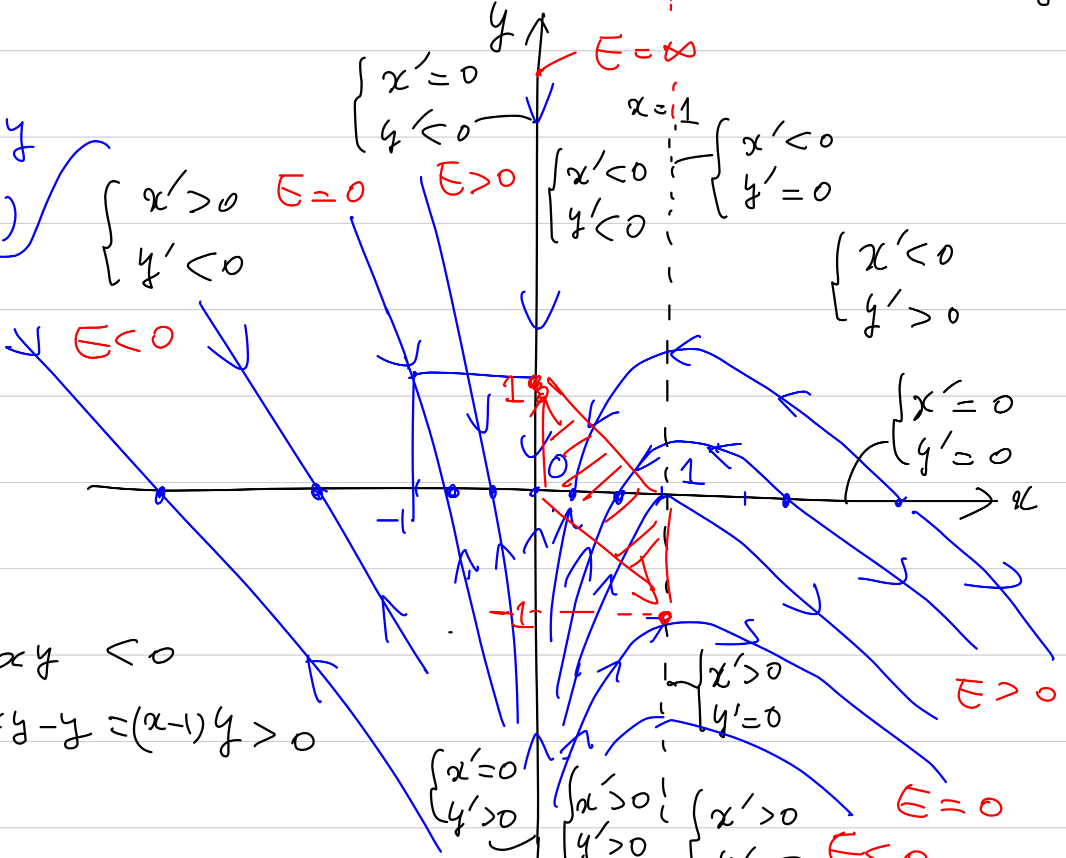
⑦ (5) $v = \log|u| + E$

$\begin{pmatrix} u = x \\ v = x+y \end{pmatrix}$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \Updownarrow \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$x - \log|x| + y$
$= E$ (一定)

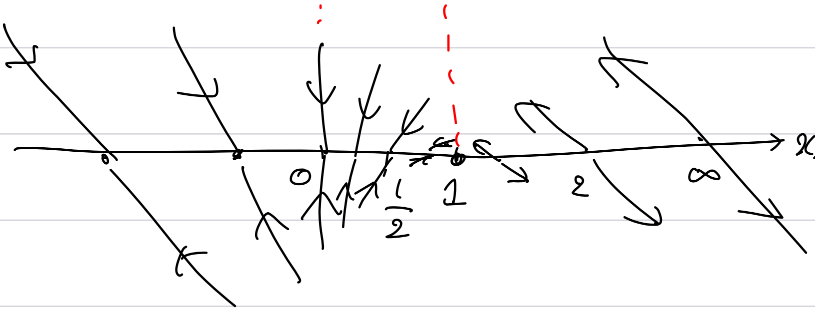


$$\begin{cases} x' = -xy \quad < 0 \\ y' = xy - y = (x-1)y > 0 \end{cases}$$

$(x_0, 0)$における
線形化方程式：

固有ベクトル $\begin{bmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{bmatrix}$ 方向
… $x_0 - 1$ 倍

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 方向 … 0倍

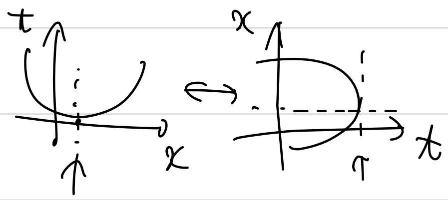


修 「(kは定数)」と問題文に入れる

13.2 $t(x)=\int^{x}\frac{du}{\sqrt{(1-k^2u^2)(1-u^2)}}$ の逆関数を $x(t)$ とする。

逆関数は、$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}\neq 0$ ならば存在する(右図)。すなわち、$x\neq\pm1,\pm k^{-1}$ で存在する。

図 逆関数があったとすると



$\frac{dt}{dx}=0 \Longleftrightarrow \frac{dx}{dt}=\infty$

すると

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)} \quad \therefore\ (x')^2=(1-k^2x^2)(1-x^2)$$ //

・$k=0$ ならば、$(x')^2=1-x^2$、これは $x=\sin t, \cos t$ でみたされるが、実際(積分の下端をかりにこの値 0 として)

$$t(x)=\int_0^{x}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad (x>0,\ 小とする)$$

のとき、$u=\sin s$ と変数変換すれば ($s(u)=\sin^{-1}(u)$)

$$du=\cos s\,ds,\quad \sqrt{1-u^2}=\cos s$$

なので

$$t(x)=\int_0^{s(x)}\frac{\cos s}{\cos s}\,ds=s(x)$$

すなわち、$t(x)=\sin^{-1}(x)$ であり、$x=\sin t$ となる。
(下端をずらすと t は定数 C だけずれるので、
$x=\sin(t+C)$ となる。) //

注 $k\neq0$ のときも、$x(t)$ を $sn(k,t)$ と書き エスエヌ関数 とよぶ
(章末問題 14-5 参照)。

§14

問14.1.1 (1) $P(t)=1+2t+3t^2+4t^3+\cdots$ が収束（絶対収束）するとき

$$tP(t)=\quad t+2t^2+3t^3+\cdots$$ である。辺々引くと

$$(1-t)P(t)=1+t+t^2+t^3+\cdots$$ （絶対収束なので項別に引き算してよい）

右辺は$|t|<1$で絶対収束し$\dfrac{1}{1-t}$に等しい。

よって$P(t)$も収束半径は1で，$\dfrac{1}{(1-t)^2}$に等しい。//

(注) 注意14.1.2を認めると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1$からもわかる。

また，$1+t+t^2+\cdots=\dfrac{1}{1-t}$ $(|t|<1)$の項別微分を認めれば

$$1+2t+3t^2+\cdots=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{1}{(1-t)^2}$$ とも計算できる。

（付録B，命題B.5参照）//

(2) $Q(t)=\dfrac{1}{2t-3}=\dfrac{1}{-3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}t}$ であるので，$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ $(|x|<1)$

より，$$=\frac{1}{-3}\left(1+\frac{2}{3}t+\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}t\right)^3+\cdots\right)$$

とできる。収束半径は，$\left|\dfrac{2}{3}t\right|<1\Leftrightarrow|t|<\dfrac{3}{2}$より，$\dfrac{3}{2}$である。

また$t=2$のまわりでは，$s=t-2$とおくことで

$$\frac{1}{2t-3}=\frac{1}{2(t-2)+1}=\frac{1}{1+2s}$$

$$=1-2s+(2s)^2-(2s)^3+\cdots\quad\left(|2s|<1\Leftrightarrow|s|<\frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

すなわち，

$$Q(t)=1-2(t-2)+4(t-2)^2-8(t-2)^3+\cdots\quad\left(|t-2|<\frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

となり，右辺の収束半径は$\dfrac{1}{2}$である。//

(3) $1+\dfrac{t}{1}+\dfrac{t^2}{2}+\cdots+\dfrac{t^n}{n}+\cdots=1-\log(1-t)\quad(|t|<1)$

をたしかめる. まず右辺 $R(t)$ の $t=0$ でのテイラー展開を考えると,

$$R(t)=1-\log(1-t),\ R'(t)=\frac{1}{1-t},\ R''(t)=\frac{1}{(1-t)^2},\ R'''(t)=\frac{2}{(1-t)^3},\cdots$$

$$R^{(n)}(t)=\frac{(n-1)!}{(1-t)^n}\quad(n=2,3,\cdots)$$ より

$$R(0)=1-\log 1=1-0=1,\quad R'(0)=+\left.\frac{1}{1-t}\right|_{t=0}=1,$$

$$R''(0)=1,\ R'''(0)=2,\ R''''(0)=2\cdot3,\cdots,\ R^{(n)}(0)=(n-1)!$$

$$\therefore R(t)=R(0)+R'(0)\frac{t}{1}+R''(0)\frac{t^2}{2!}+R'''(0)\frac{t^3}{3!}+\cdots+R^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

$$=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}+\cdots+\frac{t^n}{n}+\cdots=\text{左辺}.$$ //

ただし, これは与えられた右辺を用いた確認である.

左辺 $L(t)$ から出発するには, $\left(\dfrac{t^n}{n}\right)'=t^{n-1}$ に注意すると

$$L'(t)=0+1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-t}\quad(|t|<1)$$

であるので, これを積分すればよい.

$$L(t)=L(0)+\int_0^t L'(t)\,dt=1+\int_0^t\frac{dt}{1-t}\quad(|t|<1)$$

$$=1-\log(1-t).\quad(-1<t<1\text{ より}, 1-t>0\text{ である})$$ //

問 14.2.1 (14.11) $tx' = t + x$ [⇒ $t=0$ とすると $0 = 0 + x(0)$ ∴ $x(0)=0$.]

(1) 求積法で: $t\left(\frac{dx}{dt} - 1\right) = x$ ∴ $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + 1$

$\frac{x}{t} = u$ とおけば $u + tu' = u+1$ となり, $u' = \frac{1}{t}$

∴ $u = \log|t| + C$ ∴ $x(t) = t(\log|t| + C)$ (Cは定数) //

これは $x(0)=0$ をみたす.

(2) $t=1$ での級数解を求めるため, $s = t-1$ とおくと

(14.11) ⟺ $x = -(1+s) + (1+s)\frac{dx}{ds}$. $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n s^n$ とすれば

$$= -(1+s) + (1+s)\sum_{n=1}^{\infty} n x_n s^{n-1}$$

$$= -(1+s) + \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)x_{n+1} + n x_n\right) s^n$$

∴ $x_0 = -1 + x_1$, $x_1 = -1 + (2x_2 + x_1)$,

$x_2 = 3x_3 + 2x_2$, $\cdots$, $x_n = (n+1)x_{n+1} + n x_n$ $(n \geq 2)$.

∴ $x_1 = x_0 + 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{-1}{3}x_2 = \frac{-1}{6}$,

以下 $x_{n+1} = \frac{1-n}{n+1}x_n = -\frac{n-1}{n+1}x_n$ より

$x_4 = -\frac{2}{4}\cdot\frac{-1}{6} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3\cdot 4}$, $x_5 = -\frac{3}{5}x_4 = -\frac{1}{4\cdot 5}$

一般に $x_n = (-1)^n \frac{1}{n(n-1)}$ $(n=2,3,\cdots)$ となる.

∴ $x = x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + x_3 s^3 + \cdots$

$$= x_0 + (x_0+1)(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} - \frac{(t-1)^3}{6} + \cdots + (-1)^n\frac{(t-1)^n}{n(n-1)} + \cdots$$

$$= x_0 t + (t-1) + \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{(1-t)^3}{3\cdot 2} + \cdots + \frac{(1-t)^n}{n(n-1)} + \cdots.$$

ここで x_0 は未定であり, (1)の解のCに等しい. (∵ $t=1$ とせよ) //

問14.2.2. $f(t) = (1-t)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$ のとき $(f(0) = 1 = f_0)$

(1) $f'(t) = \alpha(1-t)^{-\alpha-1}$, $f''(t) = \alpha(\alpha+1)(1-t)^{-\alpha-2}$, $\cdots$

$\therefore$ $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha+1)$, $f'''(0) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$, $\cdots$

$$\left[\therefore f_1 = \frac{f'(0)}{1} = \alpha,\ f_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}, \cdots, f_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\ (n \geq 1)\right]$$

(2) $f'(t) = \alpha(1-t)^{-\alpha-1} = \dfrac{\alpha}{1-t} f(t)$. //

(3) $(1-t)f'(t) = \alpha f(t)$ を $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$ とおいて解く。$(f_0 = 1)$

$$\alpha f(t) = (1-t)\sum_{n=1}^{\infty} n f_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)f_{n+1} - n f_n\right)t^n$$

$\therefore$

$\alpha f_0 = f_1$, $\alpha f_1 = 2f_2 - f_1$, $\cdots$, $\alpha f_n = (n+1)f_{n+1} - n f_n\ (n \geq 1)$

$\therefore$ $f_1 = \alpha$, $f_2 = \dfrac{\alpha+1}{2} f_1 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}$, $f_3 = \dfrac{\alpha+2}{3} f_2 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}$,

$$f_{n+1} = \frac{\alpha+n}{n+1} f_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}{(n+1)\cdot n!} = \frac{(\alpha)_{n+1}}{(n+1)!}. //$$

(4) 収束半径は, $\left|\dfrac{f_n}{f_{n+1}}\right| = \left|\dfrac{(\alpha)_n / n!}{(\alpha)_{n+1}/(n+1)!}\right| = \left|\dfrac{n+1}{n+\alpha}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 1$

より, 1である. (ダランベール法による.) //

章末
14.1

(1) $x'(t) = t + 2t x(t)$; $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ とすると

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n = t + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} = (1+2a_0)t + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}t^n$$

∴ $a_1 t^0 = 0$, $2a_2 t^1 = (1+2a_0)t^1$, $(n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$

∴ $a_1 = 0$, $a_3 = a_5 = \cdots = 0$; $a_2 = a_0 + \frac{1}{2}$

$a_4 = \frac{2}{4}a_2$, $a_6 = \frac{2}{6}a_4 = \frac{a_2}{3\cdot 2}$, $a_8 = \frac{2}{8}a_6 = \frac{a_2}{4\cdot 3\cdot 2}$, $\cdots$, $a_{2n} = \frac{1}{n!}a_2$

∴ $x(t) = a_0 + \left(a_0 + \frac{1}{2}\right)\left(t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + \cdots\right)$

検算 $= a_0 + \left(a_0 + \frac{1}{2}\right)\left(e^{t^2} - 1\right) = \left(a_0 + \frac{1}{2}\right)e^{t^2} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x' = \left(a_0 + \frac{1}{2}\right)\cdot 2t e^{t^2} = 2t\left(x + \frac{1}{2}\right) = t + 2tx$. //

(2) $t + x(t) = (1+t)x'(t)$ ⇔

$$a_0 + (1+a_1)t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n$$

∴ $a_0 = a_1$, $1 + a_1 = 2a_2 + a_1$, $a_n = (n+1)a_{n+1} + n a_n$ $(n \geqq 2)$

∴ $a_0 = a_1$ は任意, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = -\frac{n-1}{n+1}a_n$ $(n \geqq 2)$ より

$a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3\cdot 2}$, $a_4 = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{4\cdot 3}$, $a_5 = -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4\cdot 3} = \frac{-1}{5\cdot 4}$, $\cdots$

∴ $x(t) = a_0(1+t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n(n-1)} = a_0(1+t) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)(-t)^n$

check $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}$ ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n} = -\log(1-t)$ であるから

$x(t) = a_0(1+t) + (-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n}$

$= a_0(1+t) + t\log(1+t) - (-\log(1+t) + t)$

$= a_0(1+t) + (t+1)\log(1+t) - (t+1) + 1$

$= (a_0 - 1)(1+t) + (t+1)\log(1+t) + 1$.

∴ $\begin{cases} t+1 = s \\ a_0 - 1 = C \end{cases}$ とおけば

$x = Cs + s\log s + 1$

$sx' = Cs + s(\log s + 1)$

$= x + s - 1 = x + t$. //

(3) $(1-t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$. $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ とおくと

$\iff x'' = t^2 x'' + 2tx' - 2x$

$\iff \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)a_n t^n + 2na_n t^n - 2a_n t^n\right)$
$+ 2a_1 t - (2a_0 + 2a_1 t)$

$\therefore \begin{cases} (n+2)(n+1)a_{n+2} = (n(n-1)+2n-2)a_n = (n^2+n-2)a_n & (n \geq 2), \\ 2a_2 t^0 = -2a_0 t^0, \quad 3\cdot 2\cdot a_3 t^1 = 0 \end{cases}$

$\therefore$

$a_2 = -a_0$, $a_3 = 0$; $a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1}a_n \ (n \geq 2)$ より $a_5 = a_7 = \cdots = 0$,

$a_4 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{-1}{3}a_0$, $a_6 = \frac{3}{5}a_4 = -\frac{1}{5}a_0$, $a_8 = \frac{5}{7}a_6 = \frac{-a_0}{7}$, $\cdots$,

$\therefore x = a_0 + a_1 t - a_0 t^2 + \left(-\frac{a_0}{3}t^4 - \frac{a_0}{5}t^6 - \frac{a_0}{7}t^8 - \cdots\right)$

$= a_0 + a_1 t - a_0\left(t^2 + \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{5} + \frac{t^8}{7} + \cdots\right)$ // (a_0, a_1 は任意)

注) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\log(1-t)$ $(|t| < 1)$ を用いて書き直すと

$x = a_0 + a_1 t - a_0 t\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \cdots\right)$

$- a_0 t\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + \cdots\right) + a_0 t\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + \cdots\right)$

$= a_0 + a_1 t - a_0 t\left(-\log(1-t)\right) + \frac{a_0 t}{2}\left(-\log(1-t^2)\right)$

$= a_1 t + a_0\left(1 + t\log(1-t) - \frac{t}{2}\log(1-t^2)\right)$

$= a_1 t + a_0\left(1 + \frac{t}{2}\log\frac{(1-t)^2}{(1-t^2)}\right) = a_1 t + a_0\left(1 + \frac{t}{2}\log\frac{1-t}{1+t}\right)$

($|t| < 1$ のとき) となる。

check 線形なので $x=t$, $1+\frac{t}{2}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ それぞれが解ならよい.

・$x=t$ について: $x''=0$,

$$(1-t^2)x''-2tx'+2x=0-2t+2x=0.$$

・$x=1+\frac{t}{2}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ について: $\left(\frac{1-t}{1+t}\right)'=\left(\frac{2}{1+t}\right)'=\frac{-2}{(1+t)^2}$

$$x'=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)+\frac{t}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1-t}{1+t}\right)'}{\left(\frac{1-t}{1+t}\right)}=\frac{x-1}{t}+\frac{-t}{1-t^2}$$

$$x''=-\frac{x-1}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{x-1}{t}+\frac{-t}{1-t^2}\right)-\frac{1}{1-t^2}+t\frac{-2t}{(1-t^2)^2}=\frac{-2}{1-t^2}+\frac{-2t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{-2}{(1-t^2)^2}$$

$\therefore$ $(1-t^2)x''-2tx'+2x$

$$=\frac{-2}{1-t^2}-2(x-1)+\frac{2t^2}{1-t^2}+2x=2-2\frac{1-t^2}{1-t^2}=0.$$

(注) この方程式は, 16章で学ぶルジャンドルの方程式の $\nu=1$ の場合である。$t=1$ で有限な値をとる解は $a_0=0$ のときの $x=a_1t$ のみであることが上の計算で分る。

[14-2 $tx' = x + t$, (3) 14.2.3 と同じ, 自習とする]

14-3 $x' = x^2 - t^3 \quad (x(0) = 1)$ の原点での級数解を4次まで求める.

$x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + x_4 t^4 + \cdots$ とすると

$x' = x_1 + 2x_2 t + 3x_3 t^2 + 4x_4 t^3 + \cdots$

$x^2 = x_0^2 + 2x_0 x_1 t + (x_1^2 + 2x_0 x_2) t^2 + 2(x_0 x_3 + x_1 x_2) t^3$
$+ (x_2^2 + 2x_0 x_4 + 2x_1 x_3) t^4 + \cdots$

∴ $t^0)$ $x_1 = x_0^2$ $\quad x_0 = x(0) = 1$ より, $x_1 = 1$.

$t^1)$ $2x_2 = 2x_0 x_1$ $\quad x_0 = x_1 = 1$ より, $x_2 = 1$. 以下同様にして

$t^2)$ $3x_3 = x_1^2 + 2x_0 x_2 = 1 + 2 = 3$ ∴ $x_3 = 1$

$t^3)$ $4x_4 = 2(x_0 x_3 + x_1 x_2) - 1 = 2(1+1) - 1 = 3$ ∴ $x_4 = \frac{3}{4}$

∴ $x(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{3}{4} t^4 + \cdots$ //

(注) 尚, これに続く項は

$t^4)$ $5x_5 = x_2^2 + 2(x_0 x_4 + x_1 x_3)$ ∴ $x_5 = \dfrac{1 + \frac{3}{2} + 1}{5} = \frac{7}{10}$

$t^5)$ $6x_6 = 2(x_0 x_5 + x_1 x_4 + x_2 x_3)$
$= 2\left(\frac{7}{10} + \frac{3}{4} + 1\right) = \frac{49}{10}$ ∴ $x_6 = \frac{49}{60}$ 等である.

14-4 $x'' = -x$ の級数解について

$x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \cdots + x_{n-2} t^{n-2} + \cdots$ とすれば

$x'' = 2x_2 + 6x_3 t + 12x_4 t^2 + 5\cdot 4\, x_5 t^3 + \cdots + n(n-1) x_n t^{n-2} + \cdots$ であるので

$x_2 = -\frac{x_0}{2},\ x_3 = \frac{-x_1}{6},\ x_4 = \frac{-x_2}{12},\ x_5 = \frac{-x_3}{20}, \cdots, x_n = -\frac{x_{n-2}}{n(n-1)}\ (n \geqq 2)$

$\therefore\ x_4 = \frac{x_0}{4\cdot 3\cdot 2},\ x_6 = -\frac{1}{6\cdot 5} x_4 = -\frac{x_0}{6!},\ x_8 = +\frac{x_0}{8!}, \cdots$

$x_5 = \frac{+x_1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2},\ x_7 = \frac{-x_1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{-x_1}{7!}, \cdots$

(1) $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$ のとき、$x_0 = 1,\ x_1 = 0$ であるから

$\therefore$ $x(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \frac{1}{8!}t^8 - \cdots$ となる。//

(2) $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$ のとき $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ であるから

$x(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \cdots$ となる。//

注 (1), (2) とも収束半径は ∞ であり

(1) $= \cos t$, (2) $= \sin t$ である。

14-5 $x'(t)^2 = (1-k^2x(t)^2)(1-x(t)^2)$, $\begin{cases} x(0)=0 \\ x'(0)=1 \end{cases}$ のとき

$x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + x_4 t^4 + \cdots$ とすると

$$x^2 = x_0^2 + 2x_0x_1 t + (x_1^2 + 2x_0x_2)t^2 + 2(x_0x_3 + x_1x_2)t^3 + (x_2^2 + 2x_0x_4 + 2x_1x_3)t^4 + \cdots$$

$$x' = x_1 + 2x_2 t + 3x_3 t^2 + 4x_4 t^3 + \cdots$$

$$x'^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 t + (4x_2^2 + 6x_1x_3)t^2 + 2(x_1 \cdot 4x_4 + 2x_2 \cdot 3x_3)t^3 + (9x_3^2 + 2x_1 \cdot 5x_5 + 2\cdot 2x_2 \cdot 3x_3)t^4 + \cdots$$

$(1-k^2x^2)(1-x^2) = 1-(1+k^2)x^2 + k^2x^4$,

$$x^4 = x_0^4 + 4x_0^3x_1 t + (2x_0^2(x_1^2 + 2x_0x_1) + 4x_0^2x_1^2)t^2 + (4x_0^2(x_0x_3 + x_1x_2) + 4x_0x_1(x_1^2 + 2x_0x_2))t^3 + ((x_1^2 + 2x_0x_2)^2 + 2x_0^2(x_2^2 + 2x_0x_4 + 2x_1x_3) + 8x_0x_1(x_0x_3 + x_1x_2))t^4 + \cdots$$

∴

t^0) $x_1^2 = (1-k^2x_0^2)(1-x_0^2) \iff 1=1$ by $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

t^1) $4x_1x_2 = -(1+k^2)2x_0x_1 + 4x_0^3x_1$ ∴ $x_2 = 0$

t^2) $4x_2^2 + 6x_1x_3 = -(1+k^2)(x_1^2 + 2x_0x_2)$ ∴ $x_3 = -\frac{1+k^2}{6}$

t^3) $8x_1x_4 + 12x_2x_3 = -(1+k^2)2(x_0x_3 + x_1x_2)$ ∴ $x_4 = 0$

t^4) $9x_3^2 + 2x_1 \cdot 5x_5 + 2\cdot 2x_2 \cdot 3x_3$

$= -(1+k^2)(x_2^2 + 2x_0x_4 + 2x_1x_3)$

$+ ((x_1^2 + 2x_0x_2)^2 + 2x_0^2(x_2^2 + 2x_0x_4 + 2x_1x_3) + 8x_0x_1(x_0x_3 + x_1x_2))$

$\iff 10x_5 = -9x_3^2 - (1+k^2)\cdot 2x_3 + 1$ ∴ $x_5 = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{(1+k^2)^2}{12}\right)$

以下同様であり，x'^2 の t^n の項が $x_1x_{n+1} = x_{n+1}$ を含み，右辺の t^n の係数は $x_0, \cdots, x_n$ で与えられるから x_{n+1} が一通りに決まる。//

(注) これは sn 関数（章末問題 13.2）の Taylor 展開を与える。

14.6 (14.6): $x' + x = 2t+3$ を演算子法で解く。

$\Leftrightarrow$ $(D_t + 1)x = 2t+3$.

$(1+D_t)^{-1} = 1 - D_t + D_t^2 - D_t^3 + \cdots$ と見て右辺に施すと $D_t^2(2t+3) = 0$ だから

$$x(t) = (1+D_t)^{-1}(2t+3) = (1-D_t)(2t+3)$$
$$= (2t+3) - 2 = 2t+1$$

を得る。$(2t+1)' + (2t+1) = 2t+3$ であり、たしかに解である。

15章

問15.1.1 $x''=-x$ の $t=a$ での級数解。 $s=t-a$ とおくと

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-x \iff \dfrac{d^2x}{ds^2}=-x$ であり、 $t=a \iff s=0$.

$x=\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} x_n s^n$ とすれば、14-4と同様にして

$x_2=-\dfrac{x_0}{2}, x_3=\dfrac{-x_1}{6}, x_4=\dfrac{-x_2}{12}, x_5=\dfrac{-x_3}{20}, \cdots, x_n=-\dfrac{x_{n-2}}{n(n-1)} \ (n\geqq 2)$.

$\therefore\ x_4=\dfrac{x_0}{4\cdot3\cdot2},\ x_6=-\dfrac{1}{6\cdot5}x_4=-\dfrac{x_0}{6!},\ x_8=+\dfrac{x_0}{8!}, \cdots$

$x_5=\dfrac{+x_1}{5\cdot4\cdot3\cdot2},\ x_7=\dfrac{-x_1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}=\dfrac{-x_1}{7!}, \cdots$

(1) $x(a)=1,\ x'(a)=0$ のとき、 $x_0=1,\ x_1=0$ であるから

$x(t)=x_{(1)}(t)=1-\dfrac{1}{2}s^2+\dfrac{1}{4!}s^4-\dfrac{1}{6!}s^6+\dfrac{1}{8!}s^8-\cdots$

$=1-\dfrac{1}{2}(t-a)^2+\dfrac{1}{4!}(t-a)^4-\dfrac{1}{6!}(t-a)^6+\cdots$ となる。

(2) $x(0)=0,\ x'(0)=1$ のとき、 $x_0=0,\ x_1=1$ であるから

$x(t)=x_{(2)}(t)=s-\dfrac{1}{6}s^3+\dfrac{s^5}{5!}-\dfrac{s^7}{7!}+\dfrac{s^9}{9!}-\cdots$

$=(t-a)-\dfrac{(t-a)^3}{3!}+\dfrac{(t-a)^5}{5!}-\dfrac{(t-a)^7}{7!}+\cdots$ となる。//

$x_{(1)}, x_{(2)}$ が1次独立であることをたしかめるため

$A\,x_{(1)}(t)+B\,x_{(2)}(t)=0$ とすれば、(1)(2)の条件より

$t=a$ として $A+0=0$ $\therefore\ A=0$

又微分して $t=a$ として $0+B=0$ $\therefore\ B=0$

すなわちこれらは1次独立である。

(注) もちろん $x_{(1)}(t)=\cos(t-a),\ x_{(2)}(t)=\sin(t-a)$ である。

問15.2.1 $t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0 \iff x'' + \frac{x'}{t} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)x = 0.$ (*)

よって(15.1)の記号では $P(t) = \frac{1}{t}$, $Q(t) = \frac{t^2-\nu^2}{t^2}$, すなわち

(15.5)の記号で $p(t) = 1$, $q(t) = t^2 - \nu^2$ である。

$p(t)$, $q(t)$ は多項式でありもちろん $t=0$ でテイラー展開できるので、

$t=0$ は確定特異点である。

また、$t = a \neq 0$ においては、P と Q が

$$P(t) = \frac{1}{t} = \frac{1}{(t-a)+a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t-a}{a}}$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{t-a}{a} + \left(\frac{t-a}{a}\right)^2 - + \cdots\right) \qquad \left(\left|\frac{t-a}{a}\right| < 1 \text{ で収束}\right)$$

$$Q(t) = 1 - \frac{\nu^2}{t^2} = 1 - \left(\frac{\nu}{(t-a)+a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\nu}{a}\right)^2\left(\frac{1}{1 + \frac{t-a}{a}}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{\nu}{a}\right)^2\left(1 - \frac{t-a}{a} + \left(\frac{t-a}{a}\right)^2 - + \cdots\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{\nu}{a}\right)^2\left(1 - 2\frac{t-a}{a} + 3\left(\frac{t-a}{a}\right)^2 - + \cdots\right) \qquad \left(\left|\frac{t-a}{a}\right| < 1 \text{ で収束}\right)$$

とテイラー展開可能であるので、$a \neq 0$ は正則点である。//

注 "$t = \infty$" についても、$s = \frac{1}{t}$ とおいて $s = 0$ のときを調べると

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0 \iff \left(t\frac{d}{dt}\right)^2 x(t) + (t^2 - \nu^2)x(t) = 0$$

$$\iff \left(\left(-s\frac{d}{ds}\right)^2 + \left(\frac{1}{s^2} - \nu^2\right)\right)x = 0 \iff s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + \left(\frac{1}{s^2} - \nu^2\right)x = 0$$

$$\left(\iff \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dx}{ds} + \frac{s^2 - \nu^2}{s^4}x = 0.\right)$$

$s = 0$ において $\frac{1}{s^2} - \nu^2$ は発散しテイラー展開できないから、

$s = 0$ は確定特異点でない特異点(不確定特異点)である。

すなわち、ベッセルの方程式(*)は $t = \infty$ を不確定特異点とする。

問15.3.1(1) $\left(t\frac{d}{dt}-\nu\right)^2 x(t)=0 \iff \left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^2-2\nu t\frac{d}{dt}+\nu^2\right]x=0$

$$\iff \left[t^2\left(\frac{d}{dt}\right)^2-(1-2\nu)t\frac{d}{dt}+\nu^2\right]x=0.$$

$(1-2\nu)t$, ν^2 は $t=0$ でテーラー展開できる関数なので、
$t=0$ はこの方程式の確定特異点である。決定方程式は、
$x(t)=t^\mu(1+x_1t+x_2t^2+\cdots)$ の形の解があるための条件だから
代入して $\mu^2t^\mu+(\mu+1)^2x_1t^{\mu+1}+(\mu+2)^2x_2t^{\mu+2}+\cdots$

$$-2\nu\left(\mu t^\mu+(\mu+1)x_1t^{\mu+1}+(\mu+2)x_2t^{\mu+2}+\cdots\right)$$

$$+\nu^2\left(t^\mu+x_1t^{\mu+1}+x_2t^{\mu+2}+\cdots\right)=0.$$

t^μ の係数 $=0 \iff \mu^2-2\nu\mu+\nu^2=0 \iff (\mu-\nu)^2=0$ ∴ $\mu=\nu$ //

解としては、まず $\left(t\frac{d}{dt}-\nu\right)x=0 \Rightarrow \left(t\frac{d}{dt}-\nu\right)^2x=0$ に注意すると、
$tx'=\nu x$ より $\frac{x'}{x}=\frac{\nu}{t}$ ∴ $x=Ct^\nu$ (Cは定数) が求まる。
更に、$\left(t\frac{d}{dt}-\nu\right)x=t^\nu \Rightarrow \left(t\frac{d}{dt}-\nu\right)^2x=\left(t\frac{d}{dt}-\nu\right)t^\nu=0$ なので、

$tx'-\nu x=t^\nu$ を解けばやはり解が得られる。
定数変化法を用いて、$x=C(t)t^\nu$ とおけば

$$x'=C't^\nu+C\nu t^{\nu-1} \quad ∴\ tx'=C't^{\nu+1}+C\cdot\nu t^\nu$$

∴ $tx'-\nu x=C't^{\nu+1}=t^\nu \iff C'=\frac{1}{t}$ となるから

$x(t)=t^\nu\cdot(\log t+\mathrm{Const})$ という第2の解が求まる。

t^ν と $t^\nu\log t$ は1次独立であるから、これらが
解空間の基底になる。//

(2) $\left(t\frac{d}{dt}-\nu\right)\left(t\frac{d}{dt}-\nu-1\right)x=0$ のとき.

$\Leftrightarrow \left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^2-(2\nu+1)t\frac{d}{dt}+\nu(\nu+1)\right]x=0$

$\Leftrightarrow t^2x''-2\nu t x'+\nu(\nu+1)x=0.$

$2\nu t$, $\nu(\nu+1)$ は $t=0$ でテーラー展開できるので, 0は確定特異点である.

$x=t^\mu(1+x_1t+\cdots)$ とおき代入すると, (1)と同様にして

$$(\mu-\nu)(\mu-\nu-1)t^\mu+(\mu+1-\nu)(\mu-\nu)x_1t^{\mu+1}+\cdots=0$$

となるから, 特性根は $\mu=\nu, \nu+1$ である。1次独立な解として

$x=t^\nu, t^{\nu+1}$ がとれる. //

(注) $\left(t\frac{d}{dt}-\nu\right)\left(t\frac{d}{dt}-\nu-\varepsilon\right)x=0$ $(\varepsilon\neq 0)$ なら, 同様にして

$x=t^\nu, t^{\nu+\varepsilon}$ が1次独立な解としてとれる.

これらは $\varepsilon\to 0$ では一致してしまうが, 1次結合

$$\frac{t^{\nu+\varepsilon}-t^\nu}{\varepsilon}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(t^{\nu+\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0}=t^\nu\log t$$

は $\varepsilon\to 0$ で t^ν と1次独立な, (1)で求めた解を与える. //

15章末

15.1 $H(a,b,c)$: $\left[t(1-t)\frac{d^2}{dt^2}+\left(c-(a+b+1)t\right)\frac{d}{dt}-ab\right]x(t)=0$

$\Leftrightarrow\ x''+\frac{c-(a+b+1)t}{t(1-t)}x'-\frac{ab}{t(1-t)}x=0.$

$\frac{c-(a+b+1)t}{1-t}$, $\frac{t\cdot ab}{1-t}$ は $t=0$ でテーラー展開され,

$\frac{c-(a+b+1)t}{t}$, $\frac{(1-t)ab}{t}$ は $t=1$ でテーラー展開される.

$\therefore$ $t=0,1$ は $H(a,b,c)$ の確定特異点である.

$t=0$ での特性指数は, $x=t^\nu(1+x_1t+x_2t^2+\cdots)$ とおいてしらべると

$$(1-t)\left[\nu(\nu-1)t^{\nu-1}+(\nu+1)\nu x_1t^\nu+(\nu+2)(\nu+1)x_2t^{\nu+1}+\cdots\right]$$
$$+\left(c-(a+b+1)t\right)\left[\nu t^{\nu-1}+(\nu+1)x_1t^\nu+(\nu+2)x_2t^{\nu+1}+\cdots\right]$$
$$-ab\,t^\nu(1+x_1t+x_2t^2+\cdots)=0$$

$t^{\nu-1}$ の係数をみて, $\nu(\nu-1)+c\nu=0$ $\therefore\begin{cases}\nu=0, \text{ or}\\ \nu=1-c.\end{cases}$

また, $s=1-t$ とおくと

$$H(a,b,c)\Leftrightarrow\left[s(1-s)\frac{d^2}{ds^2}-\left(\underbrace{c-(a+b+1)(1-s)}_{=-(c-a-b-1)-(a+b+1)s}\right)\frac{d}{ds}-ab\right]x=0$$

$\therefore\begin{cases}\nu=0, \text{ or}\\ \nu=1+(c-a-b-1)=c-a-b.\end{cases}$ //

(「$c \neq 0, -1, -2, \cdots$ とする」を，問のはじめに挿入)

15.2 (1) まず $H(a,b,c) \Leftrightarrow (tD+a)(tD+b)u = (tD+c)Du$ を示す.

$$\begin{cases} 右辺 = (tD+c)u' = tu'' + cu', \\ 左辺 = (tD+a)(tu'+bu) = t(tu''+u') + (a+b)tu' + abu \end{cases}$$

$$\therefore\ 右 - 左 = (t-t^2)u'' + (c-(a+b+1)t)u' - abu = 0 \ //$$

これを用いて $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$ を代入すると,

$$\begin{cases} (tD+c)Du = (tD+c)\sum_{n=1}^{\infty} u_n n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n n\left((n-1)t^{n-1} + ct^{n-1}\right) \\ \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}(n+1)(n+c)t^n \\ (tD+a)(tD+b)u = (tD+a)\sum_{n=0}^{\infty}(n+b)u_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+a)(n+b)u_n t^n \end{cases}$$

$n=-c$ で $u_{n+1}=\infty$ ‖ u_{1-c} が問題 (△) ($t^{1-c}(1+\cdots)$ の解はOK)

$$\therefore\ (n+a)(n+b)u_n = u_{n+1}(n+1)(n+c) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$\therefore\ u_{n+1} = \dfrac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)}u_n$. cが負の整数でなければ, これより

$$u_n = \frac{(a+n-1)(b+n-1)}{(c+n-1)\,n}\cdot\frac{(a+n-2)(b+n-2)}{(c+n-2)(n-1)}\cdots\frac{a\cdot b}{c\cdot 1}u_0$$

$$= \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\, n!}u_0 \qquad \left((a)_n = (a+n-1)(a+n-2)\cdots a\right)$$

となる,

$$\therefore\ u(t) = u_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\, n!}t^n = u_0 \cdot F(a,b,c|t) \ //$$

$\left|\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \left|\dfrac{(n+c)(n+1)}{(n+a)(n+b)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ なので, $|t|<1$ で収束する。

但し a 又は b が負の整数ならば ($a=-N$ とすると), $(a)_n = 0$ $(n>N)$ より $u(t)$ は N 次の多項式となる ($\therefore\ |t|<\infty$ で収束する)。

(2) $H(a,b,c) \Leftrightarrow (tD+a)(tD+b)u = (tD+c)Du$ であった。

$u(t) = t^{1-c}y(t)$ とすると

$$Du = (1-c)t^{-c}y + t^{1-c}Dy = t^{-c}((1-c)+tD)y,$$

∴ $(tD+c)Du$

$$= (tD+c)t^{-c}(tD+1-c)y$$
$$= (-ct^{-c}+ct^{-c}+t^{1-c}D)(tD+1-c)y$$
$$= t^{1-c}D(tD+1-c)y$$
$$= t^{1-c}(tD+2-c)Dy,$$

$\left[∵ \quad D(tD)y = Dy + tD^2y = (1+tD)Dy \right]$

又 $(tD+a)(tD+b)(t^{1-c}y)$

$$= (tD+a)t^{1-c}(tD+1-c+b)y$$
$$= t^{1-c}(tD+1-c+a)(tD+1-c+b)y$$

∴ y は $H(1-c+a, 1-c+b, 2-c)$ をみたす。よって

$u = t^{1-c}F(1-c+a, 1-c+b, 2-c\,|\,t)$ が $H(a,b,c)$ をみたす。

注) $c=0,-1,\cdots$ のときも (15.23) の解は有効である。
むしろ $F(a,b,c\,|\,t)$ の方が定義されず基本解系がでてこなくなり、代りに定理15.3.1のような log を含む解が生じる。

16章

例16.1.1

$$P_\nu(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\nu)\cdots(n+\nu)\cdot(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+n-1)}{n!^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^n$$

$\nu=0$: $-\nu=0$ より, $P_0(t)=1$.

$\nu=1$: $-\nu+1=0$ より, $P_1(t) = 1+\sum_{n=1}^{1}\frac{(1+1)(-1)}{n!^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)$

$$= 1-2\cdot\frac{1-t}{2} = t.$$

$\nu=2$: $P_2(t) = 1+\sum_{n=1}^{2}$

$$= 1+\frac{(1+2)(-2)}{1^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)+\frac{(1+2)(2+2)\cdot(-2)(-2+1)}{2^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^2$$

$$= 1+3(t-1)+\frac{3\cdot 8}{2^4}(t-1)^2 = \frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2},$$

$\nu=3$: $P_3(t) = 1+\sum_{n=1}^{3}$

$$= 1+\frac{(1+3)(-3)}{1}\left(\frac{1-t}{2}\right)+\frac{(1+3)(2+3)\cdot(-3)(-3+1)}{2^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^2$$

$$+\frac{(1+3)(2+3)(3+3)\cdot(-3)(-3+1)(-3+2)}{6^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^3$$

$$= 1-12\frac{1-t}{2}+\frac{15}{2}(1-t)^2-\frac{5}{2}(1-t)^3 = \frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t.$$

$\nu=4$: $P_4 = 1+\frac{(1+4)(-4)}{1}\left(\frac{1-t}{2}\right)+\frac{(1+4)(2+4)(-4)(-4+1)}{2^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^2$

$$+\frac{(1+4)(2+4)(3+4)\cdot(-4)(-4+1)(-4+2)}{6^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^3$$

$$+\frac{(1+4)(2+4)(3+4)(4+4)\cdot(-4)(-4+1)(-4+2)(-4+3)}{24^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^4$$

$$= 1+10(t-1)+\frac{45}{2}(t-1)^2+\frac{35}{2}(t-1)^3+\frac{70}{16}(t-1)^4$$

分母は8.
(80は誤り) →

$$= \frac{35}{\cancel{80}\,8}t^4-\frac{30}{\cancel{80}\,8}t^2+\frac{3}{\cancel{80}\,8}$$

//

[recall: $P_n = \frac{(2n)!\cdot\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n!)^2 2^n}t^n + \cdots$ ∴ $t^n = \frac{2^n n!^2}{(2n)!}P_n + \cdots$; $(P_n, P_m) = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}$]

問16.2.1 P_k はk次式であるので, $P_0, P_1, \dots, P_n$ は1次独立で, 1次結合で $1, t, \dots, t^n$ を表せる. 実際 $1 = P_0$, $t = P_1$ であり,

($1, x, x^2 \dots$ と思っていた)

$P_2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$ より $t^2 = \frac{2}{3}\left(P_2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0$

$P_3 = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$ より $t^3 = \frac{2}{5}\left(P_3 + \frac{3}{2}t\right) = \frac{2}{5}P_3 + \frac{3}{5}P_1$ //

これを続けてもよいが $t^4 = c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4$ とすると

偶関数なので $c_1 = c_3 = 0$ であり $(t^4, P_\ell) = c_\ell(P_\ell, P_\ell) = \frac{2c_\ell}{2\ell+1}$

$$
∴ \begin{cases} c_0 = \frac{1}{2}(t^4, P_0), & (t^4, 1) = \frac{2}{5} \\ c_2 = \frac{5}{2}(t^4, P_2), & (t^4, P_2) = \left(t^4, \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{7} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{8}{35} \\ c_4 = \frac{9}{2}(t^4, P_4), & (t^4, P_4) = \frac{8}{35}(P_4, P_4) \underset{\uparrow}{=} \frac{8}{35}\cdot\frac{2}{9} \end{cases}
$$

∴ $t^4 = \frac{1}{5}P_0 + \frac{4}{7}P_2 + \frac{8}{35}P_4$ // $\left(P_4 = \frac{35}{8}t^4 + (3次以下)\right)$

同様に $t^5 = c_1P_1 + c_3P_3 + c_5P_5$ とすると

$$
\begin{cases} c_1 = \frac{3}{2}(t^5, P_1) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{7} = \frac{3}{7} \\ c_3 = \frac{7}{2}(t^5, P_3) = \frac{7}{2}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{9} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{7}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{8}{63} = \frac{4}{9} \\ c_5 = \frac{11}{2}(t^5, P_5) = \frac{11}{2}\cdot\frac{2^5(5!)^2}{(10)!}(P_5, P_5) = \frac{5!}{9!!} = \frac{\cancel{5}\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot2\cdot1}{9\cdot7\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot1} = \frac{8}{63} \end{cases}
$$
//

また $t^6 = c_0P_0 + c_2P_2 + c_4P_4 + c_6P_6$ とすると

$\frac{1}{8}\left(\frac{9\cdot35}{11} - 30 + \frac{27}{7}\right)$
$= \frac{1}{8}\left(\frac{18}{11} + \frac{6}{7}\right)$
$= \frac{3}{8}\left(\frac{3}{11} + \frac{1}{7}\right)$
$= \frac{3}{8}\cdot\frac{22}{77}$

$$
\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2}(t^6, P_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{7} \\ c_2 = \frac{5}{2}(t^6, P_2) = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{9} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right) = \frac{10}{21} \\ c_4 = \frac{9}{2}(t^6, P_4) = \frac{9}{2}\left(t^6, \frac{35}{8}t^4 - \frac{30}{8}t^2 + \frac{3}{8}\right) \\ \quad = \frac{9}{2}\left(\frac{35}{8}\cdot\frac{2}{11} - \frac{30}{8}\cdot\frac{2}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\right) = \frac{9}{16}\left(\frac{70}{11} - \frac{20}{3} + \frac{6}{7}\right) = \frac{24}{77} \\ c_6 = \frac{13}{2}(t^6, P_6) = \frac{13}{2}\cdot\frac{6!}{11!!}(P_6, P_6) = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3} = \frac{6\cdot4\cdot2}{11\cdot9\cdot7} = \frac{16}{231} \end{cases}
$$

$2\frac{35\cdot21 - 770 + 99}{3\cdot7\cdot11}$
$= 2\cdot\frac{64}{3\cdot7\cdot11}\times\frac{9}{16}$

//

問16.3.1 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2rt+r^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)r^n$ に，(4.13)の2項展開を用いる：

$$(1-x)^{-1/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}x^n \quad \left((\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\right) \text{より},$$

左辺

$$=1+\frac{1}{2}(2rt-r^2)+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2}(2rt-r^2)^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}(2rt-r^2)^3+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{4!}(2rt-r^2)^4+\cdots$$

$$=1+t\cdot r+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t^2\right)r^2+\left(-\frac{3}{2}t+\frac{5}{2}t^3\right)r^3+\left(\frac{3}{8}-\underbrace{\frac{30}{8}t^2}_{\circledast}+\frac{35}{8}t^4\right)r^4+\cdots$$

$$=P_0(t)\cdot r^0+P_1(t)\cdot r^1+P_2(t)\cdot r^2+P_3(t)\cdot r^3+P_4(t)\cdot r^4+\cdots \quad //$$

$\circledast$ $3\cdot5\dfrac{(-3)\cdot(2t)^2}{8\cdot3!}=\dfrac{-15}{4}t^2$

問16.4.1.(1) $(1-t^2)x''-2tx'+\nu(\nu+1)x=0$：(16.1)で，$t^2=z$とすると

$2t\,dt=dz$，$t\dfrac{d}{dt}=2z\dfrac{d}{dz}$．また $t^2\left(\dfrac{d}{dt}\right)^2=\left(t\dfrac{d}{dt}\right)^2-t\dfrac{d}{dt}$

（つまり，$t^2f''=t(tf')'-tf'$である）

∴

$$(16.1)\Leftrightarrow\left[\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\left(2z\frac{d}{dz}\right)^2-2z\frac{d}{dz}\right)-2\cdot2z\frac{d}{dz}+\nu(\nu+1)\right]x=0\quad(\circledast)$$

$$=\left[\frac{1-z}{z}\left(4z^2\frac{d^2}{dz^2}+2z\frac{d}{dz}\right)-4z\frac{d}{dz}+\nu(\nu+1)\right]x$$

$$=\left[4z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}+\underline{2(1-z)-4z}\frac{d}{dz}+\nu(\nu+1)\right]x$$

$$\Leftrightarrow\left[z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1-3z}{2}\frac{d}{dz}+\frac{\nu(\nu+1)}{4}\right]x=0.$$

(16.19)式のこの辺に誤り．$2(1-3z)$が正しい．

これは $c=\dfrac{1}{2}$，$a+b+1=\dfrac{3}{2}$，$ab=-\dfrac{\nu(\nu+1)}{4}$ の $H(a,b,c)$．

$$\Rightarrow\{a,b\}=\left\{\frac{\nu+1}{2},-\frac{\nu}{2}\right\}. //$$

(2)：(7)

16.4 2(2) ; $P = t^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}-n \,\middle|\, \frac{1}{t^2}\right)$

$u = F(a\ b\ c \mid z)$ は、$\left[(z-z^2)\frac{d^2}{dz^2} + (c-(a+b+1)z)\frac{d}{dz} - ab\right]u = 0$ を

みたす。$u = F(z)$ がこの解のとき、$P = t^n F\left(\frac{1}{t^2}\right)$ とすれば

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = n t^{n-1} F\left(\frac{1}{t^2}\right) - \dfrac{2t^n}{t^3} F'\left(\frac{1}{t^2}\right) & \left(' = \frac{d}{dz}\right) \\ \dfrac{d^2P}{dt^2} = n(n-1)t^{n-2}F\left(\frac{1}{t^2}\right) - 2(n-3)t^{n-4}F'\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ \qquad - 2\dfrac{n t^{n-1}}{t^3} F'\left(\frac{1}{t^2}\right) + t^n\left(\frac{2}{t^3}\right)^2 F''\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F'\left(\frac{1}{t^2}\right) = -\dfrac{t^{3-n}}{2}\left(\dfrac{dP}{dt} - n t^{n-1}F\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = \dfrac{t^{3-n}}{-2}\left(P' - \frac{n}{t}P\right) \\ F''\left(\frac{1}{t^2}\right) = \dfrac{t^{6-n}}{4}\left(\dfrac{d^2P}{dt^2} + 2(2n-3)t^{n-4}\dfrac{dF}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\right) - n(n-1)t^{n-2}F\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \\ \quad = \dfrac{t^{6-n}}{4}\left(P'' - \dfrac{2n-3}{t}\left(P' - \frac{n}{t}P\right) - \dfrac{n(n-1)}{t^2}P\right) = \dfrac{t^{4-n}}{4}\left(t^2P'' - (2n-3)tP' + n(n-2)P\right) \end{cases}$$

$$\therefore\ 0 = \left[(z-z^2)\frac{d^2F}{dz^2} + (c-(a+b+1)z)\frac{dF}{dz} - abF\right] \qquad \begin{cases} a = \frac{-n}{2} \\ b = \frac{1-n}{2} \\ c = \frac{1}{2} - n \end{cases}$$

$$= (t^{-2} - t^{-4})\frac{t^{6-n}}{4}\left(t^2P'' - (2n-3)tP' + n(n-2)P\right)$$

$$+ \left(c - (a+b+1)t^{-2}\right)\frac{t^{2-n}}{-2}(tP' - nP) - ab\,t^{-n}P$$

$n(2n-3) - n(n-1) = n(n-2)$

$\therefore\ a+b = \frac{1}{2} - n$

$ab = \frac{n(n-1)}{4}$

$$= t^{-n}\left[\frac{t^2-1}{4}\left(t^2P'' - (2n-3)tP' + n(n-2)P\right) - \frac{ct^2 - (a+b+1)}{2}(tP' - nP) - abP\right]$$

$$= t^{-n}\left[\frac{t^2-1}{4}t^2P'' - \left(\frac{2n-3}{4}(t^2 \cancel{-1}) + \frac{(1-2n)t^2 \cancel{-(3-2n)}}{4}\right)tP'\right.$$

$$\left. + \left(\frac{n(n-2)}{4}(t^2-1) + \frac{(1-2n)t^2 - (3-2n)}{4}n - \frac{n(n-1)}{4}\right)P\right]$$

$$= \frac{t^{2-n}}{4}\left[(t^2-1)P'' + 2tP' - n(n+1)P\right]$$

$-\frac{n(n+1)}{4}t^2 - \frac{(n-2)+(3-2n)+(n-1)}{4}n$

$(1-t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0$

すなわち $P(t)$ は $P_n(t)$ と同じ方程式をみたす。$a = \frac{-n}{2}$, $b = \frac{1-n}{2}$ より

$(a)_n = (a)_{n+1} = \cdots = 0$ (n: 偶), $(b)_{n-1} = (b)_n = \cdots = 0$ (n: 奇)

$\therefore$ P は n 次式。また、t^n の係数 $= 1$. $\frac{(2n)!}{2^n n!^2}$ 倍すれば、同じ

方程式をみたす同じ特性指数の解である P_n と一致する。//

16章末

16-1 $(t^i, t^j) = \int_{-1}^{1} t^{i+j} dt = \dfrac{1-(-1)^{i+j+1}}{i+j+1} = \begin{cases} 0 & (i \not\equiv j \bmod 2) \\ \dfrac{2}{i+j+1} & (i \equiv j \bmod 2) \end{cases}$

(1) $g_1 = t+a \perp f_0 = 1 \Leftrightarrow (t+a, 1) = 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$

(2) $g_2 = t^2 + (b_0 + b_1 t) \perp 1, t$

$\Leftrightarrow (g_2, t) = \frac{2}{3} b_1 = 0,\ (t^2, 1) + b_0 (1,1) = 0 \quad \therefore b_0 = -\frac{(t^2,1)}{(1,1)} = -\frac{2/3}{2} = \frac{-1}{3}$

(3) $g_3 = t^3 + (c_0 + c_1 t + c_2 t^2) \perp 1, t, t^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c_0 + \frac{2}{3} c_2 = \frac{2}{3} c_0 + \frac{2}{5} c_2 = 0 & \therefore c_0 = c_2 = 0 \\ (t^3, t) + c_1 (t, t) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} c_1 = 0 & \therefore c_1 = -\frac{3}{5} \end{cases}$

(4) $(g_0, g_0) = (1, 1) = 2,\ (g_1, g_1) = (t, t) = \frac{2}{3}$

$(g_2, g_2) = (t^2 - \frac{1}{3}, t^2 - \frac{1}{3}) = (t^2 - \frac{1}{3}, t^2) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{45}$

$(g_3, g_3) = (t^3 - \frac{3}{5} t, t^3 - \frac{3}{5} t) = \frac{2}{7} - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{7 \cdot 25}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{(g_0, g_0)}} g_0 = \frac{t^0}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{(g_1, g_1)}} g_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} t,\ \frac{g_2}{\sqrt{(g_2, g_2)}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{3}{2} (t^2 - \frac{1}{3}),$

$\frac{g_3}{\sqrt{(g_3, g_3)}} = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \frac{5}{2} (t^3 - \frac{3}{5} t)$. これらは $\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$ と一致する。

注 $g_4 = t^4 + d_2 t^2 + d_0 \perp t^2, t^0$ についても計算すると

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{7} + \frac{2}{5} d_2 + \frac{2}{3} d_0 = 0 \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{3} d_2 + \frac{2}{1} d_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} d_0 \\ d_2 \end{pmatrix} = \frac{45}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{45}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{21} - \frac{1}{25} \\ \frac{1}{15} - \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{35} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$

$\therefore g_4 = t^4 - \frac{6}{7} t^2 + \frac{3}{35}$. P_4 は、更に $P_4(1) = 1$ で定まる.

16-2 P_nが偶関数(奇関数)ならtP_nは奇関数(偶関数)だから、

$tP_n = c_{n+1}P_{n+1} + \cdots + c_0 P_0$ とすると $c_n = c_{n-2} = c_{n-4} = \cdots = 0$, t^{n+1}の係数より

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = c_{n+1} \cdot \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} \quad \therefore\ c_{n+1} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2n+1}$$

一方 $(tP_n, P_k) = c_k (P_k, P_k) = \frac{2c_k}{2k+1}$, $\frac{2c_{n+1}}{2n+3} = \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$ より

$$(tP_n, P_{n+1}) = \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \quad \therefore\ (P_{n-1}, tP_n) = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\therefore\ c_{n-1} = \frac{2n-1}{2}(tP_n, P_{n-1}) = \frac{2n-1}{2}\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

更に, $k < n-1$ のとき tP_kは$(n-1)$次以下でP_nと直交するから

$$(tP_n, P_k) = (P_n, tP_k) = 0 \quad \therefore\ c_k = 0.$$

$$\therefore\quad tP_n = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}.$$

16-3 (1) $\left[(1-t^2)\frac{d}{dt} - (n+1)t\right]P_n = -(n+1)P_{n+1}$.

$Lf = \frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d}{dt}f\right)$ について $Lf = -n(n+1)f$ の解は2次元で、

そのうち$P_n(t)$は$P_n(1)=1$をみたすn次多項式解として定まる

ことに注意する. (1)の左辺は$(n+1)$次式で、$t=1$で$-(n+1)$

となるから、あとは $L(左辺) = -(n+1)(n+2)(左辺)$ を示せばよい.

16-3(1) ㋐ $L(\text{左辺}) = \frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}-(n+1)t\right]P_n\right)$

$$= \frac{d}{dt}\left((1-t^2)\left(LP_n - \frac{d}{dt}(n+1)tP_n\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(1-t^2)\left(-n(n+1)P_n - (n+1)P_n - (n+1)t\frac{dP_n}{dt}\right)$$

$$= -(n+1)^2\frac{d}{dt}\left((1-t^2)P_n\right) - (n+1)\frac{d}{dt}\left(t(1-t^2)\frac{dP_n}{dt}\right)$$

$$= -(n+1)^2\left((1-t^2)\frac{dP_n}{dt} - 2tP_n\right) - (n+1)(1-t^2)\frac{dP_n}{dt} - (n+1)t\underbrace{\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dP_n}{dt}\right)}_{=-n(n+1)P_n}$$

$$= -(n+1)(n+2)(1-t^2)\frac{dP_n}{dt} + \left(2(n+1)^2 + n(n+1)^2\right)tP_n$$

$$= -(n+1)(n+2)\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}-(n+1)t\right]P_n$$

(2) (1): $\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}-(n+1)t\right]P_n = -(n+1)P_{n+1}$, および

16-2: $tP_n = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1} + \frac{n}{2n-1}P_{n-1}$ より

$$(1-t^2)\frac{d}{dt}P_n = (n+1)\left(\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}\right) - (n+1)P_{n+1}$$

$$= (n+1)\left(\frac{-n}{2n+1}P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}\right)$$

∴ $\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}+nt\right]P_n = n(n+1)\left(\frac{-P_{n+1}}{2n+1} + \frac{P_{n-1}}{2n+1}\right)$

$$+ n\left(\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}\right)$$

$$= n\left(\frac{n+1}{2n+1} + \frac{n}{2n+1}\right)P_{n-1} = nP_{n-1}. \quad //$$

どっかの符号ヘン

$\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}+nt\right]P_n = -nP_{n-1}$

[$t=1$であわない!]

結局こっちが

+

符号直す

訂正: (2)の式は,正しくは

$$\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}+nt\right]P_n = +nP_{n-1}(t).$$

16-4 $P_n(t) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n n!}g^{(n)}(t)$, $g(t) = (t^2-1)^n$.

$g(t)$は $t=\pm 1$ で n 重根をもつ。(図①)

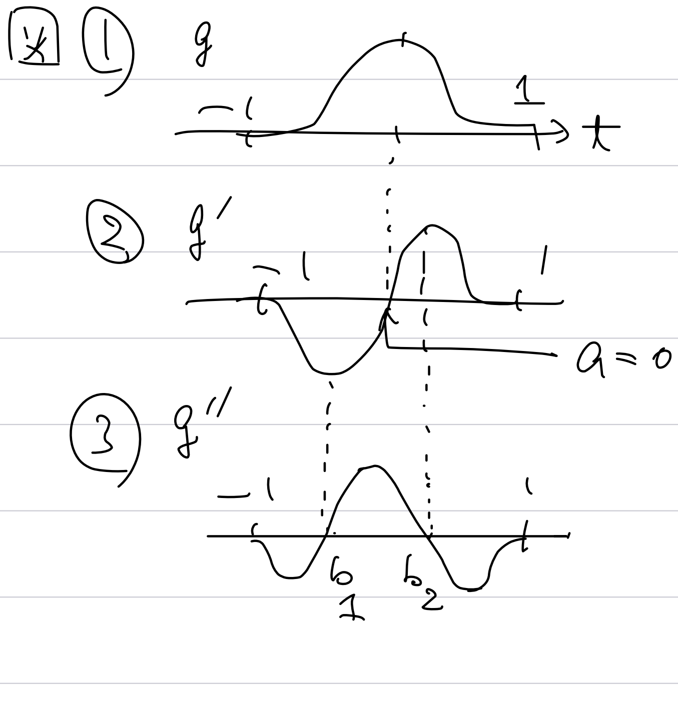
$g'(t) = 2nt(t^2-1)^{n-1}$ は $t=\pm 1$ の他に $t=0$ で 0 となるが、

ロルの定理からも $-1<a<1$ なるある a で $g'(a)=0$ は分る。②

$g''(t)$ についても、同様にロルの定理から、$t=\pm 1$ 以外に

$-1<b_1<a=0<b_2<1$ なる b_1, b_2 で $g''=0$ となる。③

以下同様に続けると、1回ビブンするごとに $-1<t<1$ における零点が増えるから、$g^{(n)}(t)$ についてはそれが n コとなる。//



16-5 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ のとき、 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}D$、但し $D = \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ を示す。

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi\,dr + r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi\,dr + r\cos\theta\sin\varphi\,d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi \\ \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & +r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}$$ とすると

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]$$ において

$$\parallel$$

$$A\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right]$$ であるので

$$\therefore \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right] = A^{-1}\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]A^{-1}$$

$$\therefore \left[\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]A^{-1}$$

となる。(斎藤「線型代数」§17.3参照) ア

〈そのままだと長さ≠1だった〉

(ア) $A = R\begin{bmatrix} 1 & & \\ & r & \\ & & r\sin\theta \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\cancel{\sin\theta}\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & +\cancel{\sin\theta}\cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ は直交行列故

(イ) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)A^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^{-1} & \\ & & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix} {}^tR$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^{-1} & \\ & & \frac{1}{r\sin\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_r \\ \partial_\theta \\ \partial_\varphi\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & +(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_r \\ r^{-1}\partial_\theta \\ r^{-1}\partial_\varphi\end{bmatrix}$$

(ウ)
$$\begin{cases} \partial_x^2 = \left(\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r + \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r} - (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2 \\ \partial_y^2 = \left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r + \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r} + (\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2 \\ \partial_z^2 = \left(\cos\theta\,\partial_r - \sin\theta\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 \end{cases} \qquad \left(\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}\ \text{etc}\right)$$

・$\partial_x^2 = (\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r)^2 + \left(\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 + \left((\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2$

$+(\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r)\left(\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right) - (\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r)\left((\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right) - \left(\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right)\left((\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)$

$+\left(\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right)(\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r) - \left((\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)(\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r) - \left((\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)\left(\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right)$

$= (\sin\theta\cos\varphi)^2\partial_r^2 + (\cos\theta\cos\varphi)^2 r^{-2}\partial_\theta^2 + (\sin\theta)^{-2}\sin^2\varphi\, r^{-2}\partial_\varphi^2$

$-\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\, r^{-2}\partial_\theta + (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\, r^{-2}\partial_\varphi$

$+\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r - \frac{\partial_\theta}{r^2}\right) - \sin\theta\cos\varphi(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\partial_r - \frac{\partial_\varphi}{r^2}\right) - \cos\theta\cos\varphi(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\frac{\partial_\theta}{r}$

$+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}$

$+\cos\theta\cos\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r + \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_r}{r}\right) - \cancel{(\sin\theta)^{-1}}\sin\varphi\left(\cancel{\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\partial_r - \cancel{\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial_r}{r}\right) - (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\left(\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\frac{\partial_\varphi}{r} - \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right)$

(ア)

(7) $\partial_y^2 = \left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r + \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r} + (\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2$

$= \left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r\right)^2 + \left(\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 + \left((\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2$

$+\left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r\right)\left(\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right) + \left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r\right)\left((\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right) + \left(\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right)\left((\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)$

$+\left(\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right)\left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r\right) + \left((\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)\left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r\right) + \left((\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\right)\left(\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\right)$

$= +(\sin\theta\sin\varphi)^2\partial_r^2 + \cos\theta\sin\varphi\left(\cos\theta\sin\varphi\left(\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 - \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right) + (\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left((\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2 - (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}\right)$

$+\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\sin\varphi\left(\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r - \frac{\partial_\theta}{r^2}\right) + \cancel{\sin\theta}\sin\varphi\,\cancel{(\sin\theta)^{-1}}\cos\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi\right) + \cos\theta\sin\varphi(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\frac{\partial_\theta}{r} - \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial_\varphi}{r^2}\right)$

$+\cos\theta\sin\varphi\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r + \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_r}{r}\right) + \cancel{(\sin\theta)^{-1}}\cos\varphi\left(\cancel{\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\partial_r + \cancel{\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial_r}{r}\right) + (\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\frac{\partial_\varphi}{r} + \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right)$

$\partial_z^2 = \left(\cos\theta\,\partial_r - \sin\theta\frac{\partial_\theta}{r}\right)\left(\cos\theta\,\partial_r - \sin\theta\frac{\partial_\theta}{r}\right)$

$= \cos^2\theta\,\partial_r^2 - \cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial_r}{r}\partial_\theta - \frac{\partial_\theta}{r^2}\right) - \sin\theta\frac{\partial_\theta}{r}\cos\theta\,\partial_r + \sin\theta\frac{\partial_\theta}{r}\sin\theta\frac{\partial_\theta}{r}$

$= \cos^2\theta\,\partial_r^2 - \cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial_r}{r}\partial_\theta - \frac{\partial_\theta}{r^2}\right) - \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r - \sin\theta\frac{1}{r}\partial_r\right) + \sin\theta\left(\sin\theta\left(\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 + \cos\theta\frac{\partial_\theta}{r^2}\right)$

(7)

(ア) ∵

$$\Delta = (\sin\theta\cos\varphi)^2\partial_r^2 + (\cos\theta\cos\varphi)^2 r^{-2}\partial_\theta^2 + (\sin\theta)^{-2}\sin^2\varphi\, r^{-2}\partial_\varphi^2 - \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\, r^{-2}\partial_\theta + (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\, r^{-2}\partial_\varphi$$

$$+\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r - \frac{\partial_\theta}{r^2}\right) - \cancel{\sin\theta}\cos\varphi(\cancel{\sin\theta})^{-1}\sin\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\partial_r - \frac{\partial_\varphi}{r^2}\right) - \cos\theta\cos\varphi(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\frac{\partial_\theta}{r} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}$$

$$+\cos\theta\cos\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r + \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_r}{r}\right) - (\cancel{\sin\theta})^{-1}\sin\varphi\left(\cancel{\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\partial_r - \cancel{\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial_r}{r}\right) - (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\left(\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\frac{\partial_\varphi}{r} - \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right)$$

$$+(\sin\theta\sin\varphi)^2\partial_r^2 + \cos\theta\sin\varphi\times\left(\cos\theta\sin\varphi\left(\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 - \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right) + (\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left((\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2 - (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}\right)$$

$$+\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\sin\varphi\left(\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r - \frac{\partial_\theta}{r^2}\right) + \cancel{\sin\theta}\sin\varphi(\cancel{\sin\theta})^{-1}\cos\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right) + \cos\theta\sin\varphi(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\frac{\partial_\theta}{r} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}\right)$$

$$+\cos\theta\sin\varphi\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r + \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_r}{r}\right) + (\cancel{\sin\theta})^{-1}\cos\varphi\left(\cancel{\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\partial_r + \cancel{\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial_r}{r}\right) + (\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\frac{\partial_\varphi}{r} + \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right)$$

$$+\cos^2\theta\,\partial_r^2 - \cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial_r}{r}\partial_\theta - \frac{\partial_\theta}{r^2}\right) - \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial_\theta}{r}\partial_r - \sin\theta\frac{1}{r}\partial_r\right) + \sin\theta\left(\sin\theta\left(\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 + \cos\theta\frac{\partial_\theta}{r^2}\right)$$

$$=\partial_r^2 + \left((\cos\theta\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi + (\cos\theta\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi + \sin^2\theta\right)\frac{\partial_r}{r}$$

$$+(\cos\theta\cos\varphi)^2 r^{-2}\partial_\theta^2 + (\sin\theta)^{-2}\sin^2\varphi\, r^{-2}\partial_\varphi^2 - \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\, r^{-2}\partial_\theta + (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\, r^{-2}\partial_\varphi$$

$$-\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2} + \cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2} - \cos\theta\cos\varphi(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\frac{\partial_\theta}{r} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2} - (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\left(\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\frac{\partial_\varphi}{r} - \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right)$$

$$+\cos\theta\sin\varphi\times\left(\cos\theta\sin\varphi\left(\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 - \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right) + (\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left((\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2 - (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}\right)$$

$$-\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2} - \sin\varphi\cos\varphi\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \cos\theta\sin\varphi(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\frac{\partial_\theta}{r} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}\right) + (\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\frac{\partial_\varphi}{r} + \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right)$$

$$+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial_\theta}{r^2} + \sin\theta\left(\sin\theta\left(\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 + \cos\theta\frac{\partial_\theta}{r^2}\right)$$

$$=\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}D,$$

(ア)

$$\left[\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}D \ ; \ D \overset{?}{=} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\ \right]$$

$\oslash$

$$\frac{D}{r^2} = +(\cos\theta\cos\varphi)^2 r^{-2}\partial_\theta^2 + (\sin\theta)^{-2}\sin^2\varphi\, r^{-2}\partial_\varphi^2 \underbrace{- \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\, r^{-2}\partial_\theta}_{1} + \cancel{(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\, r^{-2}\partial_\varphi}$$

$$\underbrace{-\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{2} + \cancel{\cos\varphi\sin\varphi}\frac{\partial_\varphi}{r^2} - \cancel{\cos\theta\cos\varphi(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\frac{\partial_\theta}{r}} + \cancel{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}} - (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\left(\cancel{\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\frac{\partial_\varphi}{r}} - \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right) \ 3$$

$$+\cos\theta\sin\varphi\times\left(\cos\theta\sin\varphi\left(\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 \underbrace{- \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{4}\right) \quad +(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\,(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2 - \cancel{(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}}$$

$$\underbrace{-\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{5} - \sin\varphi\,\cancel{\cos\varphi}\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \cos\theta\sin\varphi\left(\cancel{(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r}\frac{\partial_\theta}{r}} - \cancel{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}}\right)$$

$$+(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\left(\cancel{\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r}\frac{\partial_\varphi}{r}} + \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}\right) \ 8$$

$$\underbrace{+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{6} + \sin\theta\left(\sin\theta\left(\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 \underbrace{+ \cos\theta\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{7}\right)$$

$$= \left((\cos\theta\cos\varphi)^2 + (\cos\theta\sin\varphi)^2 + \sin^2\theta\right)\left(\frac{\partial_\theta}{r}\right)^2 + \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2$$

$$\underbrace{-\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\, r^{-2}\partial_\theta}_{1} \underbrace{- \sin\theta\cos\varphi\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{2} + \underbrace{\frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{3} \underbrace{- \cos\theta\sin\varphi\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{4}$$

$$\underbrace{-\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{5} \underbrace{+ \cos\theta\sin\theta\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{6} \underbrace{+ \sin\theta\cos\theta\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{7} + \underbrace{\frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial_\theta}{r^2}}_{8}$$

$$\cancel{+(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\, r^{-2}\partial_\varphi} + \cancel{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}} - \cancel{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}} - \cancel{(\sin\theta)^{-1}\cos\varphi(\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\frac{\partial_\varphi}{r^2}}$$

$$= \frac{\partial_\theta^2}{r^2} + \underbrace{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial_\theta}{r}}_{3+8} + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial_\varphi}{r}\right)^2$$

$$+\left(\underbrace{-\sin\theta\cos\theta}_{1+5} \underbrace{- \sin\theta\cos\theta}_{2+4} + \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{7} + \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{6}\right)\frac{\partial_\theta}{r^2}$$

OK

17章

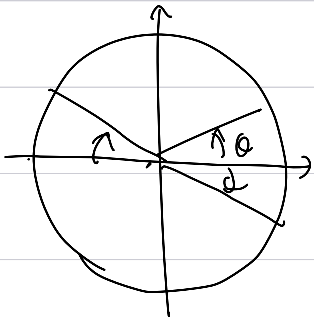
問17.1.1

$$J_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t\sin\theta - n\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$$ ∵ $t\sin\theta - n\theta$ は θ の奇関数で、被積分関数は θ の偶関数。

$$= \int_{0}^{\pi} \cos(t\sin\theta - n\theta)\frac{d\theta}{\pi}$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left(\cos(t\sin\theta)\cos n\theta + \sin(t\sin\theta)\sin n\theta\right)\frac{d\theta}{\pi} \quad \text{—①}$$

$\theta \to \pi - \theta$ とすると、$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$,



$$\begin{cases} \cos n(\pi-\theta) = (-1)^n \cos n\theta \\ \sin n(\pi-\theta) = (-1)^{n+1}\sin n\theta \end{cases}$$ より

$$① = (-1)^n \int_{0}^{\pi} \left(\cos(t\sin\theta)\cos n\theta - \sin(t\sin\theta)\sin n\theta\right)\frac{d\theta}{\pi} \quad \text{—②}$$

$$\therefore J_n(t) = \frac{①+②}{2} = \begin{cases} \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta)\cos n\theta \frac{d\theta}{\pi} & (n:\text{偶数}) \\ \int_0^{\pi} \sin(t\sin\theta)\sin n\theta \frac{d\theta}{\pi} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

この被積分関数はどちらも $\theta \to \pi - \theta$ で不変で、$\int_0^{\pi} = 2\int_0^{\pi/2}$,

すなわち

$$J_n(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(t\sin\theta)\cos n\theta \frac{d\theta}{\pi} & (n:\text{偶数}) \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(t\sin\theta)\sin n\theta \frac{d\theta}{\pi} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

となる。//

問17.2.1 (17.10)と定理17.2.1より

$$\varphi(\tau) = \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n} J_n(n\varepsilon) \sin(n\tau)$$ である。

一方、$J_n(t) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(t/2)^{n+2s}}{s!(s+n)!}$ より

$$\frac{\varepsilon}{n} J_n(n\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{n}\left\{ \frac{(n\varepsilon/2)^n}{n!} + \frac{(n\varepsilon/2)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(n\varepsilon/2)^{n+4}}{2!(n+2)!} + \cdots \right\}$$

$$\therefore \varphi(\tau) = \tau + \frac{2}{1}\left\{ (\varepsilon/2) + \frac{(\varepsilon/2)^3}{2} + \frac{(\varepsilon/2)^5}{2\cdot 3!} + \frac{(\varepsilon/2)^7}{3!\cdot 4!} + \cdots \right\} \sin\tau$$

$$+ \frac{2}{2}\left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{3!} + \frac{\varepsilon^6}{2\cdot 4!} + \frac{\varepsilon^8}{3!\,5!} + \cdots \right\} \sin 2\tau$$

$$+ \frac{2}{3}\left\{ \frac{(3\varepsilon/2)^3}{3!} + \frac{(3\varepsilon/2)^5}{1\cdot 4!} + \frac{(3\varepsilon/2)^7}{2\cdot 5!} + \cdots \right\} \sin 3\tau$$

$$+ \frac{2}{4}\left\{ \frac{(4\varepsilon/2)^4}{4!} + \frac{(4\varepsilon/2)^6}{1\cdot 5!} + \frac{(4\varepsilon/2)^8}{2\cdot 6!} + \cdots \right\} \sin 4\tau$$

$$+ \cdots$$

$\frac{(3/2)^2}{6} = \frac{3}{8}$

$$= \tau + \varepsilon \sin\tau + \frac{\varepsilon^2 \sin 2\tau}{2} + \varepsilon^3\left(\frac{\sin\tau}{2^3} + \frac{3}{8}\sin 3\tau \right)$$

$$+ \varepsilon^4\left(\frac{\sin 2\tau}{6} + \frac{\sin 4\tau}{6\cdot 2^5} \right)$$

$$+ \varepsilon^5\left(\frac{\sin\tau}{6\cdot 2^5} + \frac{3^4 \sin 3\tau}{2^4\, 4!} + \frac{5^4 \sin 5\tau}{2^4\cdot 5!} \right)$$

$$+ \cdots$$

//

問17.3.1 (1) $J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} = \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}$ とすれば

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left| \frac{2^{-2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \Big/ \frac{2^{-2(k+1)}}{(k+1)!\,\Gamma(\nu+k+2)} \right|$$

$$= |2(k+1)(\nu+k+1)| \to \infty \quad (k \to \infty)$$

より、t^2について収束半径は∞で、従ってtについてもそうである。

(2) (1)より、項別に微分してよいから

$$t^{-\nu}\frac{d}{dt}(t^{\nu}J_\nu) = t^{-\nu}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+2\nu}/2^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2(\cancel{k+\nu}) \frac{(-1)^k (t^{2k+\nu-1})/2^{2k+\nu}}{k!\cdot\cancel{(\nu+k)}\Gamma(\nu+k)} = J_{\nu-1}(t),$$

$$t^{\nu}\frac{d}{dt}(t^{-\nu}J_\nu) = t^{\nu}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}/2^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2k \frac{(-1)^k t^{2k-1+\nu}/2^{2k+\nu}}{k!\cdot\Gamma(\nu+k+1)}$$

$k=l+1$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} t^{2l+1+\nu}/2^{2l+1+\nu}}{l!\,\Gamma(\nu+l+2)} = -J_{\nu+1}(t).$$

※

※問題直す！
[cf. Prop 17.1.2]

問17.3.2(1) $J_{1/2}(t)=\sqrt{\dfrac{2t}{\pi}}\dfrac{\sin t}{t}$, $J_{-1/2}(t)=\sqrt{\dfrac{2t}{\pi}}\dfrac{\cos t}{t}$ を示すため、まず

$R(t)=\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}},\ \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} \Rightarrow \left[\left(t\dfrac{d}{dt}\right)^2+\left(t^2-\dfrac{1}{4}\right)\right]R=0$ を示す;

$\left(=\left[t^2\left(\dfrac{d}{dt}\right)^2+t\dfrac{d}{dt}+t^2-\dfrac{1}{4}\right]R.\right)$

$tR'=$

$-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\begin{cases}\sin t\\ \cos t\end{cases}\pm\sqrt{\dfrac{2t}{\pi}}\begin{cases}t\cos t\\ -t\sin t\end{cases}$

$\left(t\dfrac{d}{dt}\right)^2R=$

$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\begin{cases}\sin t\\ \cos t\end{cases}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\begin{cases}t\cos t\\ -t\sin t\end{cases}$

$$\begin{cases}\cdot\ t\left(\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)'=-\dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\cos t,\\[2mm] t\left(t\left(\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)'\right)'=\dfrac{\sin t}{4\sqrt{t}}-t\sqrt{t}\sin t=\left(\dfrac{1}{4}-t^2\right)\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}.\\[2mm] \cdot\ t\left(\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)'=-\dfrac{\cos t}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\sin t\\[2mm] t\left(t\left(\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)'\right)'=\dfrac{\cos t}{4\sqrt{t}}-t\sqrt{t}\cos t=\left(\dfrac{1}{4}-t^2\right)\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}.\ //\end{cases}$$

・一方、$J_\nu(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k(t/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$ は、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ と $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ より

$$\begin{cases}J_{1/2}(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!}\cdot\dfrac{(t/2)^{2k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+\frac{3}{2})}=\dfrac{(t/2)^{1/2}}{\Gamma(3/2)}-\dfrac{(t/2)^{2+\frac{1}{2}}}{\Gamma(5/2)}+\cdots\\[2mm] \qquad=\dfrac{\sqrt{t/2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}-\dfrac{\sqrt{t/2}\cdot(t/2)^2}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}+\cdots=\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\left(t-\dfrac{t^3}{6}+\cdots\right),\\[2mm] J_{-1/2}(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k(t/2)^{2k-1/2}}{k!\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}=\dfrac{(t/2)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}-\dfrac{(t/2)^{3/2}}{\sqrt{\pi}/2}+\cdots\\[2mm] \qquad=\dfrac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{t}-\dfrac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}}\cdot\dfrac{t}{2}+\cdots=\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\left(1-\dfrac{t^2}{2}+\cdots\right).\end{cases}$$

これらは $\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\sin t$, $\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\cos t$ と同じ初項をもち、同じ方程式 $\left[\left(t\dfrac{d}{dt}\right)^2+\left(t^2-\dfrac{1}{4}\right)\right]R=0$ をみたすから、それぞれ一致している。//

問17.3.2 (2). $J_{3/2} = -t^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}\right)$, $J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\,\frac{\sin t}{t}$

$$= -t^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin t}{t}\right) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\left(-\frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t^2}\right)$$

∴ $$J_{5/2} = -t^{\frac{3}{2}}\frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,t^{\frac{3}{2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t}{t^2} - \frac{\sin t}{t^3}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,t^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{\sin t}{t^2} - 2\frac{\cos t}{t^3} - \frac{\cos t}{t^3} + 3\frac{\sin t}{t^4}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\left(\left(\frac{3}{t^3} - \frac{1}{t}\right)\sin t - \frac{3}{t^2}\cos t\right) \quad //$$

. $J_{-3/2} = t^{1/2}\frac{d}{dt}\left(t^{-1/2}J_{-1/2}\right)$, $J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\,\frac{\cos t}{t}$

$$= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t}{t}\right) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\left(\frac{-\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t^2}\right)$$

∴ $$J_{-5/2} = t^{3/2}\frac{d}{dt}\left(t^{-3/2}J_{-3/2}\right) = \sqrt{\frac{2t^3}{\pi}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{-\sin t}{t^2} - \frac{\cos t}{t^3}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,t^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{\cos t}{t^2} + 2\frac{\sin t}{t^3} + \frac{\sin t}{t^3} - 3\frac{\cos t}{t^4}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\left(-\left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^3}\right)\cos t + \frac{3}{t^2}\sin t\right) \quad //$$

一般に

解き直す→

$$J_{n+1/2} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\cdot t^n\cdot\left(-t^{-1}\frac{d}{dt}\right)^n\left(\frac{\sin t}{t}\right)$$

であることを示そう。単にくり返せばよく、

$$J_{3/2} = -\sqrt{t}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\Rightarrow J_{5/2} = +t^{3/2}\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\Rightarrow J_{7/2} = -t^{5/2}\frac{d}{dt}\left(t^{-5/2}\left(t^{3/2}\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t}\right)\right)\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$= -t^{5/2}\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\right)\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$= t^{7/2}\left(-t^{-1}\frac{d}{dt}\right)^3\left(\frac{\sin t}{t}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \ \ldots$$

以下同様である。//

問17.4.1 $f(t)=\sqrt{t}\,J_\nu(t)$ とすれば

$$\left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^2+t^2-\nu^2\right]J_\nu=0 \quad \text{i.e.}\ t^2J_\nu''+tJ_\nu'+(t^2-\nu^2)J_\nu=0.$$

$$\Rightarrow f''=\left(\sqrt{t}'J_\nu+\sqrt{t}J_\nu'\right)'$$

$$=\sqrt{t}''J_\nu+2\sqrt{t}'J_\nu'+\sqrt{t}J_\nu''$$

$$=-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}J_\nu+\cancel{t^{-\frac{1}{2}}J_\nu'}+t^{\frac{1}{2}}\left(\cancel{-\frac{1}{t}J_\nu'}-\frac{t^2-\nu^2}{t^2}J_\nu\right)$$

$$=t^{-3/2}\left(-\frac{1}{4}-t^2+\nu^2\right)\frac{f(t)}{\sqrt{t}}$$

$$=\left(-1+\frac{\nu^2-1/4}{t^2}\right)f(t). \quad //$$

章末17

17.1

$$\iint_D u(u_{xx}+u_{yy})\,dxdy = \int_C u(u_x dy - u_y dx) - \iint_D (u_x^2+u_y^2)\,dxdy$$ を示す.

(1) $D=[a,b]\times[c,d]=I\times J$ のとき

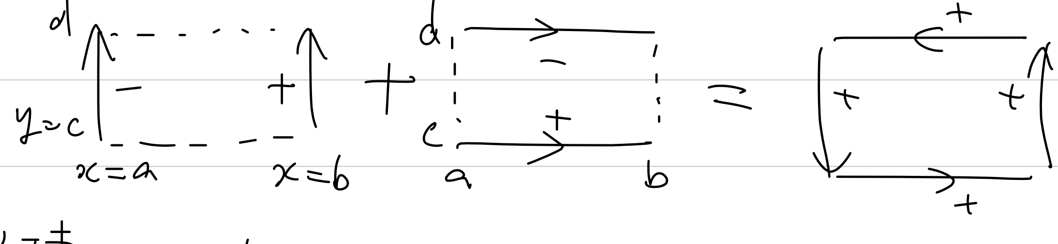
$$\text{左辺} = \int_c^d dy \int_a^b u u_{xx}\,dx + \int_a^b dx \int_c^d u u_{yy}\,dy$$

$$= \int_c^d dy \int_a^b \left((u u_x)_x - u_x^2\right) dx + \int_a^b dx \int_c^d \left((u u_y)_y - u_y^2\right) dy$$

$$= \int_c^d \left[u u_x\right]_{x=a}^{b} dy + \int_a^b \left[u u_y\right]_{y=c}^{d} dx - \iint_{I\times J} (u_x^2+u_y^2)\,dxdy$$

$$= \int_c^d \left[u u_x\right]_{x=a}^{b} dy + \int_a^b \left[-u u_y\right]_{y=d}^{c} dx - \iint_{I\times J} (u_x^2+u_y^2)\,dxdy$$

ここで第1項＋第2項は, $u(u_x dy - u_y dx)$ を, 積分路



で積分したものとなる。

∵ $$\text{左辺} = \int_C u(u_x dy - u_y dx) - \iint_{I\times J} (u_x^2+u_y^2)\,dxdy$$

なので, 示された. //

(2) 領域を小長方形で分割して近似し考えても良い(後述の注)
が、極座標変換で直接示してみよう。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \text{のとき,} \quad \begin{cases} dxdy = r\,dr\,d\theta \\ \partial_x^2 + \partial_y^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{cases}$$

(∵)

$$\text{左辺} = \iint_{x^2+y^2\le R^2} u(u_{xx}+u_{yy})\,dxdy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} u\left(u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{R} \left[r\left((u u_r)_r - u_r^2\right) + \left(\frac{u^2}{2}\right)_r - u_{\theta\theta}\left(\left(\frac{u}{r}\right)_r - \frac{u_r}{r}\right) \right\} dr \quad \text{—①}$$

また
$$\begin{cases} dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta \\ dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta \end{cases} \text{より,} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \end{cases}$$
となる。

(∵) $[dx, dy] = [\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta,\ \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta]$

$$= [dr, d\theta]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

ならば

$$E = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}(dx, dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}[dr\ d\theta]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

より,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \partial_r \\ r^{-1}\partial_\theta \end{bmatrix} \quad // \end{cases}$$

すなわち,
$$\begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_r u \\ \frac{1}{r}\partial_\theta u \end{bmatrix}$$
であり, ア

$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & c \\ -c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

よって, $U_x dy - U_y dx = \begin{bmatrix} U_x & U_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$

$$= (U_r, r^{-1}U_\theta)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dr \\ rd\theta \end{bmatrix}$$

$$= (U_r, r^{-1}U_\theta)\begin{bmatrix} rd\theta \\ -dr \end{bmatrix} = U_r r d\theta - \frac{U_\theta}{r}dr.$$

ここで, 境界 $x^2+y^2=R^2$: 一定 の上では, $dr=0$ となることに注意. また

$$U_x^2+U_y^2 = \left(\cos\theta\frac{\partial U}{\partial r} - \sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r} + \cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)^2 = U_r^2 + \frac{1}{r^2}U_\theta^2$$ である。

∴

$$\text{右辺} = R\int_{\theta=0}^{2\pi} U\cdot U_r\, d\theta - \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(U_r^2+\frac{1}{r^2}U_\theta^2\right) r\,dr\,d\theta. \quad \text{—②}$$

あとは, ①=② を確かめればよい。

$$\int_0^{2\pi} d\theta\int_{r=0}^{R} rU\cdot U_{rr}\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{R}\left((rU\cdot U_r)' - (rU)'U_r\right)dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta\left(RUU_r - \int_{r=0}^{R}(rU_r^2+UU_r)\,dr\right)$$

∵

$$\int_0^{2\pi} d\theta\int_{r=0}^{R}(rU\cdot U_{rr}+UU_r)\,dr = \int d\theta\left(RUU_r - \int_0^{R} rU_r^2\,dr\right),$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\frac{UU_{\theta\theta}}{r}\,dr\,d\theta = \int_{r=0}^{R}\frac{dr}{r}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left((UU_\theta)' - U_\theta^2\right)d\theta = \int_0^{R}\int_0^{2\pi} -U_\theta^2\frac{dr}{r}\,d\theta$$

∴ +)

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} U\left(U_{rr}+\frac{U_r}{r}+\frac{U_{\theta\theta}}{r^2}\right) r\,dr\,d\theta = R\int_{\theta=0}^{2\pi} U\cdot U_r\,d\theta - \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(U_r^2+\frac{1}{r^2}U_\theta^2\right) r\,dr\,d\theta$$

すなわち, ①=② である。//

⑦ 注 領域D(円板)を小長方形で分割して考えると、(1)から(2)を導くことができる。以下に注意する。

i) 領域Dが $D=D_1\cup D_2$ $(D_1\cap D_2=\phi)$ ならば、重積分の項については、たとえば左辺について

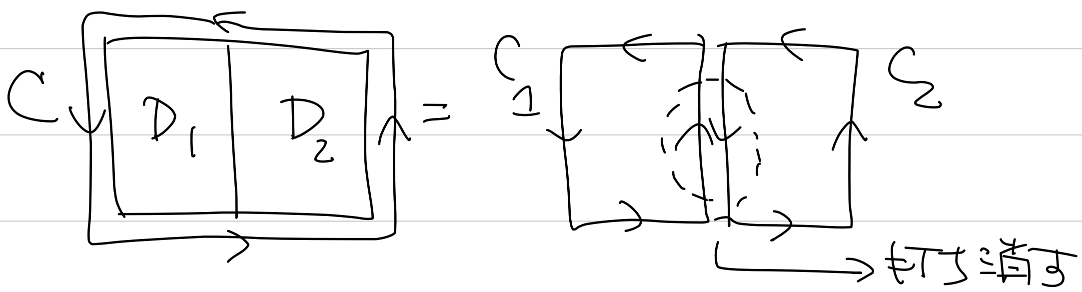
$$\iint_D U\cdot\Delta U\,dxdy=\iint_{D_1}U\cdot\Delta U\,dxdy+\iint_{D_2}U\cdot\Delta U\,dxdy$$

である。右辺第2項についても同様である。

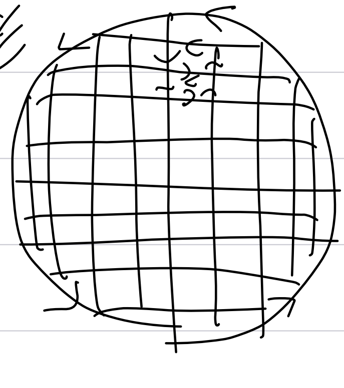
ii) このとき、C_1とC_2をD_1とD_2の境界とすると、次も成り立つ。

$$\int_C U(U_x dy-U_y dx)=\int_{C_1}U(U_x dy-U_y dx)+\int_{C_2}U(U_x dy-U_y dx)$$

ここで、同じ積分路をC_1とC_2で逆向きに積分するとその部分は互いに打ち消しあうことを用いている。(下図)



i) ii)から、長方形をくみ合わせて得られる領域Dについては、(1)より問題の等式が従う。(2)においては、Dは円板であるが、右のように小長方形の合併で近似して考えることより、やはり(1)より従うことになる。



17.1 (3) $\iint_D u(u_{xx}+u_{yy})\,dxdy = \int_C u(u_x dy - u_y dx)$
$- \iint_D (u_x^2+u_y^2)\,dxdy$

において $\Delta u = \lambda u$, $u|_C = 0$ ならば

$$\begin{cases} 左辺 = \lambda \iint_D u^2 dxdy \\ 右辺 = 0 - \iint_D (u_x^2+u_y^2)\,dxdy \end{cases}$$

$\therefore$ $u^2, u_x^2, u_y^2 \geq 0$ なので, $\lambda \leq 0$ である. //

17-2 $J_{n+1/2}(t) = \sqrt{\dfrac{2t}{\pi}} \cdot \dfrac{1}{2i^n} \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{ist} P_n(s)\,ds$ を示す。

(1) 右辺 ($R(t)$ とおく) が $J_{n+1/2}$ の方程式をみたすことを示す。

$P_n(t)$ は, $(1-t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0$ をみたしていた。

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{ds}(1-s^2)\frac{d}{ds}P_n = -n(n+1)P_n.$$

$\dfrac{1}{\sqrt{t}}R(t) = f(t)$ とすれば

$$0 = \left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 + t^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]R = \left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 + t^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right](\sqrt{t}f)$$

ここで

$t(t(\sqrt{t}f)')'$

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^2(\sqrt{t}f) = t\left(\left(t\frac{d}{dt}\sqrt{t}\right)f + \sqrt{t}\left(t\frac{df}{dt}\right)\right)'$$

$$= \left(t\frac{d}{dt}\right)^2\sqrt{t}\,f + \left(t\frac{d}{dt}\sqrt{t}\right)(tf') + \left(t\frac{d}{dt}\sqrt{t}\right)(tf') + \sqrt{t}\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 f$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{t}f + 2\cdot\frac{\sqrt{t}}{2}\cdot tf' + \sqrt{t}\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 f = \sqrt{t}\left[\frac{1}{4} + \left(t\frac{d}{dt}\right) + \left(t\frac{d}{dt}\right)^2\right]f$$

$$= \sqrt{t}\left[t^2\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2t\frac{d}{dt} + \frac{1}{4}\right]f$$

$$= \sqrt{t}\left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 + \left(t\frac{d}{dt}\right) + \frac{1}{4}\right]f = \sqrt{t}\left(t\frac{d}{dt} + \frac{1}{2}\right)^2 f$$

そこで

$f(t) = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{ist}P_n(s)\,ds$ が $\left(t\dfrac{d}{dt}+\dfrac{1}{2}\right)^2 f = \left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2 - t^2\right)f$

ならよい。 ⑦

17-2 (1) つづき

㋐ $$\frac{d}{ds}(1-s^2)\frac{d}{ds}P_n = -n(n+1)P_n.$$

$$\Leftrightarrow (1-s^2)P_n'' - 2sP_n' + n(n+1)P_n = 0$$ であった。

∵ $$\int_{-1}^{1} e^{ist}\left[\frac{d}{ds}(1-s^2)\frac{d}{ds}P_n\right](s) = -n(n+1)\int_{-1}^{1} e^{ist}P_n(s)\,ds \quad (☆)$$

一方、部分積分により

$$(☆の左辺) = -\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{ds}e^{ist}\right)\cdot(1-s^2)\frac{dP_n}{ds}ds$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{d}{ds}\left(\left(\frac{d}{ds}e^{ist}\right)\cdot(1-s^2)\right)\cdot P_n(s)\,ds = \int_{-1}^{1}\frac{d}{ds}\left(it\,e^{ist}(1-s^2)\right)P_n(s)\,ds$$

$$= \int_{-1}^{1}\left((it)^2 e^{ist}(1-s^2) - 2s\,it\,e^{ist}\right)P_n(s)\,ds$$

$$= -t^2\int_{-1}^{1} e^{ist}P_n\,ds + t^2\int_{-1}^{1} e^{ist}s^2P_n(s) - 2it\int_{-1}^{1} e^{ist}sP_n(s)\,ds$$

$$= -t^2\int_{-1}^{1} e^{ist}P_n\,ds - t^2\left(\frac{d}{dt}\right)^2\int_{-1}^{1} e^{ist}P_n(s) - 2t\frac{d}{dt}\int_{-1}^{1} e^{ist}P_n(s)\,ds.$$

よって、$f(t) = \int_{-1}^{1} e^{ist}P_n(s)\,ds$ は以下をみたす。

$$\left[t^2 + t^2\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2t\frac{d}{dt} - n(n+1)\right]f = 0 \quad (∵ \Leftrightarrow ☆)$$

$$= \left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 + \left(t\frac{d}{dt}\right) + t^2 - n(n+1)\right]f$$

$$= \left[\left(t\frac{d}{dt} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]f$$

すなわち、$\left(t\frac{d}{dt} + \frac{1}{2}\right)^2 f = \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2\right)f.$ (QED) //

(2) $J_{n+1/2}$ と $\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\frac{1}{2i^n}\int_{-1}^{1} e^{ist}P_n(s)ds$ の $t^{n+1/2}$ の係数をくらべる。

・$\int_{-1}^{1} e^{ist}P_n(s)ds$ の t^n の係数を求めるには

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_{-1}^{1} e^{ist}P_n(s)ds\Big|_{t=0}\ \text{が分かればよい。}$$

$$=\int_{-1}^{1}(is)^n e^{ist}P_n(s)ds\Big|_{t=0}=i^n\int_{-1}^{1}s^nP_n(s)ds$$

問16.2.1 より，$s^n=\frac{2^n n!^2}{(2n)!}P_n(s)+(P_{n-1}\text{以下})$，$(P_n,P_m)=\frac{2\delta_{mn}}{2n+1}$。

$\therefore$ $$\int_{-1}^{1}s^nP_n(s)ds=\frac{2^n n!^2}{(2n)!}\cdot\frac{2}{2n+1}=\frac{2^{n+1}}{(2n+1)!}(n!)^2.$$

$\left(\frac{d}{dt}\right)^n a_nt^n=n!a_n.$

$\therefore$ $\int_{-1}^{1}e^{ist}P_n(s)ds$ の t^n の係数 $=\frac{2^{n+1}}{(2n+1)!}n!\,i^n$

$\therefore$ 右辺の $t^{n+1/2}$ の係数 $=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}$ ——(∗)

・一方，$J_{n+1/2}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(t/2)^{2k+n+1/2}}{k!\,\Gamma(n+k+\frac{3}{2})}$ の $t^{n+1/2}$ の係数

$$=\frac{2^{-n-1/2}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}=\frac{2^{-n-1/2}}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{2^{n+1}\cdot2^{-n-1/2}}{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(2n)!!}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2^n n!}{(2n+1)!}$$

これは(∗)に等しい。//

17.3 $t=\frac{z}{b}$ で $dt=\frac{dz}{b}$, $b\frac{d}{dz}=\frac{d}{dt}$ であるから

$$\left[t(1-t)\left(\frac{d}{dt}\right)^2+(c-(a+b+1)t)\frac{d}{dt}-ab\right]u=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left[z\left(\frac{z}{b}-1\right)\frac{d^2}{dz^2}+\left(-c+(a+b+1)\frac{z}{b}\right)\frac{d}{dz}+a\right]u=0$$

$$\xrightarrow{b\to\infty}\quad \left[z\left(\frac{d}{dz}\right)^2+(c-z)\frac{d}{dz}-a\right]u=0.$$

(1) $F(a,c|z)=\lim_{b\to\infty}F(a,b,c|\frac{z}{b})=\lim_{b\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\, n!}\left(\frac{z}{b}\right)^n$

$\frac{(b)_n}{b^n}=\frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)}{b^n}\xrightarrow[(b\to\infty)]{}1$ より、 $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$

$$=1+\frac{a}{c}z+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2}+\cdots \quad //$$

(2) $J_\nu(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^\nu\frac{e^{-it}}{\Gamma(\nu+1)}F(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1\,|\,2it)$.

$g(t)=t^{-\nu}e^{it}J_\nu(t)$ のみたす方程式を調べる。$f(t)=e^{it}J_\nu(t)$ は、

$f'=if+e^{it}J_\nu'(t)$ ∴ $J_\nu'(t)=e^{-it}(f'-if)$

$f''=i^2f+2ie^{it}J_\nu'(t)+e^{it}J_\nu''(t)$

∴ $J_\nu''(t)=e^{-it}(f''+f-2i(f'-if))$

$=e^{-it}(f''-2if'-f)$

より、

$t^2J_\nu''+tJ_\nu'+(t^2-\nu^2)J_\nu=0$

$\Longleftrightarrow e^{-it}\left(t^2(f''-2if'-\cancel{f})+t(f'-if)+(\cancel{t^2}-\nu^2)f\right)=0$

$\Longleftrightarrow t^2f''+(-2it^2+t)f'+(-it-\nu^2)f=0$ —(*)

をみたす。$g(t)=t^{-\nu}f(t)=t^{-\nu}e^{-it}J_\nu(t)$ のみたす方程式は、 (↗)

⑦
$$\begin{cases} g'(t) = -\nu t^{-\nu-1} f(t) + t^{-\nu} f'(t) \\ g''(t) = \nu(\nu+1) t^{-\nu-2} f(t) - 2\nu t^{-\nu-1} f'(t) + t^{-\nu} f''(t) \end{cases}$$

$\because$ $t f' = t^{\nu+1} g' + \nu f$
$= t^{\nu}(t g' + \nu g)$

$\because$ $t^2 f'' = t^{\nu}(t^2 g'' + 2\nu t f') - \nu(\nu+1) f$

$= t^{\nu}(t^2 g'' + 2\nu(t g' + \nu g) - \nu(\nu+1) g)$

$= t^{\nu}(t^2 g'' + 2\nu t g' + (\nu^2 - \nu) g)$

$\because$ $(※): t^2 f'' + (-2it^2 + t) f' + (-it - \nu^2) f = 0$

$\Leftrightarrow$ $t^{\nu}\left[(t^2 g'' + 2\nu t g' + (\cancel{\nu^2} \cancel{-\nu}) g) \right.$

$\left. + (-2it + 1)(t g' \cancel{+\nu} g) + (-it \cancel{-\nu^2}) g \right] = 0$

$\Leftrightarrow$ $t^2 g'' + (-2it + (2\nu+1)) t g' + (-it - 2it\nu) g = 0$

$z = 2it$ とおくと, $' = \frac{d}{dt} = 2i\frac{d}{dz}$ であり

$\Leftrightarrow$ $z^2 \frac{d^2}{dz^2} g + (2\nu + 1 - z) z \frac{dg}{dz} - z\left(\frac{1}{2} + \nu\right) g = 0$

$\Leftrightarrow$ $z \frac{d^2 g}{dz^2} + (2\nu + 1 - z) \frac{dg}{dz} - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) g = 0.$

すなわち $t^{-\nu} e^{it} J_\nu(t)$ は $F(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu+1 \mid 2it)$ と同じ方程式をみたす.
$t \to 0$ で発散せず, $\frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ となる解は唯一であるから,

$$\left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} e^{it} J_\nu(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu+1 \,\middle|\, 2it\right)$$ が分る。

[$\because$ $J_\nu(t) = \frac{(t/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{(t/2)^{\nu+2}}{2\Gamma(\nu+2)} + \cdots$ より $\left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(t) \xrightarrow{t \to 0} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$,
また $\left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu}$(右辺) $\xrightarrow{t \to 0} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$ $\therefore$ 左辺 = 右辺. //]

(注) J_ν において $z \to iz$ として定数倍をとりかえた

$$e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu(iz) = I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu e^z}{\Gamma(\nu+1)} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu+1 \,\middle|\, -2z\right)$$

は, 変形ベッセル関数と呼ばれる.

$\boxed{\text{以上}}$