経済学のための線形代数

章末問題への答と解説

1　第 1 章

1. $\cos\theta = \frac{11}{16}$.　【解説：$\theta = \angle BAC$ とする。$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABAC\cos\theta$ より $9 = 20 - 16\cos\theta$ となる。】
2. $S = \frac{n(n+2)(n+1)^2}{4}$　【解説：i と j で和をどちらから先に計算してもいいから

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i(j+1) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

となる。】
3. $S = \{3m+1|m = 0, 1, 2, ...33\}$
4. 1300 【解説：数列の総和は $\sum_{k\in S} a_k = \sum_{i=1}^{25} a_{2i} = 4\sum_{i=1}^{25} i = 2\cdot 25\cdot 26 = 1300$ と計算できる。】
5. 偶数の場合 0 で奇数なら -1 【解説：$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = -\frac{1-(-1)^n}{2}$ と計算できる。】
6. まず $n = 1$ のとき式の左辺は $3\cdot 2 = 6$ であり、右辺も 6 であるから正しい。もし $n = i$ のときに正しいとすると

$$3\sum_{k=1}^{i} k(k+1) = i(i+1)(i+2)$$

となるとすると、$n = i+1 = I$ のとき、両辺に $3(i+1)(i+2)$ を加えると、左辺は $3\sum_{k=1}^{i+1} k(k+1) = 3\sum_{k=1}^{I} k(k+1)$ に、そして右辺は $(i+3)(i+1)(i+2) = I(I+1)(I+2)$ となる。よって $n = I$ のときも等式が成立する。数学的帰納法よりすべての n で成立する。
7. 第 1 の命題：$y^2 - x^2 = |y|^2 - |x|^2 = (|y| - |x|)(|y| + |x|)$ であり、常に $|y| + |x| \geq 0$ であるから、$y^2 \geq x^2$ と $|y| \geq |x|$ は同値である。
第 2 の命題: $2 \geq -3$ であるが、$2^2 < (-3)^2 = 9$ であるから同値でない。
8. $a_i \neq 0$ となるような項が存在するとする。このときこのような項の番号を一つ取り K とすると $a_K^2 > 0$ となる。すべての i について $a_i^2 \geq 0$ であるから $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq a_K^2 > 0$ となる。よって証明された。
9. 微分の定義より

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h} = \lim_{h\to 0}(2ax + b + h) = 2ax + b$$

よって示された。

10. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$【解説：微分の定義より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となる。】

11. $f_x=2(x+2y)$、$f_x=4(x+2y)$

2 第2章

1. $\binom{5350}{1200}$【解説：ベクトルの和は成分同士の和を行えばよいので

$$\sum_{k=1}^{100}\begin{pmatrix}3+k\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{100}(3+k)\\\sum_{k=1}^{100}12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5350\\1200\end{pmatrix}$$

となる。】

2. $x=1,y=2$【解説：各成分が一致するので

$$\begin{aligned}2+x&=5-y\\3-y+x&=2\end{aligned}$$

つまり $x=1,y=2$ となる。】

3. $y=-2$ と $z=5$【解説：平行になるときある実数 t について、$\frac{y-2}{4}=\frac{4-z}{y+3}=\frac{-12}{z+7}=t$ となる。つまり $-12=t(11-t(4t+5))$ が成立する。因数定理より $t=-1$ が解となる。よって $y=-2$ と $z=5$ となる。】

4. $x\binom{2}{3}+y\binom{3}{2}=\binom{2x+3y}{3x+2y}=\vec{0}$ のとき $x=y=0$ となるので $\binom{2}{3}$ と $\binom{3}{2}$ は線形独立となる。一方

$$-5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\vec{0}$$

であるから3つのベクトル $\binom{1}{1},\binom{2}{3}$ と $\binom{3}{2}$ は線形従属となる。

5. $x=-4,1$【解説：$\binom{x+3}{-1}\cdot\binom{x}{4}=x(x+3)-4=0$ より $x=-4,1$ となる。】

6. $(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot(z\vec{a}+w\vec{b})=xz|\vec{a}|^2+yw|\vec{b}|^2=xz+yw$ となる。よって証明された。

7. $\vec{x}=5\vec{e}_1+6\vec{e}_2+3\vec{e}_3$

8. $x=1/3,y=3,z=6$【解説：各成分が一致するので

$$\begin{aligned}x+3&=4-2x\\2y&=z\\z&=3+y\end{aligned}$$

となる。これを解いて $x=1/3,y=3,z=6$ となる。】

9. $|\vec{a}+x\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2x^2 + 2x\vec{a}\cdot\vec{b} +$ 定数なのでこの値は $x = x^* = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ で最小になる。このとき

$$(\vec{a}+x^*\vec{b})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + x^*|\vec{b}|^2 = 0$$

よって示された。

10. 方程式 $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} = \vec{0}$ を考える。第３成分 x が 0 となるので $x=0$ となる。この場合第２成分 y がゼロとなるので $y=0$ となる。よって自動的に $z=0$ となる。よって $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ は線形独立。一方任意のベクトル $\vec{d}$ について、

$$\vec{d} = d_3\vec{a} + (d_2-2d_3)\vec{b} + (d_1-3d_3-2d_2)\vec{c}$$

となる。したがって $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ は線形従属。

11. シュワルツの不等式より

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}k^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k^2}} \geq \sum_{i=1}^{n}k\cdot\frac{1}{k} = n$$

この式を２乗することで証明された。

12. $\theta = 0, 180$【解説：$\left|\cos\theta\vec{a}+\sin\theta\vec{b}\right|^2 = 4\cos^2\theta + \sin^2\theta = 3\cos^2\theta + 1$。この値が最大になるのは $\cos\theta = \pm 1$。】

13. 実数 $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ について以下の方程式を考える。

$$a_1(\vec{e}_1+\vec{e}_2) + a_2(\vec{e}_2+\vec{e}_3) + ... + a_{n-1}(\vec{e}_{n-1}+\vec{e}_n) = \vec{0}$$

この式は

$$a_1\vec{e}_1 + (a_1+a_2)\vec{e}_2 + (a_2+a_3)\vec{e}_3 + ... + a_{n-1}\vec{e}_n = \vec{0}$$

単位ベクトルは互いに線形独立なので $a_1 = 0$。よって $a_2 = 0$ となる。この作業を繰り返すことですべての k について $a_k = 0$ となる。よって線形独立となる。

3 第３章

1. $\cos\theta = \frac{\binom{6}{8}\cdot\binom{12}{5}}{|\binom{6}{8}|\cdot|\binom{12}{5}|} = \frac{112}{130}$
2. AB の中点の位置ベクトルは $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ である。この位置ベクトルと $\vec{c}$ を $1:2$ に内分する点の位置ベクトルは

$$\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

となる。よって証明された。

3. $\overrightarrow{AE} = \binom{4}{4}, \overrightarrow{EA} = \binom{-4}{-4}$. $\vec{f} = \vec{b} + \overrightarrow{AE} = \binom{5}{8}$

4. $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$、$\triangle ABC=\sqrt{1089}$【解説：面積の二乗は

$$S^2=\frac{1}{4}\,|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\theta=\frac{1}{4}\,|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2(1-\cos^2\theta)=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\cos^2\theta)$$

であるから $S^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2)$ と表記できる。$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{100\cdot 169-112^2}$ となる。】

5. $-8+\sqrt{75}$【解説：$\cos^2\theta=(\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{x}{1}}{|\binom{2}{1}|\cdot|\binom{x}{1}|})^2=\frac{3}{4}$ より $4(2x+1)^2=3\cdot 5\cdot(x^2+1)$ である。これを解いて $x^2+16x-11=0$ つまり $x=-8\pm\sqrt{75}$ となる。このうち正の値をとる。】

6. $\sqrt{45}$【解説：直線の法線ベクトルは $\binom{2}{1}$ である。したがって、距離が最短になるような、直線上の点 $\binom{x}{y}$ は $\binom{x}{y}=\binom{6+2t}{6+t}$ を満たす。式を代入して $t=-5$ であり、$\binom{x}{y}=\binom{0}{3}$ となり、距離は $\sqrt{45}$ となる。】

7. $3x-2y+7=0$【解説：$\binom{3}{-2}\cdot\binom{x-1}{y-5}=0$ より直線の方程式は $3x-2y+7=0$ となる。】

8. $\binom{11/7}{11/7}$【解説：予算制約式は $\binom{x-1}{y-2}\binom{3}{4}=0$ より $3x+4y=11$。$x=y$ より $x=y=\frac{11}{7}$ となる。】

9. $\vec{c}=\frac{1}{13}\binom{21}{22}$ 【解説：$(t\vec{a}+(1-t)\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ となるような t を探す。】

10. $\frac{13}{14}\cong 93.0\%$ 増えた。

4 第4章

1. 積が計算できるのは DB でその値は

$$DB=\begin{pmatrix}5 & 23 & 20\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2. 行列 $R(\theta)$ の列ベクトル $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ はともに大きさが 1 であり、かつ内積がゼロであるので直交行列となる。また、

$$R(\beta)R(\alpha)=R(\beta+\alpha)=R(\alpha+\beta)=R(\alpha)R(\beta)$$

となるから両行列は可換となる。

3. 順に $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$、$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ 【解説：直線 $y=x$ を軸に線対称移動させると点 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$ に移る。したがって一次変換を示す行列 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$$

したがって $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。一方直線 $y = \sqrt{3}x$ を軸に線対称移動させると点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ は、$120 = \alpha$ と書くと $\begin{pmatrix} \cos(\alpha-\theta) \\ \sin(\alpha-\theta) \end{pmatrix}$ にうつる。この値は

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta \\ \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin\theta & -\cos\theta \\ \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

に等しい。】

4. 行列は

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

であり、$tr(A) = -2 + 4 = 2.$

5. $B = E$ とすることで、$A = O$ を得る。よって証明された。
6. 6【解説：$8 = 2 + x$ より $x = 6$ となる。】
7. 基本変形してできる行列は順に $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$。基本変形により単位行列にする一例は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to P(1,2) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to R(2,1,-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to R(1,2,-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. A の第 k 行を A_k と書くと、$A_k = O$ であり、AB の第 k 行は $A_kB = O$ に等しい。よってすべての成分は 0 となる。
9. 対角行列同士の積は、

$$\mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)\,\mathrm{diag}(b_1, b_2, ..., b_n) = \mathrm{diag}(a_1b_1, a_2b_2, ..., a_nb_n)$$

である。これを用いて帰納法で説明する。まず $k = 1$ のときに自明に成立する。今 $k = i$ のときに成立しているとすると、$k = i + 1$ のとき

$$\begin{aligned}(\mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n))^{i+1} &= (\mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n))^i\,\mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n) \\ &= \mathrm{diag}(a_1^i, a_2^i, ..., a_n^i)\,\mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n) \\ &= \mathrm{diag}(a_1^{i+1}, a_2^{i+1}, ..., a_n^{i+1})\end{aligned}$$

となる。よってすべての i で証明された。

10. $|A\vec{v}|^2 = (A\vec{v})^T A\vec{v} = \vec{v}^T A^T A\vec{v}$ となる。よって証明された。
11. 上の立式において、$A^TA = 4E$ となるため、$|A\vec{v}|^2 = 4\,|\vec{v}| = 4$ となる。つまり最大値も最小値も 4 となる。
12. 第 1 基本変形:$\hat{P}(i,j)$ の第 i 行は、第 j 列に 1 があり、残りは 0 である。よって $\hat{P}(i,j)A$ の (i,y) 成分は a_{yj} となり、$\hat{P}(i,j)A$ の第 i 行は A の第 j 行と等しい。同様に $\hat{P}(i,j)A$ の第 j

行は A の第 i 行と等しい。次に、$\hat{P}(i,j)$ の第 k 行 $(x \neq i,j)$ は、第 k 列目に 1 があり残りは 0 であるため、$\hat{P}(i,j)A$ の第 x 行は A の第 x 行と等しい。

第 2 基本変形:$\hat{Q}(i,c)$ の第 i 行は、第 i 列に c があり、あとは全て 0 が並ぶ。よって $\hat{Q}(i,c)A$ の第 i 行は A の第 i 行の c 倍に等しい。一方 $\hat{Q}(i,c)$ の第 $x \neq i$ 行は、第 x 列目に 1 があり、あとは全て 0 が並ぶ。よって $\hat{Q}(i,c)A$ の第 x 行は A の第 x 行と等しい。

第 3 基本変形: $\hat{R}(i,j,c)$ の第 i 行は、第 i 列に 1 が、第 j 列に c があり、あとは 0 が並ぶ。よって $\hat{R}(i,j,c)A$ の (i,y) 成分は $a_{iy} + ca_{jy}$ に等しい。つまり $\hat{R}(i,j,c)A$ の第 i 行は、A の第 i 行に、第 j 行の c 倍を加えたものに等しい。残りの成分は A とかわらないことを簡単に示すことができる。

13. $A(t\vec{a} + (1-t)\vec{b}) = tA\vec{a} + (1-t)A\vec{b}$ となるから、AB 上の点は $A\vec{a} = \binom{9}{5}$ を位置ベクトルとする点と $A\vec{b} = \binom{22}{13}$ を位置ベクトルとする点を結ぶ線分上の点に移る。
14. $y = 4x$
15. ベクトル $A\vec{e}_i$ の第 k 成分は a_{ki} となる。これは A の第 i 列 $\vec{a}_i$ の第 k 行目の成分に等しい。したがって $A\vec{e}_i$ は $\vec{a}_i$ に一致する。

5 第5章

1. $d\begin{vmatrix} a & c \\ f & h \end{vmatrix} = d(ah - cf)$
2. $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5$。$|A| = 2 \cdot 5 \cdot 9 = 90$
3. 基本変形を用いて以下のように計算できる。

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & a+c & a+d \\ 2a & 2a & 2a+x \\ a & a & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & c & d \\ 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -ax\begin{vmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = ax(c-b)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} p+t & 0 & u & s \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & r & q & 0 \\ t & 0 & u & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & r & q & 0 \\ t & 0 & u & s \end{vmatrix} = p\begin{vmatrix} 0 & q & 0 \\ r & q & 0 \\ 0 & u & s \end{vmatrix} = -pqrs$$

4. この行列を B とすると行列 B の 2 行目から 1 行目と 3 行目を引く基本変形を順々に行うと以下のように 2 行目がゼロになるので、以下のようになる。

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

よって証明された。

5. $\sigma(x,1) = 1$ かつ $\sigma(1,y,z) = 0$ より、$\sigma(x,1,y,z) = \sigma(x,1) + \sigma(1,y,z) + \sigma(x,y,z) = 1 + \sigma(x,y,z)$ となる。よって証明された。

6. 2×2 行列 $P=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ と 2×2 行列 $Q=\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ の積 PQ は

$$PQ=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}.$$

ここで簡単な計算により

$$|PQ|=(ax+bz)(cy+dw)-(ay+bw)(cx+dz)=(ad-bc)(xw-zy)$$

であることを確認できる。

7. 行列 B に第 3 基本変形 R(1,2,-1), R(1,3,-1) を行うと A になるので A の行列式と B の行列式は等しい。

8. $x=-1/2,-3$【解説：$|A+xB|=(1+2x)(3+x)=0$ より求められる。】

9. ３次行列の場合に証明する。上三角行列

$$A=\begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

の行列式を、１列目を基準に展開すると、1 列目には一番上しか成分がないことより、

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & x & y \\ \mathbf{0} & b & z \\ \mathbf{0} & 0 & c \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} b & z \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

となる。ここで $\begin{pmatrix} b & z \\ 0 & c \end{pmatrix}$ は 2 次の上三角行列であり、すでに $\begin{vmatrix} b & z \\ 0 & c \end{vmatrix}=bc$ は示せているので、$|A|=abc$ となり題意を満たす。4 次以降も同様に示すことができる。厳密には数学的帰納法を用いて証明できる。

6　第 6 章

1. 余因子行列 $\hat{A}$ と逆行列 A^{-1} はそれぞれ以下のようになる。

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2. 行列式は -1 であるから、逆行列は $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ となる。

3. 行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$$

係数行列の逆行列は

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

であるから、解は

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\16\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$$

4. $R(\theta)^{-1}=R(-\theta)$ となるので、角度 $-\theta$ だけ回転させる一次変換を示す行列であることがわかる。
5. $\vec{x}=\begin{pmatrix}124\\141\end{pmatrix}$【解説：$\vec{x}=(E-A)^{-1}\vec{f}$ となる。】
6. $\vec{x}=(2,1,3)^T$【解説：$A\vec{x}=3E\vec{x}=3\vec{x}=(6,3,9)^T$ を解く。】
7. $x=10$【解説：$|A|=0$ を解く。】
8. $AB(B^{-1}A^{-1})=AA^{-1}=E$ かつ $(B^{-1}A^{-1})AB=BB^{-1}=E$ となるので $B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列となる。
9. A に逆行列 X があるとする。問題の条件より $X\vec{a}_1=X\vec{a}_2$ となる。$XA=E$ であるからこの式は $\vec{e}_1=\vec{e}_2$ を意味する。これは矛盾である。
10. A に逆行列 X があるとする。問題の条件より $X\vec{a}_3=X\vec{a}_1+X\vec{a}_2$ となるが、$XA=E$ であるから $\vec{e}_3=\vec{e}_1+\vec{e}_2$ とならなくてはならず、これは矛盾である。

7 第7章

1. 第１行を 1/5 倍し、その後基本変形 R(2,1,-1) を行うと以下のように第３列を掃き出せる

$$A=\begin{pmatrix}6&1/5&\mathbf{1}\\2&19/5&\mathbf{0}\\5&7&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

2. 基本変形 $R(2,1,-2),Q(2,-1/2,P(1,2,-2)$ により、解は $\begin{pmatrix}2.8\\-0.4\end{pmatrix}$ となる。

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&-0.4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\mathbf{2.8}\\0&1&-\mathbf{0.4}\end{pmatrix}$$

3. 拡大係数行列を基本変形すると以下のようになるので解は $x=7,y=3,z=1$

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&8\\2&-1&4&15\\-1&3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\mathbf{7}\\0&1&0&\mathbf{3}\\0&0&1&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

4. 第２列目はゼロベクトルであり、基本変形を何度繰り返してもゼロベクトルのままであり単

位ベクトルにはならない。

5. 基本変形をすると以下のようになるので逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

8　第8章

1. 基本変形すると
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
となる。右の行列が階段行列であり、$rank(A) = 2$
2. $a = 0, b = 1$ で型は $\{1, 2\}$ であり、階数は 2 である。
3. 拡大係数行列を基本変形 $(R(2, -1, -2), R(1, 2, -2))$ すると
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$
したがって解は
$$x = -3 - 11z$$
$$y = -2 - 7z$$
となる。ただし z は任意の実数。
4. 係数行列を基本変形 $(R(2, 1, 2), R(3, 1, -7), R(3, 2, 3), Q(2, 1/5))$ すると
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 7 & -8 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -15 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
となるので、ゼロ以外の解は例えば $x = -1/5$, $y = -3/5, z = 1$ となる。
5. 連立方程式の拡大係数行列を基本変形すると
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
となる。最後の式は $0 = 6$ を意味するので解は存在しない。
6. 型は $\{1, 2, 5\}$
7. A については、(2,2) 成分がゼロ以外であるが第 2 列より左側に第 2 単位ベクトルがあらわれない。B については、(3,1) 成分がゼロ以外であるが、1 列目より左に第 3 単位ベクトル

があらわれない。C については、(2,2) 成分がゼロ以外であるが第 2 列より左側に第二単位ベクトルがあらわれない。

8. 第 2 列も第 3 列もともに第 2 単位ベクトルであるが、第 3 列が型に入るとすると、第 2 列には第 2 行目にゼロが入らないといけないので矛盾する。

9 第 9 章

1. $n = 1$ のときに自明に成立する。$n = k$ のときにも成立するとすると、その前提より $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$ となる。この場合、加法定理より

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1} = (\cos(k\theta)+i\sin(k\theta))(\cos\theta+i\sin\theta) = \cos((k+1)\theta)+i\sin((k+1)\theta)$$

となるので $n = k$ のときも成立する。よって帰納法で証明された。

2. A : 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

より $\lambda = 3, 6$。固有値 3 に対応する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$ より $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。固有値 6 に対応する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$ より $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

B : 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 + 4 = 0$$

より $\lambda = 3 \pm 2i$。固有値 $3 + 2i$ に対応する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$ より $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \end{pmatrix}$。固有値 6 に対応する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 2i & 4 \\ -1 & 2i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$ より $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 以下のように計算できる。

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 6^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

4. A の固有多項式が $(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-3)$ であるから、固有値は $4, 2, 3$。それぞれに対応す

る固有ベクトルは、係数行列を基本変形することにより

$$\lambda=4:\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda=2:\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0.5&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda=3:\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

となる。固有ベクトルを縦に並べた行列を用いて以下のように対角化できる。

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-2&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

次に B の固有多項式が $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ であるから、固有値は $1,2$。それぞれに対応する固有ベクトルは

$$\lambda=1:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=2:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda=3:\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

となる。固有ベクトルを縦に並べた行列は単位行列なので対角化してももとのままである。

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

5. 固有多項式が $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ であるから $(A-E)(A-2E)(A-3E)=O$ である。よって

$$A^3=6A^2-11A+6E$$

とあらわせる。両辺を A で割ると $A^2=6A-11E+6A^{-1}$ をえる。

6. 今、$C=A-\lambda E$ とする。C の余因子行列 $\tilde{C}$ の各成分は λ について高々 3 次式である。よって $\tilde{C}$ は、適当な行列を用いて $\tilde{C}=\lambda^3B_3+\lambda^2B_2+\lambda B_1+B_0$ とかける。よって

$$\tilde{C}C=\lambda^4B_3+\lambda^3(B_3A-B_2)+\lambda^2(B_2A-B_1)+\lambda(B_1A-B_0)+B_0A$$

一方 A の固有多項式 $f(\lambda)=|C|$ が定数 p_i を用いて $f(\lambda)=p_4\lambda^4++p_3\lambda^3+p_2\lambda^2+p_1\lambda+p_0$ と表せたとすると、

$$\tilde{C}C=|C|E=p_4\lambda^4E+p_3\lambda^3E+p_2\lambda^2E+p_1\lambda E+p_0E$$

となる。補題より、$C\tilde{C}$ に関する二つの式の係数行列は一致するので、

$$\begin{aligned}
p_4E &= -B_3,\\
p_3E &= B_3A-B_2,\\
p_2E &= B_2A-B_1,\\
p_1E &= B_1A-B_0,\\
p_0E &= B_0A,
\end{aligned}$$

なる。従って $f(A)=p_3A^3+p_2A^2+p_1A+p_0E$ の値は O となり題意は証明された。

7. $A\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ より

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}$$

と計算できる。

8. (1)$\vec{x}_n=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\vec{x}_{n-1}$。

(2) 漸化式を解くと

$$\vec{x}_n=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}^n\vec{x}_0=\vec{x}_n=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

ここで対称行列 $\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$ の固有値は $4,-2$ であり、対応する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ である。よって

$$\vec{x}_n=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n&1\\1&(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

として表せる。

9. この不等式は、複素平面上で $|\vec{z}_1|+|\vec{z}_2|\geq|\vec{z}_1+\vec{z}_2|$ が成立することと同値であるが、この不等式は定理 2.3 ですでに示している。

10. $|\operatorname{diag}(a_i)-\lambda E|=|\operatorname{diag}(a_i-\lambda)|=(a_1-\lambda)(a_2-\lambda)....(a_n-\lambda)$ となるから、固有値は主対角成分 a_i に一致する。

10 第１０章

1. $-1 \leq a \leq 1$【解説：固有方程式は $x^2+2x+1-a^2=(x+1-a)(x+1+a)=0$ より $x=-1\pm a$。これがすべて非正となるのは $-1 \leq a \leq 1$ のときのみ。】
2. 2 次形式は以下のように表現できる。

$$x^2+2xy+4yz+6y^2+z^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3. $a<4$【解説：$x/y=t$ とすると、

$$x^2+4xy+ay^2 = y^2(t^2+4t+a) = y^2\{(t+2)^2+a-4\}$$

これがプラスの値もマイナスの値も両方取るのは $a<4$ のときのみ。】
4. 固有方程式 $x^2+5x+4=0$ の解 $-1,-4$ がすべてマイナスなので非正定値。
5. $4i$【解説：$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{pmatrix} = (1+i)^*+(1+i)(2-3i)^* = 1-i+(1+i)(2+3i)=4i$。】
6. 異なる固有値 $\alpha,\beta,\gamma,\theta$、この固有値を対角線上に並べた行列を $B=diag(\alpha,\beta,\gamma,\theta)$ そして固有値に対応する固有ベクトルを列ベクトルとする行列を P とする。$P^{-1}=P^\top$ より $A=PBP^\top$ が成立する。今、ベクトル $\vec{v}$ について $P^\top\vec{v}=\vec{w}$ とすると、$\vec{v}^\top A\vec{v}=\vec{w}^\top B\vec{w}=\alpha w_1^2+\beta w_2^2+\gamma w_3^2+\theta w_4^2+$ であるが、$\alpha,\beta,\gamma,\theta \geq 0$ であるため、$\vec{v}^\top A\vec{v} \geq 0$ となる。
7. $(\vec{x}\cdot\vec{y})^* = \sum_{k=1}^n (x_k y_k^*)^* = \sum_{k=1}^n y_k x_k^* = \vec{y}\cdot\vec{x}$

11 第１１章

1. 関数 $f(x,y)=x^{1/2}y^{1/2}$ の 2 階微分行列が非正定値であることを示す。勾配は

$$\nabla f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y^{1/2}x^{-1/2} \\ x^{1/2}y^{-1/2} \end{pmatrix}$$

であり、2 階微分行列は

$$\nabla^2 f = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -x^{-3/2}y^{1/2} & y^{-1/2}x^{-1/2} \\ y^{-1/2}x^{-1/2} & -y^{-3/2}x^{1/2} \end{pmatrix} = \frac{y^{-1/2}x^{-1/2}}{4}\begin{pmatrix} -(y/x) & 1 \\ 1 & -(x/y) \end{pmatrix}$$

である。ここで、任意の正の実数 a に対し、行列

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -1/a \end{pmatrix}$$

は非正定値である。なぜなら固有方程式は $x^2+(a+1/a)x=0$ であり、この解は 0 と $-a-1/a<0$ であるから、ともにゼロ以下である。よって $\nabla^2 f$ も非正定値である。

2. 任意のベクトルについて $f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{b} \geq f(\vec{a} + \vec{b})$ となるから、$\vec{b}$ を $2\vec{b}$ に変えることで $f(\vec{a}) + 2\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{b} \geq f(\vec{a} + 2\vec{b})$ を得る。
3. $n = k = 1$【解説：利潤関数 $g(n,k) = n^{1/2} + k^{1/2} - 0.5n - 0.5k$ の勾配は

$$\nabla g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{n^{1/2}} - 1 \\ \frac{1}{k^{1/2}} - 1 \end{pmatrix}$$

であるから 2 階微分行列は

$$\nabla^2 g = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} n^{-3/2} & 0 \\ 0 & k^{-3/2} \end{pmatrix}$$

であり、固有値は $-n^{-3/2}/4, -k^{-3/2}/4$ でありともに負である。よって極値で利潤は最大となる。一階条件を満たす (n,k) は、$\nabla g = 0$ より $n = k = 1$ である。このとき利潤は最大になる。】
4. $x = 3/2, y = 2$【解説：関数 $U(x,y) = \ln x + \ln y$ を条件 $4x + 3y = 12$ のもとに最大化する。ラグランジアンは

$$L = \ln x + \ln y + \lambda(12 - 4x - 3y)$$

である。微分して $1/x = 4\lambda$ かつ $1/y = 3\lambda$ を得る。予算制約式より $x = 3/2, y = 2$ を得る。】
5. $x_1 = \frac{18}{5}, x_2 = \frac{8}{5}$【解説：関数 $U(\vec{x}) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ を条件式 $12 - 2x_1 - 3x_2 = 0$ のもとで最大化する。ラグランジアンは

$$L = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \lambda(12 - 2x_1 - 3x_2)$$

である。微分して $0.5/\sqrt{x_1} = 2\lambda$ かつ $0.5/\sqrt{x_2} = 3\lambda$ を得る。よって $x_1 : x_2 = 9 : 4$ となる。予算制約式より $x_1 = \frac{18}{5}, x_2 = \frac{8}{5}$ を得る。】
6. 一階条件は

$$\frac{S_a(a,b)}{2} = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i) = 0$$
$$\frac{S_b(a,b)}{2} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,(a + bx_i - y_i) = 0$$

となる。まず最初の式より $a = \bar{y} - b\bar{x}$ となる。次にこの関係式を次の式に代入すると $\sum_{i=1}^{n} x_i\,(b\hat{x}_i - \hat{y}_i) = 0$ となる。ここで $\hat{x}_i = x_i - \bar{x}$ である。平均からのかい離の和はゼロであるので $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}\,(b\hat{x}_i - \hat{y}_i) = 0$ である。したがって $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i\,(b\hat{x}_i - \hat{y}_i) = 0$ となる。この式を整理すると

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

となる。

7. $n = k = (2/3)^3$【解説：$a = 1/3$ とする。利潤関数 $g(n,k) = n^a k^a - 0.5n - 0.5k$ の勾配は

$$\nabla g = \begin{pmatrix} an^{a-1}k^a - 0.5 \\ an^a k^{a-1} - 0.5 \end{pmatrix}$$

であるから 2 階微分行列は

$$\nabla^2 g = a^2 \begin{pmatrix} (1-1/a)(k/n) & 1 \\ 1 & (1-1/a)(n/k) \end{pmatrix} n^{a-1}k^{a-1}$$

である。対称行列

$$\begin{pmatrix} -2c & 1 \\ 1 & -2/c \end{pmatrix}$$

の固有方程式は $f(x) = x^2 + 2(c+1/c)x + 3 = 0$ である。この 2 次関数の軸は負の部分にあり、かつ $f(0) > 0$ であるから解はすべて負である。固よって極値で利潤は最大となる。一階条件を満たす (n,k) は、$\nabla g = 0$ より $n^{-2/3}k^{1/3} = k^{-2/3}n^{1/3} = \frac{3}{2}$ である。つまり $n = k = (2/3)^3$ のとき利潤は最大になる。】

12 補論

1. 数列の集合 $S = \{\{a_n\}_{n=1}^3 | a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}\}$ の部分集合 $T = \{\{a_n\}_{n=1}^3 | a_1 = a_2, a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}\}$ が S 上の線形部分空間である事を示せ。$|a_1 = a_2, a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ を満たす任意の数列 $\{a_n^*\}_{n=1}^3$、$\{a_n^{**}\}_{n=1}^3$ 及び、任意の実数 p, q について、$\{pa_n^* + qa_n^{**}\}_{n=1}^3 \in W$ となるから線形部分空間となる。
2. まず a) W の任意の要素 x 及び任意の実数 α について、$\alpha x \in W$ かつ b) W の任意の要素 x 及び y について、$x + 2y \in W$ が成り立つとする。このとき、W の任意の要素 y について、$0.5y \in W$ であり、２）より $x + 2 \cdot 0.5y \in W$ となる。ここで $2 \cdot 0.5y = y$ である。したがって c) W の任意の要素 x 及び y について、$x + y \in W$ となる。つまり a かつ b なら a かつ c が成立し、W は部分空間となる。次に、W が部分空間であるとする。このとき W の任意の要素 x 及び $z = 2y$ について、$x + z \in W$ となるから b が成立する。したがって a と b が成立する。以上のことより W が部分空間であることと a かつ b が成立することは同値である。
3. 行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ 及び 2 次元ベクトル $\vec{x}$ について、線形写像 f を $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ で定義する。$A\binom{x}{y} = \binom{x+2y}{2x+4y} = (x+2y)\binom{1}{2}$ となるから、$\mathrm{Im}\, f$ は $\binom{1}{2}$ に平行な全てのベクトルからなる集合である。一方、$A\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ となるベクトル $\binom{x}{y}$ は $x + 2y = 0$ を満たすもの、つまり $x\binom{2}{-1}$ の形のベクトル全てからなる集合である。ともに明らかに線形空間である。
4. 行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ 及び 2 次元ベクトル $\vec{x}$ について、線形写像 f を $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ で定義する。$|A| = 0$ であるので $A\vec{x} = \vec{0}$ なら $\vec{x} = \vec{0}$ となる。また、任意の $\vec{y}$ について、$A\vec{x} = \vec{y}$ なる $\vec{x}$ は常に存在する。したがって、核は $\{\vec{0}\}$ そして像は 2 次元空間全体となる。

5. 2 次元空間の基底 $\vec{f} = \binom{1}{3}, \vec{g} = \binom{1}{-1}$ が与えられたとき、シュミットの直交化法を用いて正規直交基底 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ を作る。ステップ 1 より $\vec{v}_1 = \vec{f}/|\vec{f}| = \frac{1}{\sqrt{10}}\binom{1}{3}$ となる。次に、ステップ 2: $\vec{v}_2 = \vec{h}_2/|\vec{h}_2|$ 但し

$$\vec{h}_2 = \vec{g} - (\vec{g}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。つまり $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\binom{3}{-1}$ となる。確かに直交している。

6. 集合 $S = \{a\binom{2}{3} + b\binom{1}{1} | a, b \in \mathbb{R}\}$ の任意の 2 つの要素 $v_1 = a_1\binom{2}{3} + b_1\binom{1}{1}$、$v_2 = a_2\binom{2}{3} + b_2\binom{1}{1}$ と実数 p, q について、

$$pv_1 + qv_2 = (pa_1 + qa_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (pb_1 + qb_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $\binom{2}{3}$ と $\binom{1}{1}$ の線形結合であるので S に含まれる。したがって S は線形空間となる。

7. 集合 $S = \{ax^2 + bx + a | a, b \in \mathbb{R}\}$ の任意の 2 つの要素 $v_1 = a_1x^2 + b_1x + a_1$、$v_2 = a_2x^2 + b_2x + a_2$ と実数 p, q について、

$$pv_1 + qv_2 = (pa_1 + qa_2)x^2 + (pb_1 + qb_2)x + (pa_1 + qa_2)$$

は実数係数 2 次多項式であり、2 次の係数と 0 次の係数が一致するので S に含まれる。したがって S は線形空間である。その基底の一例は $\{x^2 + 1, x\}$ である。