「リーマンのゼータ関数」修正個所リスト

松本耕二

「リーマンのゼータ関数」を執筆したときは、ミスが一切ないテキストを作ろうと、何回も見直して完璧を期したつもりだったのだが、やはり人間のやることに 100% の完璧さは望めないようで、あちこちにミスが見つかってしまった。それら, 修正すべき個所を以下にリストアップする。

特に、2007 年と 2008 年の二回にわたり、八王子大学セミナーハウスでの数論セミナーではこの「リーマンのゼータ関数」をテキストとして使用していただいた。このセミナーのみなさんは細部に至るまでこの本を精読吟味して、多くのミスを指摘してくださった。彼ら八王子セミナー参加者のみなさんをはじめ、以下のミスを筆者に教えてくださったすべての方々に感謝したい。

修正個所リスト

p.18, 1 行目、$f(s) = n^{-s}$ の左辺は $f(n)$ が正しい。

p.30, (3.5) 式の右辺の第 1 の誤差項 $O(T^{-1}\log x)$ は $O(cT^{-1}\log x)$ が正しい。(このすぐ後で $c = 1 + (\log x)^{-1}$ と取るので、その時点でこの誤差項は結局は $O(T^{-1}\log x)$ としてよいことになる。)

p.32, これは間違いというわけではないが、2 行目と 4 行目の $\ll$ は $\leq$ でよい。

p.36, (3.17) 式の 1 行目, 右辺第 1 項 x の直後は $-$ ではなく $+$ が正しい。

p.50, 補題 4.1 の M に関して、「 $|t| \to \infty$ $(t = \Im s)$ のとき $+\infty$ に増加する t の関数 $M = M(t) > 1$」、という部分は、(増加に関する仮定は削除して) 「$t_0 = \Im(s_0)$ の関数 $M = M(t_0) > 1$」とするのが正しい。(不等号 $M > 1$ は、p.51 の 1 行目の不等式から 3 行目の $\Re h(s) \ll M$ を導くときに必要である。)

p.58, (5.3) 式の右辺の $\mathrm{li}(x^\rho)$ であるが、p.5 では実数 x に対する $\mathrm{li} x$ しか定義しなかった。従って複素数 ρ に対する $\mathrm{li}(x^\rho)$ は定義されていな

かった。それは、まず $\mathrm{li}(x^\rho)=\mathrm{li}(e^{\rho\log x})$ で、そして $w=u+iv$ $(v\neq 0)$ のとき、

$$\mathrm{li}(e^w)=\int_{-\infty+iv}^{u+iv}\frac{e^z}{z}dz$$

として定義する。実数 $w=u$ に対しては

$$\mathrm{li}(e^u)=\frac{1}{2}\lim_{v\to 0}\left(\mathrm{li}(e^{u+iv})+\mathrm{li}(e^{u-iv})\right)$$

として $\mathrm{li}(e^u)$ を定めれば、これは p.5 の定義と一致する。

p.92, (7.2) 式の成立範囲はガンマ関数の極の近傍は除く。従って (7.3) 式の成立範囲も、ゼータ関数の零点の近傍は除かねばならない。

p.94, 定理 7.1 の条件の $\sigma\geq\sigma_0$ を $\sigma_0\leq\sigma\leq 2$ に差し換える。($\sigma\geq\sigma_0$ だけでは、証明中の p.95 の下から 4 行目の右辺に $O(\sigma x^{-\sigma-1})$ を追加する必要が生じてしまうので、σ が上から有界、という条件もつけた。上限は 2 でなくても適当に大きい正の数なら何でもよい。)

p.100, 補題 7.3 の条件「$F'(x)\geq M>0$ または $F'(x)\leq -M<0$」という書き方は少し曖昧だったかもしれない。この意味は「$[a,b]$ で常に $F'(x)\geq M>0$ か、または $[a,b]$ で常に $F'(x)\leq -M<0$」ということである。

p.144, 補題 9.3 の式 (9.47) の O-定数は、仮定にある条件 $f(s)\ll e^{Ct^2}$ の O-定数にはよるが、それ以外には関数 $f(s)$ には依存しないことが、引用してある Ivić の本の証明を見るとわかる。後述するように、このことは p.183 において必要となる。

p.145, (9.51) の 2 行下の式は、$1/2-\sigma\geq 0$ でなければ示せないので、$1/2-\sigma<0$ の場合も含めて (9.50) を証明するためには、少し議論を手直しする必要がある。以下の議論は八王子セミナー参加者のひとり、赤塚広隆氏によるものである。

まず、

$$\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt=O(T^{\xi})\qquad(*)$$

が成り立つような正数 ξ の下限を $\xi_k^*(\sigma)$ と書こう。すると $\xi_k^*(\sigma)=\xi_k(\sigma)$ である。実際正数 ξ が (9.34) を満たせば $(*)$ も満たすことは明らかであるが、逆に ξ が $(*)$ を満たせば、$T,T/2,T/4,T/8,\ldots$ に対する $(*)$ 式を足し合わせることにより (9.34) を得るからである。そこで、(9.51) とその 2 行下の式で、積分の下端を 2 ではなく $T/2$ とする。こうすると $1/2-\sigma<0$ の場合でも (9.51) の 2 行下の式が示せる。よって $\xi_k^*(\sigma)\leq 2k\cdot(1/2-\sigma)+\xi_k^*(1-\sigma)$ が得られ、$\xi_k(\sigma)\leq 2k\cdot(1/2-\sigma)+\xi_k(1-\sigma)$

が従う。またこの式で σ と $1-\sigma$ を入れ替えて整理すれば逆向きの不等式も得られる。

p.173, 下から 3 行目、$E(t-\delta)$ の直前は $+$ ではなく $-$ が正しい。

p.180, 下から 3 行目、$(1-2^{1-s})\zeta(s)$ の零点が $\zeta(s)$ の零点と一致する、という記述は誤りで、実際には $1-2^{1-s}$ の零点 $s=1+(2\pi in/\log 2)$ (n は任意の整数) の分だけ $(1-2^{1-s})\zeta(s)$ の零点の方が多い。ただしこの議論は、零点の個数を補題 11.1 で押さえ込めばよいだけだから、議論の筋道に影響はない。

p.183, (11.10) 式の 3 行下の式は、(11.10) 式に補題 9.3 を適用して得られるわけであるが、ここで関数 f_T は T に依存するにもかかわらず、(11.10) 式の 3 行下の式の O-定数は T によらない。このことは上述した p.144, 補題 9.3 に関する注意からわかる。