4 次元多様体 I, II の正誤表および補足説明 (2023/2/10 版)

上　正明

この文書は「上正明・松本幸夫著：4 次元多様体 I, II, 朝倉書店」の本文に対する 1．比較的単純な訂正（誤植の訂正を含む）および 2. 不正確な説明の訂正および追加説明からなる．以下 I, II はそれぞれ「4 次元多様体 I, II」を表す．また I, II にある参考文献は該当する番号，新たな文献はこの文書の参考文献表の文字列で引用する．今後随時更新予定だが，内容の修正以外の追加説明は本文で言及したトピックスに直接関連するものに限定する．

1. 正誤表 1

- I 定理 1.12 (p.14 ℓ 4)　$(i = 1, \ldots, r-1) \Longrightarrow (i = 1, \ldots, r)$
- I 命題 1.14 (p.15 ℓ 4)　$x \in \Lambda \Longrightarrow x \in \pi_2(X)$
- I 定理 1.22 (p.18 ℓ17)　$\Longrightarrow$ 単連結な 4 次元多様体 X と Y が向きを保ってホモトピー同値になることと $q_X \cong q_Y$ となることは同値である．
- I p.22 ℓ15　X の微分同相類 $\Longrightarrow$ X' の微分同相類
- I 定義 2.54, p.89 の修正（補足説明は 2.2 を参照）

  S を有限生成な群 Γ を生成する有限集合とする．$\gamma \in \Gamma$ に対し $\ell_S(\gamma) = \min\{n \mid \gamma = g_1 \cdots g_n \ (g_i \in S \cup S^{-1})\}$ とおき，Γ の S に関する増大度関数 $f_S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を $f_S(n)$ が $\ell_S(\gamma) \leq n$ をみたす γ の個数となるように定める．このとき $w(\Gamma, S) := \limsup_{n\to\infty} f_S(n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$ であり，特に $w(\Gamma, S) = 1$ のとき Γ は部分指数増大度をもつという（S の取り方によらない）．
- I 定理 2.70 (p.96 ℓ 1)　Teichler $\Longrightarrow$ Teichner
- p.114, 脚注 $b_2^{\lambda} > 1 \Longrightarrow b_2^{+} > 1$
- 定理 3.51 (p.129 ℓ 24)　$\widehat{D}_X^w \Longrightarrow \mathcal{D}_X^w$　（2 カ所）
- I 定義 3.109, 定義 3.110　いずれも X のホモロジーの向き（定理 3.100）を指定して定める
- I 3.3.6 定義 3.192. p.199 以降の説明を「訂正および補足説明」2.4 に従って以下のように読み替え，訂正する（詳細は 2.4 を参照）.
  - 定義 3.192,　p.199

$$\widetilde{\mathcal{C}}_X^{\sigma}(\mathfrak{s}_X) = \{(\widetilde{A}, s, \widetilde{\psi}) \in \mathcal{A}(S_X^+) \times \mathbf{R} \times S\Gamma(S_X^+)\} \quad \sigma \text{ モデル}$$

を導入し，その部分空間 $\widetilde{\mathcal{C}}_X^{\sigma,\circ}(\mathfrak{s}_X)$ $(\circ = \mathrm{red}, *)$, それらの $\mathcal{G}_X$ による商空間 $\widetilde{\mathcal{B}}_X^{\sigma}(\mathfrak{s}_X)$, $\widetilde{\mathcal{B}}_X^{\sigma,,\circ}(\mathfrak{s}_X)$ を定義して~のつかない空間は $s \geq 0$ をみたすそれらの部分空間，ないし対合 $\mathbf{i} : (\widetilde{A}, s, \widetilde{\psi}) \to (\widetilde{A}, -s, \widetilde{\psi})$ によるそれらの商空間として定義する．3 次元多様体に対しても s に条件を付けない空間を~をつけて表し，~のつかない空間は条件 $s \geq 0$ を付加して定義する．

- I 定義 3.199, p.202
  $\widetilde{\mathcal{C}}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$ を $\mathcal{C}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$ の定義から $s \geq 0$ を外した空間，$\widetilde{\mathcal{B}}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$ をその $\mathcal{G}_Z$ による商空間として定義し，$\mathcal{C}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$, $\mathcal{B}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$ はそれらの部分空間とみなす.
- I 定義 3.199 p.202 以降の説明の読み替え
  SW^{τ} の $\widetilde{\mathcal{C}}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z), \mathcal{C}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$ における零点集合を $\widetilde{\mathcal{Z}}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$, $\mathcal{Z}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$ とおく．I がコンパクトのとき，それらの L_k^2 ノルムによる完備化（添え字 k をつけて表す）の L_{k+1}^2 ノルムで完備化された $\mathcal{G}_Z$ による商空間をそれぞれ $\widetilde{\mathcal{M}}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$, $\mathcal{M}_Z^{\tau}(\mathfrak{s}_Z)$ と表す（この場合 $\widetilde{\mathcal{B}}_{Z,k}^{\tau}(s_Z)$ は命題 3.194 と同様な条件のもと Hilbert 多様体になる）．$Z = \mathbf{R} \times Y$ の場合これらの空間の $L_{k,\mathrm{loc}}^2$ ノルムによる完備化は添え字 k, loc をつけて表す.
- I 定義 3.200, p.202-203 の説明の補足
  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{R}\times Y,k,\mathrm{loc}}^{\tau}(\mathfrak{s}_{\mathbf{R}\times Y})$ の部分空間 $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{R}\times Y}^{\tau}(\mathfrak{s}_{\mathbf{R}\times Y}, [\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}])$ を条件 $s \geq 0$ を外して定義し，$\mathcal{M}_{\mathbf{R}\times Y}^{\tau}(\mathfrak{s}_{\mathbf{R}\times Y}, [\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}])$ をその部分空間ないし対合 $\mathbf{i}$ による商空間とみなす．$\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{R}\times Y}^{\tau}(\mathfrak{s}_{\mathbf{R}\times Y}, [\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}])$ も同様に定義する.
- I 定義 3.200 以降定義 3.201 までの説明
  制限写像 r, r' はそれぞれ $\widetilde{\mathcal{M}}_X^{\sigma}(\mathfrak{s}_X)$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{[0,\infty)\times Y}^{\tau}(\mathfrak{s}_{[0,\infty)\times Y}, [\mathfrak{b}])$ からの写像に拡張され，$X^* = X \cup [0,\infty) \times Y$ に対する $\widetilde{\mathcal{M}}_{X^*}^{\sigma}(\mathfrak{s}_{X^*}, [\mathfrak{b}])$ がそれらのファイバー積として定義されることを補足する.
- I, p.206-207
  摂動したモジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}_{X^*,\mathfrak{p},\omega^+}^{\sigma}(\mathfrak{s}_{X^*})$ も同様に定義されることを補足する.

- 文献 365 Invent. Math $\Longrightarrow$ J. Diff. Geom.
- II, p.372 ℓ 21, $D \Longrightarrow D_u$（3 カ所）

- II 5.6　Maslov 指数 (p.303 ）の説明を「訂正および補足説明」2.5 に従って Lagrange 部分空間に関するものから全実な部分空間に関するものに以下のように読み替える（詳細は 2.5 を参照）.
  - p.374, $\ell 6$ 以下
    $L_0(t)$, $L_1(t)$ の説明を $t = \pm\infty$ の場合も含めて Lagrange 部分空間でなく $(\mathbf{C}^g, J)$ の全実な部分空間に読み替える.
  - II 定義 5.36　以下の説明
    $(\mathbf{C}^g, \omega)$ の Lagrange 部分空間全体のなす空間 Lag_g に変えて $(\mathbf{C}^g, J)$ の全実な部分空間全体のなす空間 $\mathcal{T}_g$ が $\mathrm{GL}_g(\mathbf{C})/\mathrm{GL}_g(\mathbf{R})$ と同一視され，ファイバー空間 $\mathrm{GL}_g(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_g(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_g(\mathbf{C})/\mathrm{GL}_g(\mathbf{R})$ に付随する短完全列 $0 \to \mathbf{Z} \to \pi_1(\mathcal{T}_g) \to \mathbf{Z}_2 \to 0$ が誘導される説明に変える.
  - 命題 5.37, 定義 5.38 の変更
    $\pi_1(\mathcal{T}_g) \cong \mathbf{Z}$ で $t \to (e^{\pi i t}\mathbf{R}e_1 \oplus \oplus_{j=2}^{g} \mathbf{R}e_j)$ $(t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong S^1)$ がその生成元 α（Maslov クラス）を与えること ($\{e_j \mid\ j = 1, \ldots, g\}$ は $\mathbf{C}^g$ の標準基底）の説明に変え，$\mathcal{T}_g$ の $L_0 = \oplus \mathbf{R}e_j$ を基点とする閉曲線 γ に対し $[\gamma] = \alpha^{\mu(\gamma)}$ をみたす $\mu(\gamma)$ を γ の Maslov 指数として定義する.
  - II, p.375 の説明
    定義 5.39 まで Lag_g を $\mathcal{T}_g$ に置きかえて ψ の Maslov 指数を $\mathcal{T}_g$ の閉曲線 γ によって定義するように読み替える．ただし $L_0(t)$, $L_1(t)$ が Lag_g の路である場合には本文における Maslov 指数の定義と一致する．また定義 5.39 以降の説明は全実部分空間に関して成り立つ（Lagrange 部分空間に関しては Floer が示していた）.
- II, p.379, 定義 5.53 Y の基点付き Heegaard 図式 $(\Sigma, \alpha, \beta, z)$ について
  - 弱い意味で許容的な Heegaard 図式の定義の修正　$\Longrightarrow$
    Heegaard 図式が $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$ に関して弱い意味で許容的であるとは，$\langle c_1(\mathfrak{s}), H(\mathcal{P})\rangle = 0$ をみたす任意の非自明な周期的領域 $\mathcal{P}$ が正負両方の係数をもつときをいう.
- II p.366 ℓ 15, $\pi_1\Omega(T_\alpha, T_\beta) \cong \pi_2(T_\alpha \times T_\beta) = 0 \Longrightarrow \pi_2(T_\alpha \times T_\beta) = 0$
- II p.380 命題 5.54

弱い意味で許容的な図式に変形できる $\Longrightarrow$ 任意の $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$ に対し弱い意味で許容的な図式に変形できる.

- II, p.393 ℓ 3, 命題 5.87 の冒頭に以下の説明を追加

  基点付き Heegaard 3 つ組 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma, z)$ に対し，境界が α, β, γ 内の閉曲線の和で Σ 上 2 チェインを張るものからなる Σ 上の 2 チェイン $\mathcal{D}$ は $n_z(\mathcal{D}) = 0$ をみたすとき 3 重周期領域という.
- II, p.289 ℓ 1，既約 $\Longrightarrow$ 規約
- 標準的な訳語への変更 1

  configuration space 規制空間 $\Longrightarrow$ 配位空間

  I p.99 ℓ 11．I 定義 3.32 (p.120 ℓ 20), 定義 3.38 (P.123 ℓ 15), p.132 ℓ 8, 定義 3.94 (p.156 ℓ 11), 命題 3.96 (p.157 ℓ 8), 定義 3.138 (p.177 ℓ 12, ℓ 16), §3.3.6 (p.199 ℓ 4, ℓ 18), §4.1b (p.267 ℓ 12), 命題 4.94 (p.313 ℓ 1), 4.7 (p.333 ℓ 14), p.334 ℓ 25, p.345 ℓ 21, p.352 ℓ 4, II §6.3 (p.463 ℓ 2), §7.1 (p.479 ℓ 9), p.506 ℓ 3
- 標準的な訳語への変更 2

  stratification 層化空間 $\Longrightarrow$ 滑層分割された空間

  I 3.1.2 p.99 ℓ25-26

  これ以降以下の箇所では層化空間 $\Longrightarrow$ 「滑層分割空間」と略記する.

  I 3.2.7 (p.138 ℓ 15), 3.3.6 (p.211 ℓ 5), p.245 ℓ 5, ℓ 16 p. 250 ℓ 5, p.252 ℓ 13, p.262 ℓ 19, 仮定 3.316 (p.263 ℓ 1), p.263 ℓ 12, 4.7 (p.337 ℓ 5, ℓ 20), 命題 4.150 (p.343 ℓ 5).

  層化したある空間 $\Longrightarrow$ 滑層分割空間への拡張,

  I 3.1.2 (p.99 ℓ 25)

  層化された層状空間 $\Longrightarrow$ 滑層分割空間,

  4.7 (p.336 ℓ 27)

  各層 $\Longrightarrow$ 各滑層

  3.4 (p.245 ℓ 17), p.248 ℓ 10 仮定 3.292 (p.249 ℓ 13, ℓ 16), p.250 ℓ 3, p.263 ℓ 4, p.337 ℓ 19, p.338 ℓ 21

  層 $\Longrightarrow$ 滑層

  3.2.3 (p.122 ℓ 22), 3.2.7 (p.138 ℓ 15), 命題 3.218 (p.211 ℓ 18), p.245 ℓ16, ℓ 17, p.248 ℓ 21, p.250 ℓ 5, p.251 ℓ 16, p.252 ℓ 1, ℓ 2, p.339 ℓ 27
- 次の文献には新版がある.

46 W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A Van de Ven, Compact Complex Surfaces, 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin, 2004.
318 D. McDuff, D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, 3rd Edition, Oxford Graduate Texts in Math. 27, Oxford, 2017.

- 訂正の追加（正誤表の「補足」の中に書いたものを含む）

- I p.202 ℓ 16 右辺の $CSD^\sigma(\widetilde{A},s,\widetilde{\psi}) \Longrightarrow \nabla CSD^\sigma(\widetilde{A},s,\widetilde{\psi})$
- I 注 3.228, p.214 ℓ 15 ホモロジーの係数 $\mathbf{R} \Longrightarrow \mathbf{Z}$ （3 カ所）
- 訳語の変更 I, 注 2.56, p.90 複有限ー巡回群 $\Longrightarrow$ 多重有限ー巡回群
- I p.344, ℓ 1 $\Delta_- \times \Delta \times \cdots \times \Delta_m \Longrightarrow \Delta_- \times \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_M$
- I p.348, ℓ 16 $(\chi(X)+\sigma(X)-b_1(Y))/2 \Longrightarrow (\chi(X)+\sigma(X)+b_1(Y))/2$
- I. p.349 ℓ 6 $\check{HS}_\bullet(Y_-,\mathbf{p}) \Longrightarrow \check{HS}_\bullet(W,\mathbf{p})$
- I p.352 ℓ 6 $\mathrm{gr}_z^{\mathbf{Q}}(W,[\mathfrak{C}],[\mathfrak{C}]) \Longrightarrow \mathrm{gr}_z^{\mathbf{Q}}(W,[\mathfrak{C}_0],[\mathfrak{C}])$
- I 命題 4.164 p.350 ℓ 11 $\overline{HS}_*(Y,\mathfrak{s}_Y) \Longrightarrow \overline{HS}_\bullet(Y,\mathfrak{s}_Y)$
- II 命題 5.41 p. 376 の説明
  ℓ 7-12 の 3) に関する説明中 $U(g)$ を $\mathrm{GL}_g(\mathbf{C})$ に，Lag_g を $\mathcal{T}_g$ に置きかえる（2.5 において Maslov 指数の定義を $\mathrm{Sym}^g\,\Sigma$ における全実な部分多様体に対するものに置きかえたことによる変更．Lagrange 部分多様体に対する同様の主張は Floer [F1] で示されていた.）
- II 定義 5.73 p.386 の修正 $\Longrightarrow$
  4 次元多様体 X の有限個の点の集合 P_i と $X \setminus P_i$ の概複素構造 J_i $(i=1,2)$ に対し，X のある 1 次元部分多様体 $C \supset P_1 \cup P_2$ の外で J_1 と J_2 がイソトピックになるとき J_1 と J_2 はホモローグであるという.
- II p.409, ℓ 13 $T_\beta - \beta_1 \Longrightarrow T_\beta = \beta_1$
- II p.409, ℓ 20 $\mathrm{Sym}^{g+\ell}\,\Sigma \Longrightarrow \mathrm{Sym}^{g+\ell-1}\,\Sigma$
- II 命題 7.33 p.480, ℓ 19 の左辺 $SW_{E(1),PD[F]}(1,[\nu]) \Longrightarrow SW_{E(1)}(1,PD[F],\nu)$.
- II 定理 8.53 p.592 ℓ 5. 右辺の総和記号を削除
- I, II 文献 80 の年号 (2009) $\Longrightarrow$ (2019)
- I p.73, ℓ $7-8$ 3) の 3,4 行目 $\Longrightarrow$
  $\overline{\phi}$ を両辺に自明なバンドルを直和したバンドル間の写像に拡張することを法写像の安定化と呼ぶ.

（注：$\overline{\phi}$ はより次元の高いユークリッド空間への埋め込みの法バンドルから ξ と自明バンドルの直和へのバンドル写像に拡張される．その帰納極限が安定法写像である.）

- I p.202, ℓ 7, 命題 3.198 の 2) $\Longrightarrow$
  $r = 0$ かつ $(B, 0)$ が CSD の臨界点で ψ が $\mathcal{D}_B$ の固有ベクトルになる.
- I, p.230, ℓ 20 $\overline{HM}_\bullet(S^3, \Gamma) \Longrightarrow \widehat{HM}_\bullet(S^3, \Gamma)$
- II p.483, ℓ 6 $\langle c_1(\mathcal{P}), [c \times \eta] = 2p\rangle$ 以降　$\Longrightarrow$
  Poincaré バンドル $\mathcal{P}$ に対し，（$c_1(\mathfrak{s})$ がねじれ元である）$\mathfrak{s}$ に対応する Spin バンドル S と第 2 成分への射影 $\pi_2 : \mathbf{T} \times Y \to Y$ により $\mathcal{S} = \mathcal{P} \otimes \pi_2^* S$ とおく．$\mathbf{T}$ のループ c を同一視 $H_1(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) \cong H^1(Y, \mathbf{Z})$ を経由して $\langle c, \eta\rangle = p \neq 0$ となるようにとると，$\langle c_1(\mathcal{S}), [c \times \eta]\rangle = 2p$ となり，$\Gamma_\eta(c)$ は $\mathbf{R}$ に e^{2p} 倍で作用する（以下の主張は本文と同じ）.
- II p.483, 系 7.25, p.485, 定理 7.29 に関する注（2.12 に補足説明あり）
  $SW_X(1)$, $SW_X(1, \Gamma_\nu)$, $SW_X(c)$ に関する主張はそれぞれ一般の u に対する $SW_X(u)$, $SW_X(u, \Gamma_\mu)$, $SW_X(u, c)$ に置きかえても成り立つ（定理 3.256 と定理 3.263 の一般化としてのその局所系版による）.
- II p.487, ℓ 13 $x_1 \Longrightarrow x_{-1}$（2 カ所）
  (注：$\overline{HM}_*(T^3, \mathfrak{s}, \Gamma_\eta) = 0$ より $j = -\overline{\partial}{}^u_s : \check{HM} \to \widehat{HM}$ は同型写像で，チェイン複体レベルでは（符号を除いて）y_0^i $(i = 1, 2, 3)$ を x_{-1} に写す．これより y_0^1, x_{-1} がそれぞれ $\check{HM}$, $\widehat{HM}$ の生成元と見なされる.）

2. 訂正および補足

2.1. 位相多様体の単純ホモトピー型と s コボルディズムへの補足.

位相多様体は一般に単体分割可能とは限らない（I 定理 4.118）ため，その単純ホモトピー型を次のように定義する.（Kirby-Siebenmann[229] Essay III を参照のこと．以下の議論において非コンパクトな場合はホモトピー同値を固有ホモトピー同値，単体複体を局所有限な単体複体に置き換える必要がある.）X を位相多様体とするとき，十分次元の高いユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ に埋め込んで，X 上のある球体バンドル D が X の $\mathbf{R}^N$ における単体分割可能な近傍となるようにできる.

一般に空間 X から単体複体への 2 つのホモトピー同値写像 $f : X \to Y$, $f' : X \to Y'$ に対し，単体複体間の（定義 1.40 の意味の）単純ホモトピー同

値写像 $g: Y \to Y'$ が存在して $g \circ f$ と f' がホモトピックであるとき，f と f' は同値であると定義する．上述の包含写像 $\iota: X \to D$ はホモトピー同値写像でその同値類は埋め込むユークリッド空間や球体バンドル，その単体分割の取り方によらず，これを X の標準的 (canonical) な単純ホモトピー型とみなす．X が単体複体のときは恒等写像 $\mathrm{id}: X \to X$ の同値類が標準的単純ホモトピー型である．単純ホモトピー型を定めた 2 つの空間の間のホモトピー同値写像 $f: X \to X'$ は，X' の単純ホモトピー型を定めるホモトピー同値写像 $g: X' \to Y$ に対して $g \circ f$ が X の単純ホモトピー型を定める写像になるとき単純であると定義する（X, X' が単体複体のときは通常の定義と同値）．これより位相多様体間の同相写像は単純ホモトピー同値写像であることが導かれる (Kirby-Siebenmann[229], Corollary 4.1.1)[1]

なお n 次元位相多様体間のコボルディズム $(X, \partial_- X, \partial_+ X)$ がハンドル分解されるとする（$n \geq 5$ なら存在する（定理 2.30））．包含写像 $\iota: \partial_- X \subset X$ がホモトピー同値写像のとき，フィルトレーション

$$(\dagger) \quad \partial_- X = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n+1} = X$$

（X_k は指数 k 以下のハンドルからなる部分多様体）に対し，$\pi: \widetilde{X} \to X$ を X の普遍被覆, $\widetilde{X}_k = \pi^{-1}(X_k)$ とおくと，これらから定まる $\mathbf{Z}[\pi_1 X]$ 上の非輪状の複体 $C_*(\widetilde{X}, \widetilde{X}_0)$ から Whitehead トーション $\tau(\iota)$ が定義される．このとき部分複体からなるフィルトレーション $Z_0 \subset \cdots \subset Z_{n+1} = Z$ を持つ単体複体 Z と写像 $f: X \to Z$ で各 k に対し単純ホモトピー同値写像 $X_k \to Z_k$ を誘導するものが存在し，$\tau(\iota)$ は包含写像 $Z_0 \subset Z$ から定まるトーションと一致する[2]. これより $\tau(\iota)$ はハンドル分解の仕方によらず，s コボルディズムは DIFF カテゴリーと同様 Whitehead トーションが消える h コボルディズムとして特徴付けられる．また位相的ハンドル分解においても DIFF カテゴリーと同様なハンドルの操作が可能である．$n \geq 5$ なら Whitney トリックによる交叉の解消も可能であるため，DIFF, PL カテゴリーにおける $n+1$ 次元 s コボルディズム定理（Barden, Mazur, Stalling が独立に証明した）と同様な手法で位相的 s コボルディズム定理が証明される．$n = 4$ のときは I 補題 1.58 における設定までハンドル分解を変形することはできる．

---

[1] 単体複体間の同相写像は単純ホモトピー同値写像であることも示されている (Chapman).
[2] ここでは Kirby-Siebenmann, Essay III の記述を簡略化している．詳しくは同書を参照

2.2. 基本群の増大度（定義 2.54）に関する修正と補足.

Γ を有限生成な群, S を Γ を生成する元からなる有限集合とする．$\gamma \in \Gamma$ に対し，$\ell_S(\gamma) = \min\{n \geq 0 \mid \gamma = g_1 \cdots g_n \ (g_i \in S \cup S^{-1})\}$ とおき，Γ の S に関する増大度関数 $f_S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を $f_S(n)$ が $\ell_S(\gamma) \leq n$ となる $\gamma \in \Gamma$ の個数となるように定める.

以下増大度に関する補足.

$\omega(\Gamma, S) = \limsup_{n\to\infty} f_S(n)^{\frac{1}{n}}$ とおく．Γ は $\omega(\Gamma, S) > 1$ のとき指数増大度, $\omega(\Gamma, S) = 1$ のとき部分指数増大度, ある $c > 0$ と $d \geq 1$ に対し $f_S(n) \leq cn^d$ $(n \in \mathbf{N})$ をみたすとき多項式増大度を持つという．また部分指数増大度だが多項式増大度でないとき，中間増大度を持つという．これらの定義は S の取り方によらない．有限生成な群の増大度は上のいずれかをみたす.

- Γ が多項式増大度を持つことと仮想べき零群（有限指数のべき零部分群をもつ）となることは同値である (Gromov).
- 可解群は仮想べき零群か，または指数増大度を持つ (Milnor,Wolf).
- 中間増大度をもつ群が存在する（Grigorchuk 群，ただし有限表示ではない）．中間増大度を持つ有限表示群は現状では知られていない.

以上の詳細については幾何学群論の教科書 [H], [DK] などを参照のこと.

2.3. Seiberg-Witten 写像と Chern-Simons-Dirac 汎関数に関する補足.

標記の方程式と汎関数の表示の仕方は文献により相違がある．I, 3.3.6 では Kronheimer-Mrowka[254] の表示に従っているが，I, 3.3.1 定義 3.89 （Morgan の教科書 [330] による）に基づく文献も多いため，I, 3.3.6 とそれ以前とでは敢えて記述を統一していない．以下 I, 3.3.1, 3.3.5 における表示について補足する.

3 次元閉多様体 Y に対する T^*Y の正規直交基底を $\{e_i\}(i = 1, 2, 3)$, $X = \mathbf{R} \times Y$ に対する T^*X の正規直交基底を $\{e_i\}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ とおく．ただし e_0 は $\mathbf{R}$ の座標 t に関する dt に対応する．X の局所座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) に対し $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$ とおくと $((dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$ が (e_0, e_1, e_2, e_3)

に対応する)，$\wedge^2_+(T^*X)$ の局所的な正規直交基底が

$$\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3) = \frac{i}{2\sqrt{2}}(dz_1 \wedge d\overline{z_1} + dz_2 \wedge d\overline{z_2}),$$
$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_3) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(d\overline{z_1} \wedge d\overline{z_2} + dz_1 \wedge dz_2),$$
$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2) = \frac{i}{2\sqrt{2}}(d\overline{z_1} \wedge d\overline{z_2} - dz_1 \wedge dz_2)$$

で与えられる（I, 3.3.1, p.148, Nicolaescu[341], 1.3, p.31 に対応するが，後者では η_2 の第 3 項の符号が反対になっている）．$\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$ の X への引き戻しを $\widetilde{\mathfrak{s}}$，$\pm$Spin バンドル $S^\pm_X(\widetilde{\mathfrak{s}})$ の Clifford 積を $\widetilde{c}$ とおくと，I, p.148 における $S^\pm(\widetilde{\mathfrak{s}})$ の局所正規直交基底により

$$\widetilde{c}(e_0 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3) = 2\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{c}(e_0 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_3) = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{c}(e_0 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2) = 2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示される．ここで Y の Spin バンドル $S_Y(\mathfrak{s})$ 上の Clifford 積 c を I, 3.3.5 のように $c(e_i) = \widetilde{c}(e_i)\widetilde{c}(e_0)$ $(i = 1, 2, 3)$ となるように定めると $\widetilde{c}|_{\wedge^2_-(T^*X)} = 0$ であるから次の行列表示

$$c(e_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ c(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ c(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

が得られ，$c(e_1)c(e_2)c(e_3) = 1$ を満たす（これは Kronheimer-Mrowka[254] における Pauli 行列による表示

$$c(e_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ c(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ c(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と符号が異なるが，変換 $(e_1, e_2, e_3) \to (e_1, -e_2, -e_3)$ により移り合う）．なお $\psi \in \Gamma(S_Y(\mathfrak{s}))$ に対する $q(\psi) \in \mathfrak{sl}(S_Y(\mathfrak{s}))$ は $S_Y(\mathfrak{s})$ の Hermite 内積を用いて

$$q(\psi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\langle \psi, c(e_i)\psi \rangle c(e_i)$$

とも表されるが，ψ の局所表示 $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ により

$$q(\psi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) & \psi_1\overline{\psi}_2 \\ \overline{\psi_1}\psi_2 & \frac{1}{2}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) \end{pmatrix} = \psi \otimes \psi^* - \frac{1}{2}|\psi|^2 \mathrm{Id}$$

となって同一視 $S_X^+(\widetilde{\mathfrak{s}}) \cong S_Y(\mathfrak{s})$ のもとで X における q の定義（I, 定義 3.88）と一致する．また $\mathfrak{sl}(S_Y(\mathfrak{s}))$ の内積を $\langle A, B\rangle_{\mathfrak{sl}(S)} := \mathrm{Tr} A^*B$ で定義すれば

$$(\dagger)\quad \langle c(e_k), c(e_\ell)\rangle_{\mathfrak{sl}(S)} = 2\delta_{k\ell}, \quad \langle q(\psi), ic(e_k)\rangle_{\mathfrak{sl}(S)} = \langle \psi, ic(e_k)\psi\rangle \in \mathbf{R}$$

が成り立つ．そこで $(A,\psi) \in \mathcal{C}_Y(\mathfrak{s}) = \mathcal{A}(\det \mathfrak{s}) \times \Gamma(S_Y(\mathfrak{s}))$ $(A = A_0 + a,$ ただし A_0 は基準となる接続，$a \in \Omega^1(Y, i\mathbf{R}))$ に対する Chern-Simons-Dirac 汎関数を I, 定義 3.142 によって定める．このとき $(\dot{a}, \dot{\psi}) \in \Omega^1(Y, i\mathbf{R}) \times \Gamma(S_Y(\mathfrak{s}))$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} CSD(A_0 + a + t\dot{a}, \psi + t\dot{\psi}) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(-\frac{1}{2}\int_Y (a + t\dot{a}) \wedge (2F_A - da + td\dot{a}) \\
&\qquad + \int_Y \mathrm{Re}\langle \mathcal{D}_{A+t\dot{a}}(\psi + t\dot{\psi}), \psi + t\dot{\psi}\rangle d\mathrm{vol}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\int_Y (\dot{a} \wedge (2F_A) + d(\dot{a} \wedge a)) \\
&\qquad + \int_Y (\mathrm{Re}(\langle \mathcal{D}_A(\psi), \dot{\psi}\rangle + \langle \mathcal{D}_A\dot{\psi}, \psi\rangle) + \frac{1}{2}\langle c(\dot{a})\psi, \psi\rangle) d\mathrm{vol} \\
&= \langle \dot{a}, *F_A\rangle_{\Omega^1(Y,i\mathbf{R})} + \int_Y (2\mathrm{Re}\langle \mathcal{D}_A\psi, \dot{\psi}\rangle + \frac{1}{2}\langle q(\psi), c(\dot{a})\rangle_{\mathfrak{sl}(S)}) d\mathrm{vol}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで最後の式は $-\int_Y \dot{a} \wedge F_A$ が $\langle \dot{a}, *F_A\rangle_{\Omega^1(Y,i\mathbf{R})}$（後者は $\Omega^1(Y)$ の内積を $\Omega^1(Y, i\mathbf{R})$ の Hermite 内積に拡張したもの，$*$ は $\mathbf{C}$ 線形な Hodge 作用素）に等しいこと，$\mathcal{D}_A$ が自己随伴作用素であること，および $(\dagger)$ から得られる．さらに $\int_Y \langle q(\psi), c(\dot{a})\rangle_{\mathfrak{sl}(S)} d\mathrm{vol} = 2\langle c^{-1}q(\psi), \dot{a}\rangle_{\Omega^1(Y,i\mathbf{R})}$ であることから最後の式は $\langle *F_A + c^{-1}(q(\psi)), \dot{a}\rangle_{\Omega^1(Y,i\mathbf{R})} + 2\int_Y \mathrm{Re}\langle \mathcal{D}_A\psi, \dot{\psi}\rangle$ と変形される．従って $\Omega^1(Y, i\mathbf{R}) \oplus \Gamma(S_Y(\mathfrak{s}))$ の内積を I, 3.3.5 のように

$$(\ddagger)\quad \langle (a,\varphi), (b,\psi)\rangle = -\int_Y a \wedge *b + 2\int_Y \mathrm{Re}\langle \varphi, \psi\rangle d\mathrm{vol}$$

と定めれば命題 3.145 の式

$$\nabla CSD(A,\psi) = (*F_A + c^{-1}(q(\psi)), \mathcal{D}_A(\psi)) \quad ((A,\psi) \in \mathcal{A}(\det \mathfrak{s}) \times \Gamma(S_Y(\mathfrak{s})))$$

が得られる．$(\ddagger)$ の第 2 項を Morgan-Szabó-Taubes[332] にならって 2 倍にしているのは人為的だが，これにより CSD の下向き勾配流が $\mathbf{R} \times Y$ 上の Seiberg-Witten 方程式解（I, 定義 3.89）に一致する（ただし上記の論文では $\mathbf{R} \times Y$ の

Seiberg-Witten 方程式解が CSD の上向き勾配流となるように定義しているため，I, 3.3.5 とは符号が異なる）．

2.4. ブローアップされた Seiberg-Witten モジュライ空間についての修正と補足.

I §3.3.6 におけるコンパクトなシリンダー $Z = I \times Y$ 上の τ モデル $\mathcal{C}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$（定義3.199）のゲージ群 $\mathcal{G}_Z$ による商空間 $\mathcal{B}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ は条件 $s \geq 0$ を課す限り完備化しても Hilbert 多様体にならない．そのため定義3.199 において条件 $s(t) \geq 0$ を外した空間を $\widetilde{\mathcal{C}}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ とおくと，$\widetilde{\mathcal{C}}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ の $\mathcal{G}_Z$ による商空間 $\widetilde{\mathcal{B}}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ は（完備化すれば）Hilbert 多様体になり $\mathcal{B}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ はその部分集合である．$\widetilde{\mathcal{B}}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ に含まれる τ モデルにおける Seiberg-Witten 方程式 SW^{τ} の解空間のとしてのモジュライ空間を $\widetilde{\mathcal{M}}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ とおくと（無限次元の）Hilbert 多様体となり，$\mathcal{B}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ 内のモジュライ空間 $\mathcal{M}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ はその部分空間である．ここで前者の任意の元 $([\widetilde{A}], s, [\widetilde{\psi}])$ において s は恒等的に 0 になるか，または至る所 0 にならず，$([\widetilde{A}], s, [\widetilde{\psi}]) \to ([\widetilde{A}], -s, [\widetilde{\psi}])$ で定義される $\widetilde{\mathcal{M}}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ の対合 ι により，$\mathcal{M}^{\tau}_{Z}(\mathfrak{s}_Z)$ は ι による商空間ともみなされ，境界付き Hilbert 多様体となる．また境界付きコンパクト 4 次元多様体 X に対しても

$$\widetilde{\mathcal{C}}^{\sigma}_{X}(\mathfrak{s}_X) = \{(\widetilde{A}, s, \widetilde{\psi}) \in \mathcal{A}(X) \times \mathbf{R} \times \Gamma(S^{+}_{X}) \mid ||\widetilde{\psi}||_{L^2(X)} = 1\},$$

ゲージ群 $\mathcal{G}_X$ によるその商空間 $\widetilde{\mathcal{B}}^{\sigma}_{X}(\mathfrak{s}_X)$，（摂動された）Seiberg-Witten 方程式 SW^{σ}_{X} の解のなすモジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}^{\sigma}_{X}(\mathfrak{s}_X)$ が定義され，条件 $s \geq 0$ を課した空間 $\mathcal{C}^{\sigma}_{X}(\mathfrak{s}_X)$, $\mathcal{B}^{\sigma}_{X}(\mathfrak{s}_X)$, $\mathcal{M}^{\sigma}_{X}(\mathfrak{s}_X)$ はそれぞれ前者の部分空間である．また $\mathcal{M}^{\sigma}_{X}(\mathfrak{s}_X)$ は上と同様に定義される $\widetilde{\mathcal{M}}^{\sigma}_{X}(\mathfrak{s}_X)$ の対合 ι による商空間ともみなされ，境界付き Hilbert 多様体となる．境界付きコンパクト 4 次元多様体上ではこれら拡張されたモジュライ空間に対してまず解析を行うが，その際に方程式の線形化によって得られる作用素を Fredholm 作用素とするためには境界条件を課す必要がある．そのための一般的な枠組を以下に証明抜きに述べる．詳細は Kronheimer-Mrowka[254] の §17-19 を参照のこと．

以下 X を Y を境界とするコンパクト 4次元多様体で Y のカラー近傍 $(-C, 0] \times Y$ 上直積計量となる計量をもつものとし，E, F を X 上のベクトルバンドルでカラー近傍では Y 上のベクトルバンドル E_0 の射影 $(-C, 0] \times Y \to Y$ による引き戻しとなっているものとする．さらに作用素

$$D = D_0 + K : C^{\infty}(X, E) \to L^2(X, F)$$

で次の条件をみたすものを考える．

(1) D_0 は 1 階の楕円型微分作用素で，カラー近傍上は $C^\infty(Y, E_0)$ 上の 1 階の自己随伴な楕円型作用素 L_0 により $D_0 = \frac{d}{dt} + L_0$ $(t \in (-C, 0])$ と表され，有界作用素 $L^2_{j+1}(X, E) \to L^2_j(X, F)$ $(j \leq k-1)$ に拡張する．

(2) K は有界作用素 $L^2_j(X, E) \to L^2_j(X, F)$ $(j \leq k-1)$ に拡張する．

このとき Y への制限により連続写像 $r : L^2_s(X, E) \to L^2_{s-\frac{1}{2}}(Y, E_0)$ $(s > \frac{1}{2})$ が定義される．また H_0^+, H_0^- をそれぞれ L_0 の正の固有値, 非負の固有値に属する固有ベクトルの張る $L^2_{\frac{1}{2}}(Y, E_0)$ の部分空間とすると $L^2_{\frac{1}{2}}(Y, E_0) = H_0^+ \oplus H_0^-$ とスペクトル分解される．Π_0 を $L^2_{\frac{1}{2}}(Y, E_0)$ から H_0^- への射影とする．

命題 1.

(1)

$$D \oplus \Pi_0 \circ r : L^2_j(X, E) \to L^2_{j-1}(X, F) \oplus (H_0^- \cap L_{j-\frac{1}{2}}(Y, E_0))$$

は *Fredholm* 作用素である．特に $\Pi_0 \circ r|_{\ker D}$ は *Fredholm* 作用素で，さらに $(1 - \Pi_0) \circ r|_{\ker D}$ はコンパクト作用素である．

(2) $\Pi : L^2_{\frac{1}{2}}(Y, E_0) \to L^2_{\frac{1}{2}}(Y, E_0)$ を $\Pi - \Pi_0$ がコンパクト作用素となる射影とし，$H^- = \mathrm{Im}\Pi$, $H^+ = \mathrm{Im}(1 - \Pi)$ とおく．このとき *(1)* の Π_0 と H_0^- を Π と H^- に取りかえた作用素 $D \oplus \Pi \circ r$ についても *(1)* と同じ主張が成り立つ．さらに Π と H^- を

$$\ker \Pi_1 \oplus (H^- \cap L^2_{j-\frac{1}{2}}(Y, E_0)) = L^2_{j-\frac{1}{2}}(Y, E_0)$$

をみたす射影 Π_1 と $H_1^- = \mathrm{Im}\Pi_1$ に取りかえた作用素についても同じ結論が成り立つ．

定義 1. $L = L_0 + h$ を $C^\infty(Y, E_0)$ 上の *1* 階の自己随伴楕円型作用素 L_0 と作用素 $h : C^\infty(Y, E_0) \to L^2(Y, E_0)$ で $L^2_j(Y, E_0)$ 上の有界作用素に拡張するものの和（概自己随伴 *1* 階楕円型作用素）とする．L が双曲型のとき，$Z = (-\infty, 0] \times Y$ における作用素 $D = \dfrac{d}{dt} + L : L^2_1(Z, E) \to L^2(Z, E)$ （E は E_0 の射影 $Z \to Y$ による引き戻し）に対し $H^- = r(\ker D)$ （r は $\{0\} \times Y$ への制限），$D' = \dfrac{d}{dt} - L$ に対し $H^+ = r(\ker D')$ とおくと $L^2_{\frac{1}{2}}(Y, E_0) = H^- \oplus H^+$ をみたす（これも $L^2_{\frac{1}{2}}(Y, E_0)$ のスペクトル分解と呼ぶ）．

境界付き 4 次元多様体 X がシリンダー型エンドも持ち，エンド上で上記の $D = D_0 + K$ が双曲型の概自己随伴 1 階楕円型作用素 $L = L_0 + h$ により

$\dfrac{d}{dt}+L$ と表されている場合（このときエンド上で $D_0=\dfrac{d}{dt}+L_0$）にも上の命題と同じ結論が成り立つ．

これらを境界付きコンパクト4次元多様体 X 上の（拡張された）モジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}_X^\sigma(\mathfrak{s}_X)$ の解析に適用する（以下の説明は概略のみで，完備化や摂動の記号は省略する）．また I, 3.3.6 の定義 3.203, 3.204, 3.207 において $\mathcal{C}_M^\sigma(\mathfrak{s}_M)$ を $\widetilde{\mathcal{C}}_M^\sigma(\mathfrak{s}_M)$ を置きかえて定義した空間に~を付けて表す（M は X または $Y=\partial X$）．$R:\widetilde{\mathcal{M}}_X^\sigma(\mathfrak{s}_X)\to\widetilde{\mathcal{B}}_Y^\sigma(\mathfrak{s}_Y)$ を Y への制限とする．$[\gamma]\in\widetilde{\mathcal{M}}_X^\sigma(\mathfrak{s}_X)$ における $\widetilde{\mathcal{M}}_X^\sigma(\mathfrak{s}_X)$ の接空間は

$$\mathbf{D}_\gamma^\sigma=D_\gamma\mathcal{SW}^\sigma+d_\gamma^{\sigma,\dagger}:\widetilde{\mathcal{T}}_\gamma^\sigma\to\widetilde{\mathcal{V}}_\gamma^\sigma\oplus\Omega^0(X,i\mathbf{R})$$

の零点集合であり，Y のカラー近傍 $(-C,0]\times Y$ 上では $\mathbf{D}_\gamma^\sigma$ は γ をテンポラルゲージにより $\check{\gamma}(t)$ と表すと拡張された Hessian により $\dfrac{D}{dt}+\widehat{\mathrm{Hess}}_{\check{\gamma}(t)}^\sigma$ と表される．一方 R の $[\gamma]$ における微分は $[\mathfrak{a}]=R([\gamma])$ とおくと

$$D_{[\gamma]}R:T_{[\gamma]}\widetilde{\mathcal{M}}_X^\sigma(\mathfrak{s}_X)\to\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^\sigma$$

と表される．$\widehat{\mathrm{Hess}}_\mathfrak{a}^\sigma$ は概自己随伴1階楕円型作用素であり，その $\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^\sigma$ への制限により $\mathrm{Hess}_\mathfrak{a}^\sigma$ によるスペクトル分解 $\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^\sigma=\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^+\oplus\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^-$ が定義される（$\mathrm{Hess}_\mathfrak{a}^\sigma$ は双曲型とは限らないが，その場合は双曲型になるよう $\mathrm{Hess}_\mathfrak{a}^\sigma-\epsilon$ に置きかえる）．ここで $\Pi:\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^\sigma\to\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^-$ を射影とすると上の命題から $\Pi\circ D_{[\gamma]}R:T_{[\gamma]}\widetilde{\mathcal{M}}_X^\sigma(\mathfrak{s}_X)\to\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^-$, $(1-\Pi)\circ D_{[\gamma]}R:T_{[\gamma]}\widetilde{\mathcal{M}}_X^\sigma(\mathfrak{s}_X)\to\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^+$ はそれぞれ Fredholm 作用素，コンパクト作用素となる．

なお上述の制限写像 R を R^+ とおき，$Z=[0,\infty)\times Y$ 上の（拡張された）モジュライ空間でエンドで ∇CSD^σ の特異点 $[\mathfrak{b}]$ に近づくものを $\widetilde{\mathcal{M}}_Z^\tau(\mathfrak{s}_Z,[\mathfrak{b}])$（$\mathfrak{s}_Z$ は $\mathfrak{s}_Y$ の自然な拡張），その $\{0\}\times Y$ への制限写像を $R^-:\widetilde{\mathcal{M}}_Z^\tau(\mathfrak{s}_Z,[\mathfrak{b}])\to\widetilde{\mathcal{B}}_Y^\sigma(\mathfrak{s}_Y)$ とおくと，X にシリンダー $Z=[0,\infty)\times Y$ を付加した多様体 X^* 上の（拡張された）モジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}_{X^*}^\sigma(\mathfrak{s}_X,[\mathfrak{b}])$[3]が R^+ と R^- のファイバー積として特徴付けされる．$[\gamma]\in\widetilde{\mathcal{M}}_{X^*}^\sigma(\mathfrak{s}_X,[\mathfrak{b}])$ に対し，$[\gamma_1]=[\gamma|_X]$, $[\gamma_2]=[\gamma|_Z]$, $[\mathfrak{a}]=R^+([\gamma_1])=R^-([\gamma_2])$ とおいて R^- の微分 $D_{[\gamma_2]}R^-:T_{[\gamma_2]}\widetilde{\mathcal{M}}_Z^\tau(\mathfrak{s}_Z)\to\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^\sigma$ を考える．このとき $\partial Z=-Y$ であることから，上と同じスペクトル分解 $\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^\sigma=\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^+\oplus\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^-$（必要なら Hessian を双曲型となるよう変形する）において $\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^\pm$ の役割が入れ変わり，射影 $\Pi:\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^\sigma\to\widetilde{\mathcal{K}}_\mathfrak{a}^-$ に対し，$(1-\Pi)\circ D_{[\gamma_2]}R^-$ が

[3] $\mathfrak{s}_X$ の X^* への拡張も同じ記号で表す

Fredholm 作用素，$\Pi \circ D_{[\gamma_2]}R^-$ がコンパクト作用素になる．これより

$$D_{[\gamma_1]}R^+ + D_{[\gamma_2]}R^- : T_{[\gamma_1]}\widetilde{\mathcal{M}}^{\sigma}_X(\mathfrak{s}_X) \oplus T_{[\gamma_2]}\widetilde{\mathcal{M}}^{\tau}_Z(\mathfrak{s}_Z,[\mathfrak{b}]) \to T_{[\mathfrak{a}]}\widetilde{\mathcal{B}}^{\sigma}_Y(\mathfrak{s}_Y)$$

は Fredholm 作用素となる．この作用素の指数は $[\mathfrak{b}]$ および $[\gamma]$ の表すホモトピー類 $z \in \pi_0(\mathcal{B}^{\sigma}_{X^*}([\mathfrak{b}])$ にのみ依存し，I, 定義 3.229 における $\mathbf{gr}_z(X,[\mathfrak{b}]) = \mathrm{ind}(r^+ - r^-)$ と一致する．一般には

$$\mathbf{gr}_{z_1\circ z_2}(X,[\mathfrak{b}]) = \mathbf{gr}_{z_2}(X,[\mathfrak{a}]) + \mathbf{gr}_{z_1}([\mathfrak{a}],[\mathfrak{b}])$$

が成り立つ．これにより摂動後 $\widetilde{\mathcal{M}}^{\sigma}_{X^*}(\mathfrak{s}_X,[\mathfrak{b}]), \mathcal{M}^{\sigma}_{X^*}(\mathfrak{s}_X,[\mathfrak{b}]) = \widetilde{\mathcal{M}}^{\sigma}_{X^*}(\mathfrak{s}_X,[\mathfrak{b}])/\iota$ はそれぞれ多様体，多様体または境界付き多様体となり，I, 命題 3.230 以下の議論が成り立つ．

2.5. 正則円板のモジュライ空間と Maslov 指数 (II, §5.5, 5.6) に関する訂正と補足.

Y の基点付き Heegaard 図式 (Σ,α,β,z) に対する T_α, T_β は $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ の Kähler 形式 $\omega = \mathrm{Sym}\,\eta$ に対する Lagrange 部分多様体で，$\mathrm{Sym}^g\Sigma$ の概複素構造の集合 $\mathcal{J}$（II 定義 5.30）の元 J は $\omega(\xi,J\xi) > 0$ $(\xi \neq 0)$ をみたす（ω tame）ため T_α, T_β は $J \in \mathcal{J}$ に対して全実 (totally real) である．しかし J は ω に両立するとは限らないため，概正則円板のモジュライ空間の次元を表す Maslov 指数も全実な部分多様体に関するものに置きかえる必要がある．

(1)　実 $2n$ 次元ベクトル空間 V とその複素構造 J（$J^2 = -I$ をみたす V の線形変換）に対し，V の部分空間 W が J に関して全実 $\Longleftrightarrow$ $\dim W = n$ かつ $W \cap JW = \{0\}$．(V,J) と $(\mathbf{R}^{2n},J_0)$（J_0 は $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ で表される $\mathbf{R}^{2n}$ の標準的複素構造）との間に同型写像 $\Phi : \mathbf{R}^{2n} \to V$, $(J\Phi = \Phi J_0)$ が存在する．そのため $\mathcal{T}(V) = \{W \mid V$ の J に関する全実な部分空間 $\}$ は $\mathcal{T}(n) = \{W \mid \mathbf{C}^n$ の i に関する全実な部分空間 $\}$ と同一視され，後者は

$$\mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)/\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{T}(n),\ A \bmod \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n) \to A\mathbf{R}^n \quad (\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n)$$

により $\mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)/\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ と同型になる．これより単位行列 I を基点とするホモトピー群の完全系列

$$0 \to \pi_1(\mathrm{GL}(\mathbf{C}^n),I) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)/\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n),I) \xrightarrow{\delta} \pi_0(\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)) \to 0$$

より次の完全系列が導かれる．

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathcal{T}(n),\mathbf{R}^n) \xrightarrow{\delta} \{1,-1\} \to 0.$$

ここで $\pi_1(\mathcal{T}(n), \mathbf{R}^n) \cong \mathbf{Z}$ であり，$t \to (e^{\pi i t}\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^{n-1})$ $(t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ で与えられるその生成元 α が $\mathcal{T}(n)$ の Maslov クラス，$\mathcal{T}(n)$ の（$\mathbf{R}^n$ を基点とする）閉曲線 ϕ に対し $[\phi] = \alpha^{\mu(\phi)} \in \pi_1(\mathcal{T}_n, \mathbf{R}^n)$ をみたす $\mu(\phi) \in \mathbf{Z}$ が ϕ の Maslov 指数と呼ばれる．$U(n) \subset \mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)$, $O(n) \subset \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ が変位レトラクトで $\pi_1(U(n)/O(n))$ と $\pi_1(\mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)/\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n))$ が同型であることから，$\mathcal{L}(n) = \{W \mid W$ は ω_0 に関する $\mathbf{R}^{2n}$ の部分空間$\}$（ω_0 は $\mathbf{R}^{2n} \cong \mathbf{C}^n$ の標準的シンプレクティック形式）の閉曲線に制限すれば $\mu(\phi)$ は Lagrange 部分空間に関する Maslov 指数と一意する．

(2)　$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_\alpha \cap T_\beta$ をつなぐ Whitney 円板 $u : \mathbf{D} = [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathrm{Sym}^g(\Sigma)$（定義 5.31）で $\mathcal{J}$ の 1 パラメータ族 J_s に関して $\overline{\partial}_{j_s} u = 0$ をみたすもの（定義 5.32）に対し，自明化 $\Phi : u^* T\,\mathrm{Sym}^g(\Sigma) \cong \mathbf{D} \times \mathbf{C}^g$ を各 $T_{u(s,t)}\,\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ $((s,t) \in [0,1] \times \mathbf{R})$ で $\Phi J_s = J_0 \Phi$（J_0 は $\mathbf{C}^g \cong \{(s,t)\} \times \mathbf{C}^g$ の標準的複素構造）となるように選ぶ．このとき Φ による $T_{u(1,t)}T_\alpha$, $T_{u(0,t)}T_\beta$ の像によって定まる $\mathbf{C}^g$ の部分空間 $L_1(t)$, $L_0(t)$ から $L_0(\pm\infty) = \lim_{t \to \pm\infty} L_0(t)$, $L_1(\pm\infty) = \lim_{t \to \pm\infty} L_1(t)$ が定まり，これらは J_0 に関して全実な $\mathbf{C}^g$ の部分空間となる．また Φ は同型写像

$$T_{\mathbf{x}}T_\alpha \cong L_1(-\infty), T_{\mathbf{y}}T_\alpha \cong L_1(\infty), T_{\mathbf{x}}T_\beta \cong L_0(-\infty), T_{\mathbf{y}}T_\beta \cong L_0(\infty)$$

を引き起こす．このとき $\gamma : \partial([0,1] \times [-T,T]) \to \mathcal{T}(g)$ を定義 5.39 と同様に定めると γ のホモトピー類の定める Maslov 指数が u のホモトピー類 $[u] \in \pi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の Maslov 指数 $\mu([u])$ とみなされる．

Fukaya-Oh-Ohta-Ono(FOOO)[150] では，$\mathcal{T}(n)$ の閉曲線 $\gamma : S^1 \to \mathcal{T}(n)$ に対し微分同相写像

$$B : \mathcal{T}(n) \cong \mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)/\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n) \to \{A \in \mathrm{GL}(\mathbf{C}^n) \mid A\overline{A} = I\}$$
$$A \cdot \mathbf{R}^n \to A^{-1}\overline{A}$$

を用いて $\mu(\gamma)$ を $\det \circ B \circ \gamma : S^1 \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ の回転数として定義し，一般化された Maslov 指数と呼んでいる．これは上述の定義（例えば [AH] の Appentix にある）と同値.

次の定理は Floer [F1], [F2] が最初に示した（[FOOO] Proposition 2.3.6. 文献に合わせて変数の順序と Cauchy-Riemann 作用素を II の本文と入れ変えて記述する）．以下 (P, L_0, L_1) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とその

Lagrange 部分多様体で横断的に交わるものの対とし，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_0 \cap L_1$ を固定する．

定理 1. $L^p_{1,\mathrm{loc}}$ $(p>2)$ に属する写像 $u : \mathbf{D} = \mathbf{R} \times [0,1] \to P$ で次の性質をみたすもののなす空間を $\mathcal{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ とおく．

- $u(\tau, i) \in L_i \quad (\tau \in \mathbf{R},\ i = 0,1)$.
- 十分大きな T に対して

  $$\xi_- \in L^p_{1,\delta}((-\infty,-T)\times[0,1]), \quad \xi_+ \in L^p_{1,\delta}((T,\infty)\times[0,1])$$

  が存在して $u = \exp_{\mathbf{x}} \xi_-$ $(\tau < -T)$, $u = \exp_{\mathbf{y}} \xi_+$ $(\tau > T)$ と表され，特に $\lim_{\tau\to-\infty} u(\tau,t) = \mathbf{x}$, $\lim_{\tau\to\infty} u(\tau,t) = \mathbf{y}$ となる（$L^p_{1,\delta}$ の定義は *II,* 定義 *5.31* におけるものと同様）．

さらにエネルギー有界[4]かつ次の条件をみたす $\mathcal{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ の部分空間を $\mathcal{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ とおく．

- *(P* のシンプレクティック構造と両立する）概複素構造の *1-*パラメータ族 J_t に対し

  $$\overline{\partial}_{J_t} u := (\frac{d}{d\tau} + J_t \frac{d}{dt}) u = 0.$$

また $u \in \mathcal{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ における $\overline{\partial}_{J_t}$ の線形化作用素を

$$\overline{\partial}_u : T_u\mathcal{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to L^p_\delta(\mathbf{D}, u^*TP), \quad \xi \to \overline{\partial}_{J_t}\xi + (\nabla_\xi J_t)\partial_t \xi$$

とおく．このとき $J_t\partial_t$ は L_0 から L_1 への路の空間 $\Omega(L_0,L_1)$ の定値な路 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ における接空間 $T_{\mathbf{x}}\Omega(L_0,L_1)$, $T_{\mathbf{y}}\Omega(L_0,L_1)$ においてそれぞれ形式的自己共役作用素 $A_{\mathbf{x}}$, $A_{\mathbf{y}}$ を定める．

(1) $\delta > 0$ を $\mathrm{Spec}(A_{\mathbf{x}}) \cup \mathrm{Spec} A_{\mathbf{y}}$ と交わらないようにより，J_t を十分一般にとると任意の $u \in \mathcal{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ に対し $\overline{\partial}_u$ は *Fredholm* 作用素で，$\mathcal{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は次元がその指数 $\mathrm{ind}\,\overline{\partial}_u$ に等しい非特異多様体となる．

(2) さらに $\mathrm{ind}\,\overline{\partial}_u$ は u から定まる *Maslov* 指数 $\mu(u)$ に等しい．

この定理のより精確な証明は [FHS], [Oh1] 等にある．

なお u は同一視 $\mathbf{D} \cong (0,1)\times[0,1]$ のもと $\overline{u}(\{0\}\times[0,1]) = \mathbf{x}$, $\overline{u}(\{1\}\times[0,1]) = \mathbf{y}$ をみたす写像 $\overline{u} : [0,1]^2 \to P$ に拡張する．また $T_{\mathbf{x}}(L_i) := \lim_{\tau\to-\infty} T_{u(\tau,i)} L_i$,

[4]Heegaard Floer 理論における $(\mathrm{Sym}^g(\Sigma), T_\alpha, T_\beta)$ の場合は，概複素構造の族を固定しておくとホモトピー類をとる写像 $\mathcal{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \pi_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ による $\phi \in \pi_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ の逆像 $\mathcal{M}(\phi)$ はエネルギー有界条件をみたす（II 命題 5.45）

$T_{\mathbf{y}}(L_i) := \lim_{\tau\to\infty} T_{u(\tau,i)}L_i$ $(i=0,1)$ が存在し，自明化 $\Phi : u^*TP \cong \mathbf{D}\times\mathbf{C}^n$ を $T_{u(\tau,i)}L_i$ $(i=0,1)$ が $\mathbf{C}^n$ の標準的シンプレクティック構造に関する Lagrange 部分空間となるようにとってこれを自明化 $T_{\mathbf{x}}P \cong \mathbf{C}^n$, $T_{\mathbf{y}}P \cong \mathbf{C}^n$ で $\Phi(T_{\mathbf{x}}L_i)$, $\Phi(T_{\mathbf{y}}L_i)$ がそれぞれ $\mathbf{C}^n$ の Lagrange 部分空間となるように拡張する．さらに Φ を $\Phi(T_{\mathbf{x}}L_1) = i\Phi(T_{\mathbf{x}}L_0)$, $\Phi(T_{\mathbf{y}}L_1) = i\Phi(T_{\mathbf{y}}L_0)$ となるように取ることができる．このとき $\mu(u)$ は次の条件

$$\begin{aligned}&(\tau,i) \to \Phi(T_{u(\tau,i)}L_i) \quad (i=0,1)\\ &(0,t) \to e^{-i\pi t/2}\Phi(T_{\mathbf{x}}L_1), \quad (1,t) \to e^{i\pi t/2}\Phi(T_{\mathbf{y}}L_0)\end{aligned}$$

で定まる $\mathcal{L}(n)$ の閉曲線 $\partial[0,1]^2 \to \mathcal{L}(n)$ の Maslov 指数であり，Viterbo 指数と呼ばれる．なお L_i $(i=0,1)$ が P の J_t に関する全実な部分多様体である場合も同様にして一般化された Maslov 指数（一般化された Viterbo 指数）が定義され，上記の定理はこの場合も成り立つ．

上記の定理 (2) に関しては，拡張した命題が成り立つ（より一般化された設定で [FOOO] に記述がある．Lemma 3.7.69）．$\ell \in \Omega(L_0, L_1)$ を 1 つ固定し，$w : \Theta := [0,\infty)\times[0,1] \to P$ を

$$\begin{aligned}&w(0,t) = \ell(t), \quad \lim_{\tau\to\infty} w(\tau,t) = \mathbf{x} \quad (t\in[0,1])\\ &w(\tau,i) \in L_i \quad (\tau\in[0,\infty),\ i=0,1)\end{aligned}$$

をみたす写像とし，同一視 $[0,\infty) \cong [0,1)$ を経由して $(1,t)$ 上 $\mathbf{x}$ となる写像 $\overline{w} : [0,1]^2 \to P$ に拡張する．さらに自明化 $\Phi : w^*TP \cong \Theta\times\mathbf{C}^n$ を $T_{\mathbf{x}}L_i := \lim_{\tau\to\infty} T_{w(\tau,i)}L_i \cong \mathbf{C}^n$ に関して $\Phi(T_{\mathbf{x}}L_1) = i\Phi(T_{\mathbf{x}}L_0)$ となるように拡張し，$\lambda(t) \subset \ell^*TP$ $(t\in[0,1])$ を $\lambda(i) = T_{w(0,i)}L_i$ $(i=0,1)$, $\lambda(t)$ が $T_{\ell(t)}P \cong \mathbf{C}^n$ の Lagrange 部分空間となる 1 パラメータ族とする．これに対し

$$W^p_{1,\delta} = \{\xi \in L^p_{1,\delta}(\Theta, w^*TP) \mid \xi(0,t)\in\lambda(t),\ \xi(\tau,i) \in T_{w(\tau,i)}L_i\ (i=0,1)\}$$

とおいて上述と同様な Cauchy-Riemann 作用素の線形化を

$$\overline{\partial}_w : W^p_{1,\delta} \to L^p_\delta(\Theta, w^*TP)$$

とおく．さらに $\mathcal{L}(n)$ の閉曲線 $\gamma : \partial[0,1]^2 \to \mathcal{L}(n)$ で次の条件

$$\begin{aligned}&\gamma(0,t) = \Phi(\lambda(t)), \quad \gamma(1,t) = e^{\pi i t/2}\Phi(T_{\mathbf{x}}L_0)\\ &\gamma(\tau,i) = \Phi(T_{w(\tau,i)}L_i) \quad (i=0,1)\end{aligned}$$

をみたすもののホモトピー類により Maslov 指数 $\mu(w)$ を定める．

命題 2. $\overline{\partial}_w$ は *Fredholm* 作用素で $\mathrm{ind}\,\overline{\partial}_w = \mu(w)$ が成り立つ.

この命題の等式の証明は Fredholm 作用素と Maslov 指数のホモトピー不変性により $T_{\mathbf{x}}P = \mathbf{C}^n$, $T_{\mathbf{x}}L_0 = \mathbf{R}^n$, $T_{\mathbf{x}}L_1 = i\mathbf{R}^n$ かつ

$$W^p_{1,\delta} = \{\xi \in L^p_{1,\delta}(\Theta, \mathbf{C}^n) \mid \xi(\tau, 0) \in \mathbf{R}^n, \quad \xi(\tau, 1) \in i\mathbf{R}^n, \\ \xi(0,t) \in (e^{-(\ell_1+1/2)\pi it}\mathbf{R} \oplus \cdots \oplus e^{-(\ell_n+1/2)\pi it}\mathbf{R})\}$$

に対する標準的な Cauchi-Riemann 作用素

$$\overline{\partial} : W^p_{1,\delta} \to L^p_\delta(\Theta, \mathbf{C}^n)$$

の場合の証明に帰着される. この場合 $\mathrm{ind}\,\overline{\partial}$ は 1 次元の場合

$$\overline{\partial}\zeta = 0,\ \zeta(\tau, 0) \in \mathbf{R},\ \zeta(\tau, 1) \in i\mathbf{R},\ \zeta(0,t) \in e^{(-\ell_j+1/2)\pi i}\mathbf{R}$$

の指数の和であり, 計算により $\mathrm{ind}\,\overline{\partial} = \sum_{j=1}^n(\ell_j + 1) = \sum_{j=1}^n \ell_j + n$ となる ([Oh2], Appendix). 一方対応する Maslov 指数は

$$\gamma(\tau, 0) \in \mathbf{R}^n,\ \gamma(\tau, 1) \in i\mathbf{R}^n, \\ \gamma(0,t) \in \oplus_{j=1}^n e^{-(\ell_j+1/2)\pi it}\mathbf{R},\ \gamma(1,t) \in e^{\pi it/2}\mathbf{R}^n$$

をみたす $\gamma : \partial[0,1]^2 \to \mathbf{C}^n$ のホモトピー類であり, $\sum_{j=1}^n \ell_j + n$ となって $\mathrm{ind}\,\overline{\partial}$ に一致する.

なお $u \in \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対して, $w\sharp u$ が自然に定義され, $w\sharp u$ と(写像 $[0,\infty) \to \Omega(L_0, L_1)$ として)ホモトピックな w'($\mathbf{x}$ を $\mathbf{y}$ に変えて w と同様な境界条件をもつ)をとると $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ が L_0 と L_1 の横断的な交叉点であることから, $\mathrm{ind}\,\overline{\partial}_{w'} = \mathrm{ind}\,\overline{\partial}_w + \mathrm{ind}\,\overline{\partial}_u$ が成り立ち, 一方で

$$\mu(u) = \mu(w') - \mu(w)$$

となる[5]. これから定理 (2) を示すこともできる. 以上の議論は L_0, L_1 が P の概複素構造 J_t に関して全実である場合にも成り立ち, Heegaard Floer 理論における $(\mathrm{Sym}^g\,\Sigma, T_\alpha, T_\beta)$ の場合にも適用できる.

[5] [FOOO] では「Maslov-Viterbo 指数」$\mu(u)$ を(ℓ_0 を一旦固定して)上の右辺を用いた形で定義している(u のホモトピー類にしかよらない).

2.6. 楕円曲面の Seiberg-Witten 不変量に間する補足.

(1) 有理楕円曲面 $E(1) = \mathbf{C}P^2 \sharp 9\overline{\mathbf{C}P}^2$ については，$b_2^+ = 1$, $b_2^- = 9$ であることから，Seiberg-Witten 方程式を摂動せず計量のみを動かした場合は Seiberg-Witten 不変量の壁越は起こらず常に 0 である（I, 注 3.122. 壁となるべき $c_1(\mathfrak{s})^\perp$ ($\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}(E(1))$) が $H^2(E(1), \mathbf{R})$ の正の錐と交わらないことが Schwarz 不等式によりわかる）．しかし方程式と計量をともに摂動すると壁越が起こり，$SW_{E(1)}(1, PD[F], \nu)$ は II, 7.1.4, p. 489 で述べたように表される（F は $E(1)$ の一般ファイバー，ν は $F \cdot \nu \neq 0$, $\nu \cdot \nu = 0$ をみたす $E(1)$ の 2 次元サイクル）．その表示は Kronheimer-Mrowka[254], 27.5 の議論から導かれ，pp. 579-580 の式と同等である．これを書き直すと II, 命題 7.33 の公式

$$(*) \quad SW_{E(1)}(1, PD[F], \nu) = -\frac{1}{2\sinh(\langle PD[F], [\nu]\rangle)}$$

が得られる（本文では左辺を $SW_{E(1),PD[F]}(1, [\nu])$ と書いているが同じもの）．左辺は $\langle PD[F], [\nu]\rangle$ の正負により 2 通りに場合分けされるが，$x = \langle [F], [\nu]\rangle$ とおいたとき，右辺の 2 通りの形式的展開

$$-\frac{1}{e^x - e^{-x}} = \begin{cases} -\frac{1}{e^x(1-e^{-2x})} = -e^{-x} - e^{-3x} - \cdots \\ \frac{1}{e^{-x}(1-e^{2x})} = e^x + e^{3x} \cdots \end{cases}$$

を対応させることにより 1 つの式で表される．なお Kronheimer-Mrowka の公式 (27.18) では $(*)$ の右辺の $-$ の符号が落ちており，それ以前の式と符号が一致しない．これにより $D^2 \times T^2$ の相対不変量を II, 命題 7.35 のように

$$\Psi_{D^2 \times T^2, \nu} = -\frac{1}{2\sinh([\{0\} \times T^2] \cdot [\nu])}$$

と定義する（Kronheimer-Mrowka の 38.2 では前述の理由により公式の右辺が $-$ のない形になっている）．こうすると T^3 に沿う Taubes[414] の公式における $D^2 \times T^2$ の不変量の定義（$t = PD[\{0\} \times T^2]$ に対し $t + t^3 + \cdots$ となっている）と符号が整合的になる．

(2) 以上の結果とファイバー和公式により楕円曲面 $E(k)_{m_1,\cdots,m_r}$ の Seiberg-Witten 不変量が

$$SW_{E(k)_{m_1,\cdots,m_r}}(1, \nu) = (-2)^{(k-2)} \frac{(\sinh(f \cdot \nu))^{k-2+r}}{\prod_{i=1}^r \sinh(f_i \cdot \nu)}$$

と表される（f, f_i はそれぞれ楕円曲面の一般ファイバー，重複度 m_i の多重ファイバー．II, 定理 8.53 での公式の右辺の総和記号は不要なので削除する）．なお Kronheimer-Mrowka の Theorem 38.2.3 では右辺の -2 のべきが 2 のべきになっているが，上記のようにしないと代数幾何的計算による不変量の値（II, 定理 8.48）と符号が一致しない．

2.7. **エキゾチック微分構造に関する補足.**

複素曲面と同相だが微分同相でないある種の 4 次元多様体が複素構造をもたないことの証明は，しばしば Enriques-Kodaira の分類表との比較および Seiberg-Witten 不変量の相互比較によって行われる．例として II, 系 7.89 におけるエキゾチック $K3$ 曲面に関連して次が成り立つ．

命題 3. $K3$ 曲面 X の楕円曲面としての一般ファイバー T に関し $\Delta_K(t) \neq 1$ となる結び目 K で手術して得られる *4* 次元多様体 X_K は $K3$ 曲面と同相だが，複素曲面と微分同相ではない．

証明. X_K は Freedman の定理により $K3$ 曲面と同相だが，もし複素曲面と微分同相ならばその複素曲面は極小で，楕円曲面でしかあり得ない（極小一般型代数曲面については $c_1^2 > 0$ であり，c_1^2 がオイラー数と符号数で表される位相不変量であることに注意すれば X_K については $c_1^2 = 0$ であり，両者はホモトピー同値ではない）．ここで $SW_X = 1$ であるから結び目手術公式 (II, 定理 7.82) より $SW_{X_K} = \Delta_K(e^{2[T]})$（$[T]$ は T の Poincare 双対）である．一方 $K3$ 曲面と同相な楕円曲面の場合すべての Seiberg-Witten 類に対する Seiberg-Witten 不変量の値は同一である（実際すべての不変量の値は 1．II, 定理 8.48, 系 8.49 の $k = 2$ の場合に相当する）．これより $\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i(t^i + t^{-i})$ とおくと，0 でない a_i の値はすべて同一でなければならないが，$1 = \Delta_K(1) = a_0 + 2\sum_{i=1}^m a_i$ ゆえ，$\Delta_K(t) \neq 1$ ならばこれをみたす K は存在しない．証明終

なお $\Delta_K(t) \equiv 1$ となる K（無限個存在する）に対しては X_K の微分同相類を決定することは現時点では困難である．

2.8. **Manolescu κ 不変量に関する補足.**

有理ホモロジー 3 球面 Y とその Spin 構造 $\mathfrak{s}$ に対する Manolescu[296] の κ 不変量に関わる一連の不等式（I, 定理 4.125, 系 4.127）に関して，I, p.330 の脚注にある特別な条件について補足する．以下 I,4.6 の記号を使う．

定義 2 (Manolescu[296]). $G = \mathrm{Pin}(2)$ に対し $R(G)$ の生成元を z,w とおき (*I*, 命題 *4.119*), X をレベルが偶数の *SWF* 空間とする (*I*, 定義 *4.103*). $R(G)$ のイデアル $\mathcal{J}(G)$ (*I*, 定義 *4.120*) がある $k \geq 0$ により z^k で生成されるとき, X を K_G 分裂型 (K_G *split*) と呼ぶ.

これに関連して I, 命題 4.123 を強めた次の命題が示される.

命題 4 (Manolescu[296]). $X,\ X'$ をそれぞれレベルが $2t,\ 2t'$ の *SWF* 空間で $t < t'$ とし, X が K_G 分裂型であるとする. このとき G 同変写像 $f : X \to X'$ で G 不変部分空間への制限がホモトピー同値写像であるものが存在すれば, $k(X) + t + 1 \leq k(X') + t'$ である ($k(X)$ の定義は *I*, 命題 *4.121*).

定義 3 (Manolescu[296]). $(Y, \mathfrak{s})$ に対し有限次元近似された *Seiberg-Witten* 軌道から定まる空間とその *Conley* 指数を $V^{\nu}_{-\nu},\ I_{\nu} = I^{\nu}_{-\nu}$ とする（*I*, 定義 *4.124*. そこでは $V^{\mu}_{\lambda},\ I^{\mu}_{\lambda}$ と表している）. X を I_{ν} （$\dim V^0_{-\nu}(\widetilde{\mathbf{R}}) = 2t$ のとき）, または $\Sigma^{\widetilde{\mathbf{R}}} I_{\nu}$（$\dim V^0_{-\nu}(\widetilde{\mathbf{R}}) = 2t - 1$ のとき）とおくと X はレベル $2t$ の *SWF* 空間である. X が K_G 分裂型のとき $(Y, \mathfrak{s})$ を *Floer* K_G 分裂型という.

このとき κ 不変量（I, 定義 4.124）に関して I, 定理 4.126 を強めた次の結果が成り立つ.

定理 2. $(Y_i, \mathfrak{s}_i)$ $(i = 0, 1)$ を有理ホモロジー *3* 球面とその Spin 構造, $(W, \mathfrak{s}_W)$ を $b_1(W) = 0$ かつ $\partial(W, \mathfrak{s}_W) = (Y_1, \mathfrak{s}_1) \cup (-Y_0, \mathfrak{s}_0)$ をみたすコンパクト Spin*4* 次元多様体とする. $(Y_0, \mathfrak{s}_0)$ が *Floer* K_G 分裂型のとき次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\kappa(Y_0) - \kappa(Y_1) \\
&\quad \leq \begin{cases} b_2^+(W) + \frac{\sigma(W)}{8} - 1 & (b_2^+(W) \text{ が奇数のとき}) \\ b_2^+(W) + \frac{\sigma(W)}{8} - 2 & (b_2^+(W) \text{ が正の偶数のとき}) \end{cases}
\end{aligned}$$

$b_2^+(W) = 0$ のときは上の不等式は一般に成り立たない. 特に $(S^3, \mathfrak{s}_0)$（$\mathfrak{s}_0$ は S^3 の唯一の Spin 構造）は Floer K_G 分裂型であることから次の系が導かれる.

系 1. $(Y, \mathfrak{s})$ を有理ホモロジー *3* 球面とその Spin 構造, $(W, \mathfrak{s}_W)$ を $b_1(W) = 0$ かつ $\partial(W, \mathfrak{s}_W) = (Y, \mathfrak{s})$ をみたすコンパクト Spin*4* 次元多様体とするとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\kappa(Y,\mathfrak{s}) \geq \begin{cases} 1 - b_2^+(W) - \frac{\sigma(W)}{8} & (b_2^+(W) \text{ が奇数のとき}) \\ 2 - b_2^+(W) - \frac{\sigma(W)}{8} & (b_2^+(W) \text{ が正の偶数のとき}) \end{cases}$$

さらに $(Y,\mathfrak{s})$ が *Floer* K_G 分裂型のときは次も成り立つ.

$$\kappa(Y,\mathfrak{s}) \leq \begin{cases} b_2^-(W) - \frac{\sigma(W)}{8} - 1 & (b_2^-(W) \text{ が奇数のとき}) \\ b_2^-(W) - \frac{\sigma(W)}{8} - 2 & (b_2^-(W) \text{ が正の偶数のとき}) \end{cases}$$

Monolescu の論文では一連の不等式は Y_i が整ホモロジー 3 球面のときに示されているが，有理ホモロジー 3 球面の場合に容易に拡張可能である.

2.9. **Seiberg-Witten 特異軌道のモジュライ空間の局所構造.**

ブローアップされた Seiberg-Witten 特異軌道のモジュライ空間 (I, 定義 3.216) $\breve{\mathcal{M}}^{\tau,+}_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}],[\mathfrak{b}])$ における

$$\prod_{i=1}^{n} \breve{\mathcal{M}}^{\tau}_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{i-1}],[\mathfrak{a}_i]) \quad ([\mathfrak{a}]=[\mathfrak{a}_0],[\mathfrak{a}_1],\cdots,[\mathfrak{a}_n]=[\mathfrak{b}])$$

の開近傍の構成について補足する.

定理 3 (Kronheimer-Mrowka)**.** $O=\{i_1,\cdots,i_k\}$ を $\breve{\mathcal{M}}^{\tau}_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{i-1}],[\mathfrak{a}_i])$ が境界に障害をもつ i $(1\leq i\leq n)$ の集合とする．このとき $\prod \breve{\mathcal{M}}^{\tau}_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{i-1}],[\mathfrak{a}_i])$ の開近傍 $\breve{W}$ と $\breve{W}$ を含む空間 $E\breve{W}$ および写像

$$\mathbf{S}=(S_1,\cdots,S_{n-1}) : E\breve{W} \to (0,\infty]^{n-1}$$
$$\delta=(\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_k}) : E\breve{W} \to \mathbf{R}^O$$

で次の性質をもつものが存在する.

(1) $\prod \breve{\mathcal{M}}^{\tau}_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{i-1}],[\mathfrak{a}_i]) = \mathbf{S}^{-1}(\infty,\cdots,\infty)$.
(2) $\breve{W}=\delta^{-1}(0,\cdots,0)$.
(3) $\mathbf{S}$ は $\mathbf{S}^{-1}(\infty,\cdots,\infty)$ に沿って局所的に位相的沈め込みである．即ち任意の $[\breve{\gamma}]\in\mathbf{S}^{-1}(\infty,\cdots,\infty)$ に対し，$[\breve{\gamma}]$ の $E\breve{W}$ における開近傍 U と $(\infty,\cdots,\infty)\subset(0,\infty]^{n-1}$ の近傍 V および同相写像

$$\varphi : (U\cap\mathbf{S}^{-1}(\infty,\cdots,\infty))\times V \cong U$$

が存在して $\mathbf{S}\circ\varphi$ が V への射影となる.

定義 4 (質量の中心 (a center of mass)).

どんな $[\mathfrak{a}]$, $[\mathfrak{b}] \in \mathcal{M}^{\sigma}_Y(\mathfrak{s}_Y)$ に対してもある定数 $\epsilon > 0$ が存在して，任意の $[\breve{\gamma}] = ([\breve{\gamma}_1], \cdots, [\breve{\gamma}_n]) \in \breve{\mathcal{M}}^{\tau,+}_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}])$ に対し

$$\mathfrak{e}(\gamma_i(t_i)) := ||\nabla CSD^{\sigma}(\gamma_i(t_i))||^2_{L^2(\{t_i\}\times Y)} > \epsilon$$

となる t_i $(i = 1, \ldots, n)$ が存在する．そこで $\beta : \mathbf{R} \to [0,1]$ を $t \leq \epsilon$ で 0, $t > \epsilon$ で正となるカットオフ関数として，一般の $[\gamma] \in \mathcal{M}^{\tau}_{I\times Y}(\mathfrak{s}_{I\times Y})$ に対する「質量の中心」を

$$c(\gamma) = \int_I t\beta(\mathfrak{e}(\gamma(t))dt / \int_I \beta(\mathfrak{e}(\gamma(t))dt$$

により定める．

定理における各種の記号がみたす性質の概略は以下の通り（より厳密で詳細な定義は Kronheimer-Mrowka[254], §19 にある）．

$$[\breve{\gamma}] = ([\breve{\gamma}_1], \cdots, [\breve{\gamma}_k]) \in \prod_{\ell=1}^{k} \breve{\mathcal{M}}^{\tau}_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{j_{\ell-1}}], [\mathfrak{a}_{j_\ell}]) \quad ([\mathfrak{a}_{j_0}] = [\mathfrak{a}], [\mathfrak{a}_{j_k}] = [\mathfrak{b}])$$

が $\breve{W}$ に含まれているとき，各 $[\breve{\gamma}_\ell]$ は次のようなモデルで表される．

- $\mathbf{R}$ の区間による分割 $J_0 \cup I_1 \cup J_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m \cup J_m$ $(m = j_\ell - j_{\ell-1})$ で，ある $L > 0, T > 0$ に対して $J_0 \cong (-\infty, 0]$, $J_m \cong [0, \infty)$, $J_t \cong [-T, T]$ $(1 \leq t \leq m-1)$, $I_t \cong [-L, L]$ $(1 \leq t \leq m)$ となるものが存在して
- $[\breve{\gamma}_\ell]$ は $J_t \times Y$ 上定値流 $\gamma_{\mathfrak{a}_{j_{\ell-1}+t}}$ に近くさらに $J_0 \times Y$ 上では $t \to -\infty$ で $[\mathfrak{a}_{j_{\ell-1}}]$ に，$J_m \times Y$ 上では $t \to \infty$ で $[\mathfrak{a}_{j_\ell}]$ に近づく Seiberg-Witten 軌道 γ_ℓ で表される．

ここで $\gamma_\ell|_{I_t\times Y}$ の質量の中心 $c_{j_{\ell-1}+t}$ が区間の中点となるように代表元をとり，$\mathbf{S}([\breve{\gamma}])$ の $j_{\ell-1} + t$ 成分 $(1 \leq t \leq m-1)$ を $c_{j_{\ell-1}+t+1} - c_{j_{\ell-1}+t}$, j_ℓ 成分 $(1 \leq \ell \leq k-1)$ を ∞ により定める．

一方 $\pi : \mathcal{B}^{\sigma}_Y(\mathfrak{s}_Y) \to \partial\mathcal{B}^{\sigma}_Y(\mathfrak{s}_Y)$ を $\pi([B, s, \psi]) = [B, 0, \psi]$ により定義し，$I = [-L, L]$ に対し $I_+ = [0, L]$, $I_- = [-L, 0]$ とおいて $I_\pm \times Y$ 上のモジュライ空間の直積 $\mathcal{M}^{\tau}_{I_+\times Y}(\mathfrak{s}_{I_+\times Y}) \times \mathcal{M}^{\tau}_{I_-\times Y}(\mathfrak{s}_{I_-\times Y})$ の元 $([\gamma_+], [\gamma_-])$ のうち $\pi([\gamma_+]|_{\{0\}\times Y}) = \pi([\gamma_-]|_{\{0\}\times Y})$ をみたすものからなるファイバー積を $E\mathcal{M}^{\tau}_{I\times Y}(\mathfrak{s}_{I\times Y})$ とおく（$[\gamma_\pm]$ の s 成分 $s([\gamma_\pm])$ が $\{0\} \times Y$ 上一致しないものを許す）．$E\mathcal{M}^{\tau}_{I\times Y}(\mathfrak{s}_{I\times Y})$ においても質量の中心が同様に定義され，それが I の中点と一致する元からなる部分空間を $E\mathcal{M}^{\tau,\mathrm{cen}}_{I\times Y}(\mathfrak{s}_{I\times Y})$ とおく．定理にお

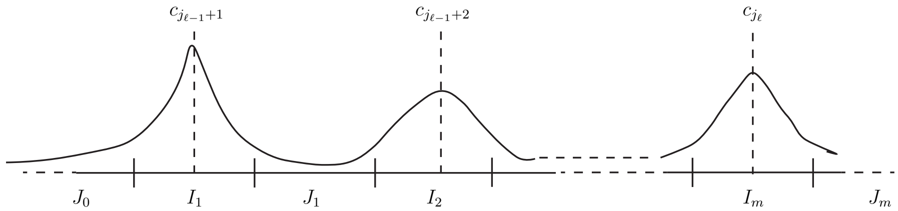

FIGURE 1. $\mathfrak{e}(\gamma_\ell(t))$ $([\gamma_\ell] \in \breve{\mathcal{M}}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{j_{\ell-1}}],[\mathfrak{a}_{j_\ell}]), t \in \mathbf{R})$ のグラフ.

ける $E\breve{W}$ は上記の $[\breve{\gamma}] = ([\breve{\gamma}_1],\cdots,[\breve{\gamma}_k])$ において $j_{\ell-1}+t \in O$ となる場合に $\gamma_\ell|_{I_t\times Y}$ を $E\mathcal{M}^{\tau,\mathrm{cen}}_{I_t\times Y}(\mathfrak{s}_{I_t\times Y})$ の元 $([\gamma_+],[\gamma_-])$ に置きかえたもので表され, かつ $\prod \breve{\mathcal{M}}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{i-1}],[\mathfrak{a}_i])$ に近い元からなる．ここで $i = j_{\ell-1}+t \in O$ とおいたとき，$[\breve{\gamma}] \in E\breve{W}$ に対する $\delta([\breve{\gamma}])$ の第 i 成分を $s([\gamma_+]|_{\{0\}\times Y}) - s([\gamma_-]|_{\{0\}\times Y})$ により定義する．また $\mathbf{S}$ の定義も $E\breve{W}$ 上に自然に拡張される．この $\mathbf{S}$ は $\prod \breve{\mathcal{M}}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{i-1}],[\mathfrak{a}_i])$ の $\breve{\mathcal{M}}^{\tau,+}_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}],[\mathfrak{b}])$ における近傍の「滑層分割空間」としてのパラメータ付けを与えるが，$\prod \breve{\mathcal{M}}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{i-1}],[\mathfrak{a}_i])$ が境界で障害をもつ成分を含む場合は $\mathbf{S}$ を $E\breve{W}$ に拡張しないと局所沈め込みにならない．I, 4.7 定義 4.142 における抽象 δ チェインは上記の滑層分割空間の Morse-Bott 型特異点集合が関わる場合への拡張とその抽象化である．

Figure 2, 3 は $\breve{\mathcal{M}}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}],[\mathfrak{b}])$（次元は 1）における $\prod_{i=1}^3 \breve{\mathcal{M}}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{i-1}],[\mathfrak{a}_i])$ $([\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}_0], [\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}_3])$ の近傍 $\breve{W}$ に含まれる特異 Seiberg-Witten 軌道とその拡張 $E\breve{W}$ に含まれる元の模式図およびそれらの $\mathbf{S}$ による像の配置を表したものである．ここで $[\mathfrak{a}_0]$, $[\mathfrak{a}_3]$ は $\mathcal{B}^\sigma_Y(\mathfrak{s}_Y)$ の内部にある ∇CSD^σ の特異点（零点），$[\mathfrak{a}_1]$ は ∂ 安定，$[\mathfrak{a}_2]$ は ∂ 非安定な特異点で，$\breve{\mathcal{M}}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_1],[\mathfrak{a}_2])$ は境界に障害をもつモジュライ空間であり，$\breve{\mathcal{M}}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_{i-1}],[\mathfrak{a}_i])$ $(i \neq 2)$ は境界に障害を持たないモジュライ空間である．なお Figure 2 の [1] は拡張されたモジュライ空間 $E\mathcal{M}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_1],[\mathfrak{a}_3])$ の元 $[\gamma] = ([\gamma_+],[\gamma_-])$ で表される成分，$[1']$ は $E\mathcal{M}^\tau_{\mathbf{R}\times Y}([\mathfrak{a}_0],[\mathfrak{a}_2])$ の元 $[\gamma'] = ([\gamma'_+],[\gamma'_-])$ で表される成分をそれぞれ含む「拡張された」Seiberg-Witten 軌道である．ここで $[\mathfrak{a}_1]$ が ∂ 安定であることから $[\gamma_-]$ は可約元，$[\mathfrak{a}_2]$ が ∂ 非安定であることから $[\gamma'_+]$ は可約元であり，ともに $\partial\mathcal{B}^\sigma_Y(\mathfrak{s}_Y)$ に含まれる軌道により表される．従って [1] に対しては $\delta > 0$, $[1']$ に対しては $\delta < 0$ となる．

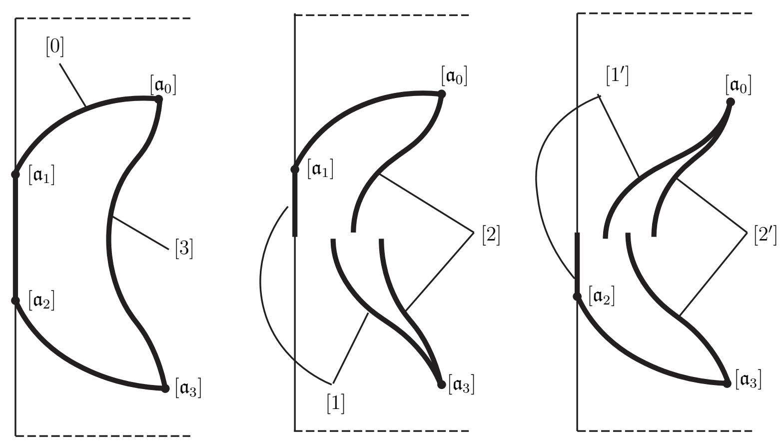

FIGURE 2. $E\breve{W}$ の元を表す $\mathcal{B}^{\sigma}_{Y}(\mathfrak{s}_Y)$ 内の軌道の模式図．縦の線は $\partial B^{\sigma}_{Y}(\mathfrak{s}_Y)$ を表す.

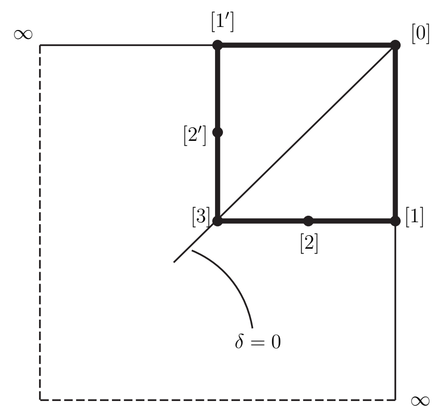

FIGURE 3. Figure 2 の元の $\mathbf{S}$ による像

2.10. 位相多様体の PL 構造と Rokhlin の定理についての補足.

I, 第 0 章 0.2 で言及された Kirby-Siebenmann 理論と Rokhlin の定理との関連について補足する．詳細は Kirby-Siebenmann[229] とその参考文献，The Hauptvermutung Book(Ranicki 編)[258] 所収の論文を参照のこと.

以下 M を m 次元位相多様体で $m \geq 6$, $\partial M = \emptyset$ なら $m \geq 5$ とする.

定義 5. M に 2 つの PL 構造 Σ_i $(i=0,1)$（$\partial M \neq \emptyset$ なら ∂M のある近傍 U 上同じ PL 構造 Σ_0 を定めるもの）を入れた多様体 M_{Σ_0} と M_{Σ_1} が（境界を止めて）コンコーダントであるとは，$M \times I$ $(I=[0,1])$ 上の PL 構造 Γ が存在して，$(M\times I)_\Gamma|_{M\times\{i\}} = M_{\Sigma_i}\times\{i\}$ $(i=0,1)$ かつ $(U\times I)_\Gamma = U_{\Sigma_0}\times I$ となることである（以下 $\partial M \neq \emptyset$ のときも単にコンコーダントと呼ぶ）．M_{Σ_0} と M_{Σ_1} が（境界を止めて）イソトピックであるとは，位相的イソトピー $h_t : M \to M$ $(t\in[0,1])$ で $h_0 = \mathrm{id}$, $h_t|_U = \mathrm{id}|_U$ $(t\in[0,1])$ かつ h_1 が M_{Σ_0} から M_{Σ_1} への PL 同相写像を誘導するものが存在することである．

次の 2 つは Kirby-Siebenmann による基本的な定理である．

定理 4 (コンコーダンス $\Longrightarrow$ イソトピー)**.** M の 2 つの PL 構造はコンコーダントならイソトピックである．

定理 5 (直積構造定理)**.** Θ を $M\times\mathbf{R}^s$ $(s\geq 1)$ の PL 構造で $\partial M\times\mathbf{R}^s$ 上 ∂M の PL 構造 Σ_0 と $\mathbf{R}^s$ の標準的 PL 構造の直積と一致するものとする．このとき $(M\times\mathbf{R}^s)_\Theta$ は Σ_0 を拡張した M のある PL 構造 Σ に対する $M_\Sigma\times\mathbf{R}^s$ とコンコーダントである．

4 次元多様体に対しては PL と DIFF カテゴリーが一致する (Cerf) ため，Freedman と Donaldson の理論により上の定理は一般には成り立たない．

Kirby-Siebenmann は M の PL 構造のコンコーダンス類の集合が M の接マイクロバンドル τM の（$\tau M|_{\partial M}$ 上の PL 構造を拡張する）PL マイクロバンドルへの持ち上げのコンコーダンス類，言い換えると τM の分類写像 $M\to B\mathrm{TOP}(m)$ の $B\,\mathrm{PL}(m)$ への持ち上げのホモトピー類の集合と 1 対 1 に対応することを示し，上記の定理を経由して次の定理を得た．

定理 6 (構造定理)**.** M の PL 構造の（境界を止めた）イソトピー類の集合は τM の安定化の持ち上げの集合 $[M,\partial M,\mathrm{TOP}/\mathrm{PL}]$ と 1 対 1 に対応する (*I*, 定理 2.25(1))．

$\mathrm{TOP}(m)/\mathrm{PL}(m)$ のホモトピー群についてはまず次のことが示される．

命題 5 (Kirby-Siebenmann)**.** $m\geq 5$ とする．

(1) $m > k \neq 3$ ならば $\pi_k(\mathrm{TOP}(m)/\mathrm{PL}(m)) = 0$.

(2) $\pi_3(\mathrm{TOP}(m)/\mathrm{PL}(m)) \subset \mathbf{Z}_2$.

(3) 安定化写像 $\pi_3(\mathrm{TOP}(m)/\,\mathrm{PL}(m)) \to \pi_3(\mathrm{TOP}(m+1)/\,\mathrm{PL}(m+1))$ は同型写像である．

これより $\pi_k(\mathrm{TOP}\,/\,\mathrm{PL})$ は $k \neq 3$ ならば 0, $k = 3$ ならば 0 または $\mathbf{Z}_2$ となる．この命題を示すには手術理論を用いる ((3) は直積構造定理を経由して証明される)．一般に m 次元 PL 多様体 X（以下向きづけられたコンパクト多様体とする）に対し $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}(X, \partial X)$ を m 次元 PL 多様体 M からのホモトピー同値写像 $f : M \to X$ で $f|_{\partial M} : \partial M \to \partial X$ が PL 同相であるものの同値類の集合とする．ここで $f : M \to X$ と $f' : M' \to X$ が同値であることを PL 同相写像 $\varphi : M \to M'$ が存在して f と $f' \circ \varphi$ が境界を止めてホモトピックになることと定義する.（ホモトピー同値写像を単純ホモトピー同値写像に置きかえて同様に定義した集合を $\mathcal{S}^s_{\mathrm{PL}}(X, \partial X)$ と表す．ただし後述する $T^n \times D^k$ に対しては $\pi_1(T^n \times D^k) \cong \mathbf{Z}^n$ の Whitehead 群は 0 であるから，両者の差は存在しない）．次の結果は Wall[445] による．

定理 7 (Wall[445] Theorem 15A.2)**.** $n + k \geq 5$ ならば次の全単射が存在する．

$$\varphi : \mathcal{S}_{\mathrm{PL}}(T^n \times D^k, T^n \times \partial D^k) \cong H^{3-k}(T^n, \mathbf{Z}_2)$$

さらに有限被覆 $\pi : T^n \to T^n$ に関して φ は自然である．すなわち π が誘導する $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}(T^n \times D^k)$ および $H^{3-k}(T^n, \mathbf{Z}_2)$ からそれ自身への写像 $(\pi \times \mathrm{id})^*$, π^* に対し $\pi^* \circ \varphi = \varphi \circ (\pi \times \mathrm{id})^*$ である．

ここで $x \in \pi_k(\mathrm{TOP}(m)/\,\mathrm{PL}(m))$ $(k < m)$ に対し，これを表す写像

$$(D^k, \partial D^k) \to (\mathrm{TOP}(m)/\,\mathrm{PL}(m), *)$$

をとり自然な射影 $(T^n \times D^k, T^n \times \partial D^k) \to (D^k, \partial D^k)$ $(n = m - k)$ との合成に対応する $T^n \times D^k$ の PL 構造のイソトピー類 Σ（$T^n \times \partial D^k$ 上は標準的 PL 構造に一致）をとって $\mathrm{id} : (T^n \times D^k, T^n \times \partial D^k)_\Sigma \to (T^n \times D^k, T^n \times \partial D^k)$ の表す $\mathcal{S}_{\mathrm{PL}}(T^n \times D^k, T^n \times \partial D^k)$ の元を対応させる．このときこの対応は単射であり (Kirby-Siebenmann[229], Essay V)，上記の定理により命題が証明される（$k \neq 3$ ならば定理における π を 2^n 重被覆にとれば $\pi^* = 0$ である）．

最後に $\mathrm{TOP}\,/\,\mathrm{PL} = K(\mathbf{Z}_2, 3)$(I 定理 2.25 (2)) を示す 1 つの手段として，$S^3 \times T^n$ $(n \geq 3)$ と同相だが PL 同相でない PL 多様体と PL 構造を持たない多様体を Kirby-Siebenmann[229] Essay IV, Appendix B に従って構成する．

P を Poincaré ホモロジー 3 球面とする．P は $(2,3,5)$ 型の Brieskorn ホモロジー 3 球面で E_8 鉛管多様体 (以下 E_8 と書く．I, 1.4 (iv) での表記は E_8^-) の境界である．このとき $\pi_1(P)$ は双正 20 面体群で，ある 1 つの元 γ を含む最小の正規部分群が $\pi_1(P)$ と一致する．そこで I^3 $(I=[0,1])$ と P との連結和 $P_0 = I^3\sharp P(\cong P\setminus \mathrm{Int}D^3)$ をとり，$[0,1]\times P_0\times I^n$ に $\{1\}\times P_0\times I^n$ 内の γ を表す単純閉曲線に沿って 2 ハンドル h_2 を接着すると $P_0\times I^n$ から $P_0\times I^n$ を γ に沿って手術して得られる多様体 Q へのコボルディズムとなる．このとき h_2 の接着の枠付けを適切に選べば Q はホモロジーが $I^{3+n}\sharp S^2\times S^{n+1}$ と同型で単連結であり，$n+3>5$ ゆえ $H_2(Q)\cong \mathbf{Z}$ の生成元は 2 次元球面の埋め込みで表される．そこでその球面に沿って 3 ハンドル h_3 を接着すると

$$(*)\quad [0,1]\times P_0\times I^n\cup h_2\cup h_3$$

は $P_0\times I^n$ から Q の手術で得られる PL 多様体 Q' への可縮なコボルディズムでその境界は $\{0\}\times P_0\times I^n$, $\{1\}\times Q'$ と $[0,1]\times(P_0\times\partial I^n\cup\partial P_0\times I^n)$ の和である．さらに Q' も可縮である．そこで I^n を n 次元トーラス T^n に埋め込んで $(*)$ の境界の一部 $[0,1]\times P_0\times\partial I^n$ にそって $[0,1]\times P_0\times(T^n\setminus\mathrm{Int}I^n)$ を接着した多様体を X とおくと，X は $P_0\times T^n$ から $I^3\times T^n$ とホモトピー同値な多様体 $M=Q'\cup P_0\times(T^n\setminus\mathrm{Int}I^n)$ への PL コボルディズムで $\partial P_0\times T^n$ 上直積となっている．さらに M は境界が $\partial I^3\times T^n$ と PL 同相な PL 多様体である．M を $I^2\times T^n$ からそれ自身へのコボルディズムで $\partial I^2\times T^n$ 上直積となっているものとみなすと，$\pi_1(M)\cong\mathbf{Z}^n$ の Whitehead 群が 0 であるから相対的 s コボルディズムである．これより PL 同相写像 $M\to[0,1]\times I^2\times T^n$ で $(\{0\}\times I^2\cup[0,1]\times\partial I^2)\times T^n\subset\partial M$ 上恒等写像となるものが存在して $\{1\}\times I^2\times T^n$ に制限すると PL 同相写像 $\alpha: I^2\times T^n\to I^2\times T^n$ で $\alpha|_{\partial I^2\times T^n}=\mathrm{id}$ となるものを誘導する．

主張 1. α は $\mathrm{id}: I^2\times T^n\to I^2\times T^n$ と（境界を止めて）位相的に擬イソトピックである．即ち同相写像 $H:[0,1]\times I^2\times T^n\to[0,1]\times I^2\times T^n$ で $\{0\}\times I^2\times T^n$ 上 α, $\{1\}\times I^2\times T^n$ 上 id, $[0,1]\times\partial I^2\times T^n$ 上 id となるものが存在する（しかし H を PL 同相写像にとることはできない）．

これを示すために，d 重被覆 $\varphi: T^n\to T^n$ に対応する X の被覆 $\widetilde{X}$ を考える．$\widetilde{X}$ は $[0,1]\times P_0\times T^n$ にそれぞれ d 個の 2, 3 ハンドルを接着して得られる $P_0\times T^n$ から M の（$I^3\times T^n$ とホモトピー同値な）d 重被覆 $\widetilde{M}$ へのコボル

ディズムであり，$\widetilde{M}$ から誘導される PL 同相写像 $\widetilde{\alpha}: I^2\times T^n \to I^2\times T^n$ は

$$(\dagger)\quad (\mathrm{id}\times\varphi)\circ\widetilde{\alpha} = \alpha\circ(\mathrm{id}\times\varphi)$$

をみたす．一方 $\mathrm{id}\times\varphi: P_0\times T^n \to P_0\times T^n$ の両辺に現れる $P_0\times T^n$ を同一視して得られる $-X\cup_{P_0\times T^n}\widetilde{X}$ は M から $\widetilde{M}$ への相対 s コボルディズムとなることから α と $\widetilde{\alpha}$ は擬 PL イソトピック，即ち PL 同相写像 $F:[0,1]\times I^2\times T^n \to [0,1]\times I^2\times T^n$ が存在して F は $\{0\}\times I^2\times T^n$ 上 α, $\{1\}\times I^2\times T^n$ 上 $\widetilde{\alpha}$, $[0,1]\times\partial I^2\times T^n$ 上 id に一致する．これを利用すると α と id の間の「境界を止めた」位相的擬イソトピー H が構成される (詳細は Kirby-Siebenmann[229] 所収の Siebenmann の論文にある).

主張 2. $\partial I^3\times T^n$ 上恒等写像となる M から $I^3\times T^n$ への同相写像が存在する．しかし同じ条件をみたす PL 同相写像は存在しない．

前半の主張は前述の構成から示される．これにより M と $I^3\times T^n$ を境界で接着した多様体 M' は $S^3\times T^n$ と同相である．X に $[0,1]\times\partial I^3\times T^n\subset\partial X$ に沿って $[0,1]\times I^3\times T^n$ を接着して得られる多様体 X' は $P\times T^n$ から M' へのコボルディズムとなるが，さらに $P\times T^n$ および M' に沿ってそれぞれ $-E_8\times T^n$, $D^4\times T^n$ を接着すると，$n+4$ 次元の閉位相多様体 W で $-(E_8^*)\times T^n$ とホモトピー同値なものが得られる（E_8^* は E_8 に P 上の錐を接着した複体）.

次に M' が $S^3\times T^n$ に PL 同相であると仮定して矛盾を導く（よって境界で id となる PL 同相写像 $M\to I^3\times T^n$ は存在しない）．このとき W は PL 多様体になる．ここでホモトピー同値写像 $W\to -(E_8^*)\times T^n$ と $-(E_8^*)\times T^n$ から T^n の第 1 成分への射影への合成 $f: W\to S^1$ に Farrell の定理（6 次元以上の PL 多様体から S^1 へ写像はしかるべき条件を満たせば S^1 上の局所自明な PL ファイバー空間の射影とホモトピックになる.）を適用して f とホモトピックなファイバー空間のファイバーをとる操作を繰り返すと 5 次元 PL 閉多様体 W' で $-(E_8^*)\times S^1$ とホモトピー同値なものが得られる．そこで S^1 の 1 点 p で横断的な PL 写像 $W'\to S^1$ による p の逆像を Z とおくと，Z は Spin 構造をもつ 4 次元 PL 閉多様体である．一方でホモトピー同値写像 $W\times\mathbf{C}P^2\to -(E_8^*)\times T^n\times\mathbf{C}P^2$ と S^1 への射影の合成に Farrell の定理を適用すると Spin 構造を持つ 8 次元 PL 閉多様体 V で $-(E_8^*)\times\mathbf{C}P^2$ とホモトピー同値なものが得られる．さらに V と $Z\times\mathbf{C}P^2$ は W' の $\mathbf{Z}$ 被覆 $\widetilde{W'}$ と $\mathbf{C}P^2$ の

直積の中でコボルディズムで結ばれる．これより

$$\sigma(Z)=\sigma(Z\times \mathbf{C}P^2)=\sigma(V)=\sigma(-(E_8^*)\times \mathbf{C}P^2)=\sigma(-(E_8^*))=8$$

となって Rokhlin の定理に反する．よって M' は $S^3\times T^n$ に同相だが PL 同相ではない．また上述の位相多様体 W は PL 構造を持たない[6].

注 1. Freedman の定理により，E_8^* として E_8 鉛管多様体に P を境界とする可縮な 4 次元コンパクト位相多様体を接着した位相閉多様体を取ることができ，$E_8^*\times T^n$ 自体が PL 構造を持たない位相多様体になる．しかし Kirby-Siebenmann 理論が確立した時点ではこのことは知られていない．

2.11. **4 次元位相多様体の手術についての補足.**

II 2.4 に関連する以下の事項については Freedman-Quinn[135] を参照せよ．

X を向き付け可能な n 次元コンパクト位相多様体とするとき，$\mathcal{S}^s_{\mathrm{TOP}}(X,\partial X)$ を n 次元位相多様体 M からの単純ホモトピー同値写像 $f:M\to X$ で境界上同相写像 $f:\partial M\to\partial X$ となるものの同値類の集合とする（$\partial X=\emptyset$ なら ∂X は省略）．ここでこのような 2 つの単純ホモトピー同値写像 $f_i:M_i\to X$ $(i=0,1)$ が同値であることを，同相写像 $\varphi:M_0\to M_1$ が存在して $f_1\circ\varphi$ が境界を止めて f_0 とホモトピックになることと定義する．単純ホモトピー同値写像を「ホモトピー同値写像」に置きかえて定義したものは $\mathcal{S}_{\mathrm{TOP}}(X,\partial X)$ と表すことにする．($\pi_1(X)$ の Whitehead 群 $Wh(\pi_1(X))$ が 0 ならば両者は一致する）．このとき $n\geq 5$ ならば次の手術完全系列が成り立つ．

$$(*)\quad L^s_{n+1}(\mathbf{Z}[\pi_1X])\xrightarrow{\partial}\mathcal{S}^s_{\mathrm{TOP}}(X,\partial X)\xrightarrow{\eta}[X,\partial X,G/\mathrm{TOP}]\xrightarrow{\theta}L^s_n(\mathbf{Z}[\pi_1X])$$

ここで群 Γ に対する $L^s_n(\mathbf{Z}[\Gamma])$ は手術の障害を表す Wall の L 群（$Wh(\Gamma)=0$ なら添え字 s のない $L_n(\mathbf{Z}[\Gamma])$ と同じ．定義は手術理論の教科書を見よ）[7]．η は単純ホモトピー同値写像の同値類をそれが表す写像度 1 の法写像の法ボルディズム類に対応させる写像，θ は写像度 1 の法写像を手術により単純ホモトピー同値写像に変えるための障害を表す．なお完全系列 $(*)$ は

$$\mathcal{S}^s_{\mathrm{TOP}}(X\times I,\partial(X\times I))\to[X\times I,\partial(X\times I),G/\mathrm{TOP}]\to L^s_{n+1}(\mathbf{Z}[\pi_1(X)])$$

と左に延長される．X が 4 次元位相多様体のとき，$\pi_1(X)$ が Freedman-Quinn[135] の意味で「良い群」(I 定義 2.34) のときは X において位相的手術が可能（I 命

[6] 上述の構成において ∂I^3 の対面の同一視により $I^3\times T^n$ を $T^3\times T^n$ に置きかえることで T^{3+n} と同相だが PL 同相でない PL 多様体（フェイクトーラス）も得られる

[7] $L^s_n(\Gamma)$ と表記する文献も多い.

題 2.47 の意味で X の双曲対が消去可能）で，基本群が $\pi_1(X)$ と同型な場合 5 次元の位相的 s コボルディズムが直積と同相であることから，

定理 8 (Freedman-Quinn[135] Theorem 11.3A)**.** X を $\pi_1(X)$ が「良い群」である向き付け可能なコンパクト 4 次元多様体とするとき，$(*)$ は完全系列である．

以下にいくつかの応用を述べる．

定理 9 (Freedman-Quinn)**.** $f : X \to Y$ を基本群が多重有限ー巡回群 (*poly finite or cyclic, I 注 2.56*) である向きづけられたコンパクトな 4 次元 $K(\pi, 1)$ 多様体間のホモトピー同値写像で，境界上同相写像となるものとする．このとき f は同相写像に境界を止めてホモトピックである．

Γ がねじれ元を持たない多重有限ー巡回群のとき $Wh(\Gamma) = 0$ である (Farrell-Hsiang)．コンパクト $K(\pi, 1)$ 多様体の基本群はねじれ元を持たないため，上記の定理の設定ではホモトピー同値は単純ホモトピー同値，h コボルディズムは s コボルディズムに等しい．この定理は 5 次元以上では Farrell-Jones が $\theta : [X, \partial X, G/\mathrm{TOP}] \to L_n(\mathbf{Z}[\pi_1(X)])$ が同型写像になること，これより $\mathcal{S}_{\mathrm{TOP}}(X, \partial X)$ が 1 点からなることによって示していた．多重有限ー巡回群は「良い群」である (Freedman-Quinn, I 注 2.58) ため，4 次元でも彼らの議論がそのまま成立することにより上記の定理が成り立つ．

系 2. 向きづけられたコンパクト 4 次元多様体は（境界上同相写像となるホモトピー同値写像により）$T^k \times D^{4-k}$ $(0 \le k \le 4)$ とホモトピー同値ならば $T^k \times D^{4-k}$ と同相である．

X が単連結 4 次元閉位相多様体のときは次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
 & & {[X, G/\mathrm{PL}]} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\iota"'] & L_4(\mathbf{Z}[1]) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S}_{\mathrm{TOP}}(X) \arrow[r, "\eta"] & {[X, G/\mathrm{TOP}]} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\Delta"'] & L_4(\mathbf{Z}[1]) \\
 & & {[X, B(\mathrm{TOP}/\mathrm{PL})]} &
\end{tikzcd}$$

自明な群は「良い群」であり $L_5(\mathbf{Z}[1]) = 0$ であることから，中段は完全系列である．また縦の系列は I, 命題 2.41 における完全系列

$$[X, G/O] \cong \mathcal{H}(X) \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\iota} [X, G/\mathrm{TOP}] \cong H^2(X, \mathbf{Z}_2) \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Z}_2$$

と同じものになる．ただしここでは

$$\mathcal{H}(X)=\begin{cases}H^2(X,\mathbf{Z}_2) & (w_2(X)=0\text{ のとき})\\ \{x\in H^2(X,\mathbf{Z}_2)\mid x\cup x=0\} & (w_2(X)\neq 0\text{ のとき})\end{cases}$$

とおく（後者は $w_2(X)^{\perp}$ と同じ）．また $L_4(\mathbf{Z}[1])\cong\mathbf{Z}$ であり，写像度 1 の法写像 $f:M\to X$ の θ による像は $\sigma(\ker f_*:H_2(M,\mathbf{Z})\to H_2(X,\mathbf{Z}))/8$ で与えられるから，E_8^+ を交叉形式とする単連結 4 次元閉多様体 $(E_8^+)^*$（Freedman により一意的に存在する．I 定理 2.36）から S^4 への法写像 $\varphi:(E_8^+)^*\to S^4$ の θ の像が $L_4(\mathbf{Z}[1])\cong\mathbf{Z}$ を生成する．これより $[X,G/\mathrm{TOP}]\cong H^2(X,\mathbf{Z}_2)\oplus\mathbf{Z}$ の $\mathbf{Z}$ 成分は φ の法ボルダント類で生成されるとみなされ,

命題 6 (Freedman-Quinn)**.** $\mathcal{S}_{\mathrm{TOP}}(X)$ は η により $H^2(X,\mathbf{Z}_2)$ と 1 対 1 に対応する．

一方単連結 4 次元閉多様体間のホモトピー同値写像 $f:X'\to X$[8]が存在すれば分類定理 (I 定理 2.36) により X' は $w_2(X)=0$ ならば X と同相であり，$w_2(X)\neq 0$ ならば X または X^*（X とホモトピー同値で Kirby-Siebenmann 類 $ks(X^*)$ が $ks(X)$ と異なる 4 次元位相閉多様体）と同相である．ホモトピー同値写像 $f:X\to X$ に対する η の像は $\Delta\circ\eta([f])=0$ ゆえ $\mathcal{H}\cong\ker\theta:[X,G/O]\to L_4(\mathbf{Z}[1])$ の元に持ち上がるが，逆に $\mathcal{H}$ の任意の元は $H_2(X,\mathbf{Z})$ 上 id となる写像度 1 の X の自己ホモトピー同値写像の η による像である (Cochran-Habegger,I 命題 2.42). 従って $w_2(X)=0$ ならば ι は $H^2(X,\mathbf{Z}_2)$ 成分どうしの同型写像を与えるから，$\mathcal{S}_{\mathrm{TOP}}(X)$ はそれらの自己ホモトピー同値写像の同値類全体と一致する．一方 $w_2(X)\neq 0$ ならば写像度 1 のホモトピー同値写像 $f_0:X^*\to X$ を 1 つ固定すると，$\Delta\circ\eta(f_0)\neq 0$ かつ ι は $\mathcal{H}$ 上は $H^2(X,\mathbf{Z}_2)$ への包含写像であるから，上記の命題の対応において $\eta(f_0)$ は $w_2(X)\cup x_0=x_0\cup x_0\neq 0$ をみたすある $x_0\in H^2(X,\mathbf{Z}_2)$ に，X の自己ホモトピー同値写像の同値類の全体は $\mathcal{H}$ に対応する．また X の交叉形式の任意の自己同型写像 φ に対し，$h_*=\varphi$ をみたす同相写像 $h:X\to X$ がイソトピーを除いて唯 1 つ存在する (Quinn[365],I 定理 2.38) ことから次が成り立つ.

命題 7. 単連結 4 次元閉多様体 X の交叉形式の任意の自己同型写像 φ に対し，$f_*=\varphi$ をみたすホモトピー同値写像 $f:X\to X$ のホモトピー類全体の集合

[8]写像度 -1 のホモトピー同値写像 $X'\to X$ は向きを逆にした $-X'$ から X' への同相写像を合成したものと同値な $\mathcal{S}_{\mathrm{TOP}}(X)$ の元を定めるから以下写像度 1 のもののみを考える．

は $w_2(X)=0$ ならば $H^2(X,\mathbf{Z}_2)$, $w_2(X)\neq 0$ ならば $w_2(X)^\perp\subset H^2(X,\mathbf{Z}_2)$ と 1 対 1 に対応する．

2.12. Seiberg-Witten 不変量の消滅定理についての補足．

表記の定理 (II, 7.1.2-7.1.3) は Kronheimer-Mrowka[254]（以下 [KM]）§32 -36 の記述に従い局所系の Floer ホモロジーの定義を拡張することで若干強められる．$\mathcal{R}$ を形式元 t に対する $\sum r_i t^i$ $(i\in\mathbf{R}, r_i\in\mathbf{R})$ の形の有限和全体のなす群環, $\mathcal{R}^-$ をその (負の方向の）完備化，すなわち無限和 $\sum r_i t^i$ で任意の $C\in\mathbf{R}$ に対して $\{i\in\mathbf{R}\mid r_i\neq 0\}\cap[C,\infty)$ が有限となるものの全体のなす環とする（$\mathcal{R}$ の商体 $\mathcal{Q}$ を含む）．3 次元多様体 Y と $\mathfrak{s}\in\mathrm{Spin}^c(Y)$, Y の 1 次元サイクル η で $[\eta]\neq 0\in H_1(Y,\mathbf{R})$ となるものが存在するとき，局所系 $\mathcal{R}^-_\eta$ を CSD^σ の特異点 $[\mathfrak{a}]$ に対し $\mathcal{R}^-_\eta([\mathfrak{a}])=\mathcal{R}^-_\eta$,2 つの特異点 $[\mathfrak{a}]$,$[\mathfrak{b}]$ をつなぐ $\mathcal{B}^\sigma_Y(\mathfrak{s})$ の路 $\gamma=(A,s,\phi):I\to\mathcal{B}^\sigma_Y(\mathfrak{s})$ のホモトピー類 z に対し，$\mathcal{R}^-_\eta(z):\mathcal{R}^-_\eta([\mathfrak{a}])\to\mathcal{R}^-_\eta([\mathfrak{b}])$ を

$$t^{f(z)},\quad f(z)=\frac{i}{2\pi}\int_{I\times\eta}F_{A^t}$$

の積として定義する．局所系の Floer ホモロジー

$$HM^\circ(Y,\mathcal{R}^-_\eta)=\oplus_{\mathfrak{s}}HM^\circ(Y,\mathfrak{s},\mathcal{R}^-_\eta)\quad(HM^\circ\in\{\check{HM},\ \widehat{HM},\ \overline{HM}\})$$

は Γ_η に対する Floer ホモロジー (II, 定義 3.258) と同様に定義される．

CSD の可約特異点からなる Jacobi トーラス $\mathbf{T}$ に対して $\mathbf{T}\times Y$ 上の Poincaré バンドル $\mathcal{P}$ の第 1Chern 類は $c_1(\mathcal{P})=\sum_i\pi_1^*(a_i^*)\otimes\pi_2^*(a_i)$ と表される．ここで a_i は $H^1(Y,\mathbf{Z})$ の基底，$a_i^*\in H^1(\mathbf{T},\mathbf{Z})\cong\mathrm{Hom}(H^1(Y,\mathbf{Z}),\mathbf{Z})$ はその双対基底，π_1, π_2 はそれぞれ $\mathbf{T}\times Y$ から第 1，第 2 成分への射影である．これに対し，$\mathfrak{s}$ に対する Spin バンドル $S\to Y$ をとって $\mathcal{S}=\mathcal{P}\otimes\pi_2^*S$ とおくと，$\mathcal{S}$ は $\mathbf{T}\times Y$ 上の Spin バンドルで $\{\alpha\}\times Y$ $(\alpha\in\mathbf{T})$ に制限すると α に一致するような接続を伴っている．$c_1(\mathfrak{s})$ がねじれ元のとき，$\mathbf{R}$ 係数では $c_1(\mathcal{S})=2c_1(\mathcal{P})$ ゆえ，同一視 $H_1(\mathbf{T},\mathbf{Z})\cong H^1(Y,\mathbf{Z})$ のもと $\langle[c],[\eta]\rangle=p\neq 0$ となる $\mathbf{T}$ のループ c をとれば $\langle c_1(\mathcal{S}),[c\times\eta]\rangle=2p$ となるから $\mathcal{R}^-_\eta(c)$ は $\mathcal{R}^-_\eta$ に t^{2p} 倍で作用し，$H_*(\mathbf{T},\mathcal{R}^-_\eta)$ は $1-t^{2p}$ 倍すれば 0, $1-t^{2p}$ は $\mathcal{R}^-_\eta$ 上可逆であるからそれ自体が 0 になる．II, 定理 7.23 は局所系 $\mathcal{R}^-_\eta$ に対しても成り立つことから，このとき $\overline{HM}_*(Y,\mathfrak{s},\mathcal{R}^-_\eta)=0$ となる ([KM] §35)．これより $j_*:\check{HM}_*(Y,\mathfrak{s},\mathcal{R}^-_\eta)\to\widehat{HM}_*(Y,\mathfrak{s},\mathcal{R}^-_\eta)$ は同型で，$HM_*(Y,\mathfrak{s},\mathcal{R}^-_\eta):=\mathrm{Im}j_*\cong\widehat{HM}_*(Y,\mathfrak{s},\mathcal{R}^-_\eta)\cong\check{HM}_*(Y,\mathfrak{s},\mathcal{C}^-_\eta)$ である．さらに完備化したホモロジーに対しても同じ主張が成り立つ．

$b_2^+(X) > 1$ となる 4 次元閉多様体 X と X の特異 2 サイクル ν，および $u \in H_*(\mathcal{B}_X^\sigma(\mathfrak{s}_X)) \cong \wedge^*(H_1(X,\mathbf{Z})/\mathrm{Tor}) \otimes \mathbf{Z}[U]$（$\mathfrak{s}_X \in \mathrm{Spin}^c(X)$ によらない）に対し形式的に

$$SW_X(u,\mathcal{R}_\nu^-) = \sum_{\mathfrak{s}_X \in \mathrm{Spin}^c(X)} SW_X(u,\mathfrak{s}_X) t^{\langle c_1(\mathfrak{s}_X),[\nu]\rangle}$$

とおく．さらに $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$ を固定したとき右辺の和を $\mathfrak{s}_X|_Y = \mathfrak{s}$ となるものに制限したものを添え字 $\mathfrak{s}$ をつけて表す．X が $\partial X_1 = -\partial X_2 = Y$ となるコンパクト 4 次元多様体 X_1，X_2 の和で，ν が $\partial\nu_1 = -\partial\mu_2 = \eta$ かつ $[\eta] \neq 0 \in H_1(Y,\mathbf{R})$ となる相対 2 サイクル ν_1, ν_2 の和として表されているとする．このとき X_i から 4 次元球体を除いたコンパクト 4 次元多様体 W_i と $W = W_1 \cup W_2$ に対して

$$\begin{aligned}
\widehat{HM}_\bullet(u_1|W_1,\mathcal{R}_{\nu_1}^-) &: \widehat{HM}_\bullet(S^3,\mathcal{R}^-) \to \widehat{HM}_\bullet(Y,\mathcal{R}_\eta^-)\\
\check{HM}_\bullet(u_2|W_2,\mathcal{R}_{\nu_2}^-) &: \check{HM}_\bullet(Y,\mathcal{R}_\eta^-) \to \check{HM}_\bullet(S^3,\mathcal{R}^-)\\
\overrightarrow{HM}_\bullet(u|W,\mathcal{R}_\nu^-) &: \widehat{HM}_\bullet(S^3,\mathcal{R}^-) \to \check{HM}_\bullet(S^3,\mathcal{R}^-)
\end{aligned}$$

が II,3.3.6 と同様に定義される．ただし $u = r_1^*(u_1) \cup r_2^*(u_2)$（$u_i \in H^*(\mathcal{B}_{W_i}^\sigma,\mathbf{Z})$, r_i は W_i への制限写像）とし，S^3 のホモロジーは係数を $\mathcal{R}^-$ とする自明な局所系のホモロジー，ν_i は S^3 の自明な 1 サイクルと η をつなぐ W_i の相対 2 サイクル，ν は S^3 の自明な 1 サイクルどうしをつなぐ W の相対 2 サイクルとみなし，$\mathcal{R}_{\nu_i}^-$, $\mathcal{R}_\nu^-$ を Γ_{ν_i}, Γ_ν の定義 (II 3.3.6) における e を t に取り替えて定義する．さらに上記の定義におけるモジュライ空間の寄与を Y 上 $\mathfrak{s}$ に一致する Spin^c 構造に対するものに限定するときは添え字 $\mathfrak{s}$ をつけて表す．このとき

$$(*) \quad \check{HM}_\bullet(W_2,\mathcal{R}_{\nu_2}^-)_{\mathfrak{s}} \circ j^{-1} \circ \widehat{HM}_\bullet(W_1,\mathcal{R}_{\nu_1}^-)_{\mathfrak{s}} = \overrightarrow{HM}_\bullet(W,\mathcal{R}_\nu^-)_{\mathfrak{s}}$$

が成り立つ ([KM], §32)．$c_1(\mathfrak{s})$ がねじれ元でないときは CSD の可約特異点がないことから $(*)$ は同様に成り立ち，すべての $\mathfrak{s}$ に関する和をとることで添え字 $\mathfrak{s}$ を除いた等式も成り立つ．$SW_X(u,\mathcal{R}_\nu^-) = \langle \overrightarrow{HM}_\bullet(u|W,\mathcal{R}_\nu^-)(1), \check{1}\rangle$ となることから，すべての $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$ に対して $HM_*(Y,\mathfrak{s},\mathcal{R}_\eta^-) = 0$ ならば $SW_X(u,\mathcal{R}_\nu^-) = 0$ である．特に Y が正のスカラー曲率の計量をもつときは任意の局所系 Γ と $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$ に対して $HM_*(Y,\mathfrak{s},\Gamma) = 0$ (II, 7.1.3) であるから II, 定理 7.29 の条件下では X の任意の特性元 c に対して $SW_X(u,c) = 0$ である (I, 注 3.261).

注 2. [*KM*] 32.1 では Y に $i\mathbf{R}$ 係数の閉 2 次微分形式 ω で $[\omega] \neq 0$ となるものがある場合，局所系 Π_ω を $[\mathfrak{a}]$ と $[\mathfrak{b}]$ をつなぐ $\mathcal{B}^\sigma_Y(\mathfrak{s})$ の路のホモトピー類 z に対し，ω で摂動した位相的エネルギー $\mathcal{E}^{\mathrm{top}}_\omega(z)$ ([*KM*] 29.1) を用いて $\Pi_\omega(z) : \mathcal{R}^- \to \mathcal{R}^-$ を $t^{-\mathcal{E}^{\mathrm{top}}_\omega(z)}$ 倍となるように定めている．このとき $c_1(\mathfrak{s})$ がねじれ元ならば $c = [(4\pi/i)\omega]$ を周期クラスとする非完全摂動の *Floer* ホモロジー $HM^\circ(Y, \mathfrak{s}, c, \Pi_\omega)$ は完全摂動の $HM^\circ(Y, \mathfrak{s}, \Pi_\omega)$ と同型であることが示される．前者が均衡型でないことから摂動された CSD に可約特異点がなく $\overline{HM}(Y, \mathfrak{s}, \Pi_\omega) \cong \overline{HM}(Y, \mathfrak{s}, c, \Pi_\omega) = 0$ である（*II,* 命題 3.266, [*KM*]*Lemma* 29.1.2）．また 4 次元閉多様体 $X = X_1 \cup_Y X_2$ が $\omega_X|_Y = \omega$ となる閉 2 次微分形式を持つ場合，$\mathfrak{s}_X \in \mathrm{Spin}^c(X)$ と $[A, \psi] \in \mathcal{B}^\sigma_X(\mathfrak{s}_X)$ に対して，ω_X で摂動した位相的エネルギー

$$\mathcal{E}^{\mathrm{top}}_{\omega_X}(\mathfrak{s}_X) = \frac{1}{4}\int_X (F_{A^t} - 4\omega_X) \wedge (F_{A^t} - 4\omega_X)$$

（$\mathfrak{s}_X$ にしかよらない）を用いて

$$SW_X(u, \Pi_{\omega_X}) = \sum_{\mathfrak{s}_X} SW_X(u, \mathfrak{s}_X) t^{-\mathcal{E}^{\mathrm{top}}_{\omega_X}(\mathfrak{s}_X)}$$

とおく．さらに $W_i = X_i \setminus \mathrm{int} D^4$, $W = W_1 \cup W_2$ に対しても局所系 Π_{ω_i}, Π_{ω_X} $(\omega_i = \omega_X|_{W_i})$ をそれぞれの両エンドで CSD の特異点に近づく配位空間の元のホモトピー類 z に対して $\Pi_{\omega_i}(z)$, $\Pi_{\omega_X}(z)$ が ω_i, ω_X で摂動した位相的エネルギーを用いて $t^{-\mathcal{E}^{\mathrm{top}}_{\omega_i}(z)}$, $t^{-\mathcal{E}^{\mathrm{top}}_{\omega_X}(z)}$ 倍となるように定める．このとき $\widehat{HM}_\bullet(u_1|W_1, \Pi_{\omega_1})$, $\check{HM}_\bullet(u_2|W_2, \Pi_{\omega_2})$, $\overrightarrow{HM}_\bullet(u|W, \Pi_{\omega_X})$ が Y の Π_ω を局所系とするホモロジーと S^3 の自明系のホモロジーの間の写像として上述のように定義され，$(*)$ をこれらの局所系に置きかえた式および $SW_X(u, \Pi_{\omega_X}) = \langle \overrightarrow{HM}_\bullet(u|W, \Pi_{\omega_X})(1), \check{1} \rangle$ が成り立つ．$PD[\nu] = -(2i/\pi)[\omega_X]$ となる X の *2* 次元サイクル ν をとれば u を固定するとき $SW_X(u, \Pi_{\omega_X})$ は $SW_X(u, \mathcal{R}^-_\nu)$ と t の定数べき倍を除いて一致する．[*KM*] では $u = 1$ の場合に上記の式を示している（*Kähler* 曲面のように X が SW 単純ならこの場合だけ考えれば良い）が，一般の u に対しても同様に成り立つ．

2.13. Seiberg-Witten モジュライ空間の有限性と Floer ホモロジーの消滅定理について．

表記の件について [KM] に基づき若干補足する．

定理 10 (KM 10.7)**.**

(1) *3* 次元多様体 Y と $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$ に対し，摂動された *Seiberg-Witten* モジュライ空間（摂動された CSD の特異点のゲージ同値類の空間）$\mathcal{M}_Y(\mathfrak{s})$ はコンパクトである．

(2) さらに各 $\mathfrak{s}$ に対して摂動を適切に選べば $\mathcal{M}_Y(\mathfrak{s})$ が空でない $\mathfrak{s}$ は高々有限個である．特に各種の *Floer* ホモロジー $HM^\circ_*(Y,\mathfrak{s})$, $HM^\circ_\bullet(Y,\mathfrak{s})$ は有限個の $\mathfrak{s}$ を除いて 0 である．

注 3. 各種の *Heegaard Floer* ホモロジー $HF^\circ(Y,\mathfrak{s})$ が有限個の $\mathfrak{s}$ を除いて 0 であることは $HF^\circ(Y)$ を定義するチェイン複体の生成元が有限個であることから直ちに従う (*II* 命題 5.150)．一方 *Heegaard Floer* ホモロジーと均衡型摂動された *Seiberg-Witten Floer* ホモロジーの間に同型

$$HF^-_*(Y,\mathfrak{s}) \cong \widehat{HM}_*(Y,c_b,\mathfrak{s}),$$
$$HF^\infty_*(Y,\mathfrak{s}) \cong \overline{HM}_*(Y,c_b,\mathfrak{s}),$$
$$HF^+_*(Y,\mathfrak{s}) \cong \check{HM}_*(Y,c_b,\mathfrak{s})$$

が存在する (*Kutluhan-Lee-Taubes*[244]*,II* 第 6 章，ただしそこでは $HM^\circ(Y,c_b,\mathfrak{s})$ を単に $HM^\circ(Y,\mathfrak{s})$ と書いている)．$c_1(\mathfrak{s})$ がねじれ元ならば完全摂動の $HF^\circ_*(Y,\mathfrak{s})$ は $HF^\circ_*(Y,c_b,\mathfrak{s})$ と同型で，$c_1(\mathfrak{s})$ がねじれ元でないときも完備化すれば両者は同型 ([*KM*] *Theorem* 31.1.1*,II* 注 3.269) で，$\check{HM}_*(Y,\mathfrak{s}) \cong \check{HM}_\bullet(Y,\mathfrak{s})$ であることから $\check{HM}_*(Y,\mathfrak{s}) \cong HF^+_*(Y,\mathfrak{s})$ である．しかし他の *Floer* ホモロジーについては HF° と完全摂動の（完備化しない）HM° の間の同型は必ずしも成立しない．$c_1(\mathfrak{s})$ がねじれ元でないときは $\overline{HM}_*(Y,\mathfrak{s}) = 0$ であるが，$b_1(Y) \leq 2$ のとき ($\mathbf{Z}_2$ 係数にすると)

$$\overline{HM}_*(Y,c_b,\mathfrak{s}) \cong HF^\infty_*(Y,\mathfrak{s}) \cong \mathbf{Z}_2[U]/U^{\delta(\mathfrak{s})/2} \otimes \wedge^* c_1(\mathfrak{s})^\perp$$

($\delta(\mathfrak{s}) = \gcd\{\langle c_1(\mathfrak{s}),\xi\rangle \mid \xi \in H_2(Y)\}$) (*II* 命題 5.151) は必ずしも 0 ではない．

References

[AH] C. Abbas, H. Hofer, Holomorphic Curves and Global Questions in Contact Geometry, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, 2019.

[DH] C. Druţu, M. Kapovich, Geometric Group Theory, Colloquium Publications **63**, AMS, 2018.

[F1] A. Floer, A relative Morse index for the symplectic action, Commun. Pure Appl. Math. Vol. XLI, 393–407 (1988)

[F2] A. Floer, The unregularized gradient flow of the symplectic action, Commun. Pure Appl. Math. Vol. XLI, 775–813 (1988)

[FHS] A. Floer, H. Hofer, D. Salamon, Transversality in ellipic Morse theory for the symplectic action, Duke Math. J. Vol. 80, No. 1, 251–292 (1995)

[H] P. de la Harpe, Topics in Geometric Group Theory, Chicago Lectures in Math. University of Chicago Press, 2000.

[Oh1] Y-J. Oh, On the structure of pseudo-homorphic discs with totally real boundary conditions, J. Geoem. Anal. Vol. 7. No.2, 305–327 (1997)

[Oh2] Y-J. Oh, Symplectic topology as the geometry of action functions, II - pants product and cohomological invariants, Commun. Anal. Geom. Vol. 7, 1–55 (1999)

更新履歴

- 2022/11/30　2022/10/1 版の補足説明中の誤記等を修正，本文に関する訂正と補足説明を追加.
- 2022/12/12　正誤表 1 の表記の仕方を変更.
- 2023/2/10　正誤表 1 の訂正の追加（一部注釈付き），補足説明 2.12, 2.13 を追加.