『しくみがわかるベイズ統計と機械学習』追加正誤表（2024.6.12）

pg.89 の式 5.1 に続く制約の式にて、 二つの式の間にコンマを追加

誤：

$$0 \leq \mu_j \leq 1 \qquad \sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1$$

正：

$$0 \leq \mu_j \leq 1, \qquad \sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1$$

---

pg.90 の式 5.3 の積分範囲の修正

誤：

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=1}^{k} \mu_j^{\alpha_j - 1} d\mu_1 \dots d\mu_{k-1}$$

正：

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^1 \int_0^{1-\mu_{k-1}} \dots \int_0^{1-\sum_{j=2}^{k-1} \mu_j} \prod_{j=1}^{k} \mu_j^{\alpha_j - 1} d\mu_1 \dots d\mu_{k-1}$$

---

pg.90 の式 5.4 の積分範囲と説明文の修正

誤：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \cdots \int_0^1 p(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\alpha}) d\mu_1 \dots d\mu_{k-1} \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{1}{B(\boldsymbol{\alpha})} \prod_{j=1}^{k} \mu_j^{\alpha_j - 1} d\mu_1 \dots d\mu_{k-1} \\
&= \frac{1}{B(\boldsymbol{\alpha})} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^{k} \mu_j^{\alpha_j - 1} d\mu_1 \dots d\mu_{k-1} = \frac{B(\boldsymbol{\alpha})}{B(\boldsymbol{\alpha})} = 1
\end{aligned}
$$

積分変数が μ_{k-1} までとなっているのは多項分布のパラメータは $\sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1$ という制約を満たさなくてはならないため、μ_1 から μ_{k-1} までの値が決まれば自動的に μ_k の値が決まり、それを動かして積分する必要がないためである。

正：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{1-\mu_{k-1}} \cdots \int_0^{1-\sum_{j=2}^{k-1} \mu_j} p(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\alpha}) d\mu_1 \dots d\mu_{k-1} \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^{1-\sum_{j=2}^{k-1} \mu_j} \frac{1}{B(\boldsymbol{\alpha})} \prod_{j=1}^{k} \mu_j^{\alpha_j - 1} d\mu_1 \dots d\mu_{k-1} \\
&= \frac{1}{B(\boldsymbol{\alpha})} \int_0^1 \cdots \int_0^{1-\sum_{j=2}^{k-1} \mu_j} \prod_{j=1}^{k} \mu_j^{\alpha_j - 1} d\mu_1 \dots d\mu_{k-1} = \frac{B(\boldsymbol{\alpha})}{B(\boldsymbol{\alpha})} = 1
\end{aligned}
$$

多項分布のパラメータについての制約 $\sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1$ により、μ_k を $1-\sum_{j=1}^{k-1} \mu_j$ で置き換えられるため、積分変数は μ_{k-1} までとなっている。

---

pg.92 の式 5.10 の削除、ならびに式 5.11（修正後は式番号が 5.10）の積分変数と説明文の修正

誤：

1 行目の右辺は積分の積を表しているため、それを展開して指数関数の部分をまとめると 2 行目の多重積分になる。$t=\sum_{j=1}^{k}t_j$ と定義し、それを使って $t_k=t-\sum_{j=1}^{k-1}t_j$ を取り除く。積分範囲は $t_j\in[0,\infty)$ より $t=\sum_{j=1}^{k}t_j\in[0,\infty)$ となるため変わらない。

続いて $j=1,...,k-1$ について、$\mu_j=t_j/t$ と定義する。すなわち $t_j=t\mu_j$ となるので、それを代入すると以下が得られる。

$$\prod_{j=1}^{k}\Gamma(\alpha_j)=\int_0^\infty...\int_0^\infty t_1^{\alpha_1-1}...t_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}\left(t-\sum_{j=1}^{k-1}t_j\right)^{\alpha_k-1}e^{-t}dt_1...dt_{k-1}dt$$

ガンマ関数の総乗の計算

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{k}\Gamma(\alpha_j)\\
&=\int_0^\infty...\int_0^\infty t^{\alpha_1-1}\mu_1^{\alpha_1-1}...t^{\alpha_{k-1}-1}\mu_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}\left(t-\sum_{j=1}^{k-1}t\mu_j\right)^{\alpha_k-1}e^{-t}dt_1...dt_{k-1}dt\\
&=\int_0^\infty...\int_0^\infty t^{\alpha_1-1}\mu_1^{\alpha_1-1}...t^{\alpha_{k-1}-1}\mu_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}\left(\left(1-\sum_{j=1}^{k-1}\mu_j\right)t\right)^{\alpha_k-1}e^{-t}dt_1...dt_{k-1}dt\\
&=\int_0^\infty...\int_0^\infty \mu_1^{\alpha_1-1}...\mu_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}\left(1-\sum_{j=1}^{k-1}\mu_j\right)^{\alpha_k-1}t^{\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j-1)}e^{-t}dt_1...dt_{k-1}dt\\
&=\int_0^\infty...\int_0^\infty \mu_1^{\alpha_1-1}...\mu_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}\left(1-\sum_{j=1}^{k-1}\mu_j\right)^{\alpha_k-1}t^{\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)-1}t^{-(k-1)}e^{-t}dt_1...dt_{k-1}d
\end{aligned}$$

正：

1 行目の右辺は積分の積であり、展開して指数関数の部分をまとめると 2 行目の多重積分になる。$t=\sum_{j=1}^{k}t_j$ と定義し、さらに $j=1,...,k-1$ について、$\mu_j=t_j/t$ と定義する。すると $t_j=t\mu_j$ となるので、代入して以下が得られる。

ガンマ関数の総乗の計算

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{k}\Gamma(\alpha_j) &= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty t_1^{\alpha_1 - 1} \ldots t_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1} \left(t - \sum_{j=1}^{k-1} t_j \right)^{\alpha_k - 1} e^{-t} dt_1 \ldots dt_k \\
&= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty t^{\alpha_1 - 1} \mu_1^{\alpha_1 - 1} \ldots t^{\alpha_{k-1}-1} \mu_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1} \left(t - \sum_{j=1}^{k-1} t\mu_j \right)^{\alpha_k - 1} e^{-t} dt_1 \ldots dt_k \\
&= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty t^{\alpha_1 - 1} \mu_1^{\alpha_1 - 1} \ldots t^{\alpha_{k-1}-1} \mu_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1} \left(\left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \right) t \right)^{\alpha_k - 1} e^{-t} dt_1 \ldots d \\
&= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \mu_1^{\alpha_1 - 1} \ldots \mu_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \right)^{\alpha_k - 1} t^{\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j - 1)} e^{-t} dt_1 \ldots dt_k \\
&= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \mu_1^{\alpha_1 - 1} \ldots \mu_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \right)^{\alpha_k - 1} t^{\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right) - 1} t^{-(k-1)} e^{-t} dt_1 \ldots
\end{aligned}
$$

---

pg.93 におけるヤコビ行列（式 5.11）の追加、 ならびに式 5.12 の積分範囲と説明文の修正

誤：

まだ定義されていなかった μ_k を $1 - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j$ と定義する。これによって $\sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1$ という条件が満たされるようになる。続いて $j = 1, \ldots, k-1$ について、$\mu_j = t_j/t$ から得られる $d\mu_j/dt_j = 1/t$ すなわち $t^{-1}dt_j = d\mu_j$ を使って積分変数を置き換える。この変数変換によって式 5.11 の最後の行の $t^{-(k-1)}dt_1 \ldots dt_{k-1}$ が $d\mu_1 \ldots d\mu_{k-1}$ に変わる。また、各 μ_j の積分範囲は $[0, 1]$ になる。それは μ_j を $[0, 1]$ の範囲で、t を $[0, \infty)$ の範囲で動かすことで、それらの積である t_j が $[0, \infty)$ の範囲を動くからである。

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{k}\Gamma(\alpha_j) &= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \mu_1^{\alpha_1 - 1} \ldots \mu_k^{\alpha_k - 1} d\mu_1 \ldots d\mu_{k-1} \int_0^\infty t^{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j - 1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{j=1}^{k} \mu_j^{\alpha_j - 1} d\mu_1 \ldots d\mu_{k-1} \int_0^\infty t^{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j - 1} e^{-t} dt
\end{aligned}
$$

正：

式 1 の積分について、$t_1, ..., t_k$ から $\mu_1, ..., \mu_{k-1}, t$ への変数変換を行う。t と μ_j の定義式の式変形により、$j = 1, ..., k-1$ については $t_j = t\mu_j$ であり、$t_k = t(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j)$ なので、ヤコビ行列は以下である。

$$
\frac{\partial(t_1, ..., t_k)}{\partial(\mu_1, ..., \mu_{k-1}, t)} = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & ... & 0 & \mu_1 \\ 0 & t & 0 & ... & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & t & ... & 0 & \mu_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & t & \mu_{k-1} \\ -t & -t & -t & ... & -t & \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j)\right) \end{bmatrix}
$$

ヤコビアンは t^{k-1} となる。$\mu_k = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j$ と定義し、以下が得られる。

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{k} \Gamma(\alpha_j) \\
&= \int_0^1 ... \int_0^{1-\sum_{j=2}^{k-1} \mu_j} \mu_1^{\alpha_1 - 1} ... \mu_k^{\alpha_k - 1} d\mu_1 ... d\mu_{k-1} \int_0^\infty t^{(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j) - 1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^1 ... \int_0^{1-\sum_{j=2}^{k-1} \mu_j} \prod_{j=1}^{k} \mu_j^{\alpha_j - 1} d\mu_1 ... d\mu_{k-1} \int_0^\infty t^{(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j) - 1} e^{-t} dt
\end{aligned}
$$