解答例

Sidney Resnick 氏の「Heavy-Tail Phenomena」(Springer) には多くの練習問題が含まれている。その中には著者の論文を含め、専門的な研究論文からの引用と思われるかなり高度な演習問題もあるが、本書の内容を理解する上で不可欠ではあり初等的・教育的に価値があると思われる問題も少なくない。著者は本書の中で問題を解く試みを推奨している。なお、訳者は極値理論や確率過程についてこれまで行われてきた膨大な研究成果に精通している専門家であるとは云えないので、すべての問題を十分に理解できているとは言えないが、幾つかの問題についての解答例を読者の勉学のために用意した。なおこのメモは不完全であるから適宜、更新するものとする。(2019.9.13)

第二章

2-1: $U(x) = 2\log x + \sin(\log x) \ \ (x > e)$ とする。t が大きいと

$$\begin{aligned}\frac{U(tx)}{U(x)} &= \frac{2\log tx + \sin(\log tx)}{2\log t + \sin(\log t)}\\ &\sim \frac{2\log t}{2\log t} = 1\end{aligned}$$

より緩慢変動関数, $\rho = 0$ となる。
$t = 2\log s + \sin(\log s)$ とすると、$dt = [\frac{2}{s} + \frac{1}{s}\cos(\log s)]ds$ より

$$\begin{aligned}U(x) &= exp[\int_1^t \frac{1}{t}dt]\\ &= exp[\int_e^x \frac{1}{s}(\frac{2+\cos\log s}{2\log s + \sin(\log s)})ds] \quad .\end{aligned}$$

2-2: $U(x) = [\log x]\cos[\log x]$ とする。t が大きいと

$$\begin{aligned}\frac{U(tx)}{U(x)} &= \frac{\log tx\cos[\log tx]}{\log t\cos[\log t]}\\ &= \frac{\log t\cos[\log t(1+\frac{x}{t}\cos\log t)}{\log t\cos[\log t]}\\ &\sim 1\end{aligned}$$

であるが、$U(x)$ は変動する。

2-3: (1) $U(x) = (1 + x^{-1})\log x$ とすると t が大きいと

$$\begin{aligned}\frac{U(tx)}{U(x)} &= \frac{(1+\frac{1}{tx})(\log t + \log x}{(1+\frac{1}{t})\log t}\\ &\sim \frac{\log t}{\log t} = 1\end{aligned}$$

より緩慢変動関数, $\rho = 0$ となる。

$t = \log s$ とすると $dt = [1/s]ds$,

$$U(x) = (1 + \frac{1}{x}) \exp \int_1^{\log x} \frac{1}{t} dt = (1 + \frac{1}{x}) \exp \int_1^x \frac{1}{s \log s} ds$$

と表現できる。

(2) $U(x) = \exp(\log x)^\alpha$ とすると $0 < \alpha < 1$ であるから t が大きいとき

$$\begin{aligned} \frac{U(tx)}{U(x)} &= \exp[(\log t + \log x)^\alpha - (\log t)^\alpha] \\ &\sim 1 \end{aligned}$$

より緩慢変動関数, $\rho = 0$ となる。

$y = \log x$ とすると

$$\exp[(\log x)^\alpha] = \exp[\int_0^y \frac{z^{\alpha-1}}{\alpha} dz] = \exp[\int_e^x \frac{1}{\alpha} [\log s]^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds$$

と表現できる。

(3) $U(x) = 2 + \sin(\log \log x)$ とすると、t が大きいとき

$$\begin{aligned} \frac{U(tx)}{U(x)} &= \frac{2 + \sin \log[logt(1 + \frac{\log x}{\log t})]}{2 + \sin \log \log t} \\ &\sim 1 \end{aligned}$$

より緩慢変動関数となる。

$t = 2 + \sin \log \log s$ とすると $dt = [\cos \log \log x] \frac{ds}{s(\log s)}$ より

$$\exp[\int_1^y \frac{1}{t} dt] = \exp[\int_{e^e}^x \frac{\cos \log \log s}{s \log s} (2 + \sin \log \log s) ds$$

と表現できる。

(4) $U(x) = \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{k}$ のとき $U(x) - \log[x] = \gamma([x])$, $|x - [x]| \leq 1$ であり $\gamma(x) \to \gamma(x \to \infty)$ と収束する (解析学で知られている)。t が大きいとき

$$\begin{aligned} \frac{U(tx)}{U(x)} &= \frac{\log tx + [tx] - tx + \gamma([tx])}{\log t + ([t] - t)} \\ &\sim 1 \end{aligned}$$

より緩慢変動関数となる。

$$U(x) = \log[x][1 + \frac{\gamma([x])}{\log[x]} = \log x[1 + \frac{([x] - x)}{x}][1 + \frac{\gamma([x])}{\log[x]}]$$

より $\log x$ の Karamata 表現を利用すればよい。

2-4: (1) $U(x) = 2 + \sin\log x \ \ (x > e)$ とすると

$$\frac{U(tx)}{U(x)} = \frac{2 + \sin[\log t + \log x]}{2 + \sin\log t}$$

より $t \to$ のとき変動して収束しない。

(2) $U(x) = \exp([\log x])$ とすると

$$\frac{U(tx)}{U(x)} = \exp[[\log t + \log x] - [\log t]]$$

となる。この関数は $t \to \infty$ のとき変動する。例えば $n \leq \log t < n+1$(n は正整数) とすると $\log x$ の値により変化するが、$n \to \infty$ のときベキ関数には収束しない。

(3) $U(x) = 2 + \sin x$ とすると

$$\frac{U(tx)}{U(x)} = \frac{2 + \sin tx}{2 + \sin t}$$

より $t \to$ のとき t の関数として変動して収束しない。

(4) $U(x) = \int_e^x \exp([\log u])du$ とすると

$$\frac{U(tx)}{U(x)} = \frac{\int_e^{tx} \exp([\log u])du}{\int_e^x \exp([\log u])du}$$

となる。(ここで $[\log u] = k \ (k \leq u < k+1)$ は $e^k \leq u < e^{k+1}$ と同値)。また $\exp(\log[u]) = \exp(\log x)\exp\log([x] - x)$ であるから、分母と分子の比は t が大きいとき、$(tx)^2/t^2 \sim x^2$ より正則変動となる。

2-5: 部分積分

$$\int_0^x u^\eta F(du) = [u^\eta F(u)]_0^x - \int_0^x \eta u^{\eta-1} F(u)du$$

および $1 - F(x) \sim x^{-\alpha}L(x) \ (x \to \infty)$ より $-dF(x) = (-\alpha)x^{-\alpha-1}L(x) + x^{-\alpha}L(x)$ を利用する。$\eta > \alpha$ のとき

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_0^x u^\eta[\alpha u^{-\alpha-1}L(u)du + u^{-\alpha}dL(u)]}{x^\eta(1 - F(x))} \\
&= \frac{\int_0^x \alpha u^{\eta-\alpha-1}L(u)du - \int_0^x u^{\eta-\alpha}dL(u)}{x^{\eta-\alpha}L(x)} \\
&= \frac{\int_0^1 \alpha(xv)^{\eta-\alpha-1}xL(xv)dv - \int_0^x u^{\eta-\alpha}dL(u)}{x^{\eta-\alpha}L(x)} \\
&\sim \alpha\int_0^1 v^{\eta-\alpha-1}dv = \frac{\alpha}{\eta - \alpha}
\end{aligned}$$

となる。

同様にして $\eta > \alpha$ のとき

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_x^\infty xu^{-\eta}[\alpha u^{-\alpha-1}L(u)du + u^{-\alpha}dL(u)]}{x^\eta(1-F(x)} \\
&= \frac{\int_x^\infty \alpha u^{-\eta-\alpha-1}L(u)du - \int_x^\infty u^{\eta-\alpha}dL(u)}{x^{\eta-\alpha}L(x)} \\
&= \frac{\int_0^1 \alpha(xv)^{-\eta-\alpha-1}xL(xv)dv - \int_0^x u^{-\eta-\alpha}dL(u)}{x^{\eta-\alpha}L(x)} \\
&\sim \alpha\int_x^\infty v^{-\eta-\alpha-1}dv = \frac{\alpha}{\eta+\alpha}
\end{aligned}$$

となる。

2-6: $1-F(x) \sim RV_{-\alpha}, x^{-\alpha}L(x) = U(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
\frac{1-F(\frac{x}{c})}{1-F(x)} &= \frac{(\frac{x}{c})^{-\alpha}L(\frac{x}{c})}{x^{-\alpha}L(x)1-F(x)} \\
&= c^{-\alpha}\frac{L(\frac{x}{c})}{L(x)}
\end{aligned}$$

であるが、24 ページより $(1-\epsilon)x^{-\alpha}L(s) \le L(sx) \le (1+\epsilon)x^{-\alpha}U(s)$ を利用すればよい。

2-7: 任意の x について $P(\frac{N_n}{n}) \to P(N=x)$, $P(N>0)=1$. $a(\cdot) \in RV_\rho$ より

$$\frac{a(n \times x}{a(n)} - x^\rho \to 0$$

より

$$P(\frac{N_n}{n} = x||\frac{a(n \times x)}{a(n)} - x^\rho| > \epsilon) \to 0\ .$$

2-8: 任意の $x_0 \ne 1$ で $L(tx_0)/L(t) \to 1$ とする。関数 $L(x)$ が単調なら $x = 2x_0, (1/2)x_0$ について、例えば

$$\frac{U(t \times 2x_0)}{U(t)} = \frac{U(2t \times x_0)}{U(2t)} \times \frac{U(2t)}{U(t)} \to 1$$

となる。任意の正整数 m, n について $x = (m/n)x_0$ についても同様であるから、任意の $x > 1$ について $L(tx)/L(t) \to 1$ となる。

2-9: (i) 条件 1 よりラプラス変換は

$$\begin{aligned}\phi_n(\lambda) &= \mathbf{E}[\exp -\lambda(b_n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i)] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}[\exp(-\lambda b_n^{-1} X_i)] \\ &= [\phi(\frac{\lambda}{b_n})]^n \to 1\end{aligned}$$

より $n\log[\phi(\frac{\lambda}{b_n})] = n\log[1-(1-\phi(\frac{\lambda}{b_n}))] \to 0$. したがって $\phi(\frac{\lambda}{b_n}) \to \phi(0) = 1$. 部分積分より $\int_0^\infty e^{-\tau x}P(X_1 > x)ds = \frac{1-\phi(\tau)}{\tau}$ より $\phi(\tau)$ は $\tau = 0$ で微分可能。

$$\frac{[\frac{1-\phi(\frac{1}{tx})}{\frac{1}{tx}}]}{[\frac{1-\phi(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}}]]} = x\frac{1-\phi(\frac{1}{tx})}{1-\phi(\frac{1}{t})} \sim \frac{\phi(0)\frac{1}{tx}}{\phi(0)\frac{1}{t}} = x$$

より $\frac{1-\phi(\tau^{-1})}{\tau^{-1}} \in RV_0$ となる。
(ii) 条件 2 を満たすとき例えば $x = 2$ とすると $\frac{1-\phi(\frac{1}{2t})}{1-\phi(\frac{1}{t})} \sim \frac{1}{2}$ より $t \to \infty$ より $\phi(0) = 1$. $n[1-\phi(\frac{1}{t_n x})] \sim n\phi^{'}(0)\frac{1}{t_n x}$ より $n/t_n = 1$ ととれば $n\log\phi(\frac{\lambda}{b_n}) = n\log[1-(1-\phi(\frac{\lambda}{b_n}))] \to 0$ より $[\phi(\lambda\lambda b_n)]^n \to 1$ となる。
(iii) $H(x) = x/U(x) \sim 1/[1-F(x)]$, $b_n = H^{\leftarrow}(n)$ $H(b_n) = n$ より $1-F(b_n) \sim 1/n$, $b_n \sim F^{\leftarrow}(1-1/n)$.

2-10: $U(x) = \int_0^\infty u(s)ds$ のとき $x > 1$ に対し

$$\begin{aligned}U(tx) - U(t) &= \int_t^{xt} u(s)ds \\ &= \int_1^x u(ty)tdy\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\frac{U(tx)-U(t)}{tu(t)} &= \int_1^x [\frac{u(ty)}{u(t)}y]\frac{1}{y}dy \\ &\sim \int_1^x \frac{1}{y}dy = \log x\end{aligned}$$

ここで $g(t) = U(te) - U(t) = \int_t^{te} u(s) = \int_1^2 [\frac{u(ty)}{u(t)}y]tu(t)\frac{1}{y}dt \sim tu(t)$ となる。

2-11: (a) $r \in RV_1$ のとき $s = r(t)$ に対し

$$\frac{U[r(tx)] - U[r(t)]}{g^*} \sim \frac{U[xr(t)] - U[r(t)]}{g^*} = \frac{U[xs] - U[s]}{g^*}$$

より導ける。

(b)

$$\frac{U(tx)-U(t)}{g(x)}\to -\log x=\log x^{-1}$$

より $y=x^{-1}$,$s=tx=t/y$ とおく。$1/U\in\Pi_{-1}$ のとき

$$\frac{U^{-1}(tx)-U^{-1}(t)}{g^*(x)}\to \log x^{-1}$$

とすると

$$\frac{U^{-1}(s)-U^{-1}(sy)}{g^*(x)}=\frac{1}{U(s)U(sy)g^*(t)}U(sy)-U(s)\sim\log y$$

より得られる。

(c)

$$\begin{aligned}\frac{U(tx)L_0(tx)-U(t)L_0(t)}{g^*}&=\frac{[U(tx)-U(t)]L_0(tx)+U(t)[L_0(tx)-L_0(t)]}{g^*}\\&=\frac{[U(tx)-U(t)]}{g^*(t)}[\frac{L_0(tx)}{L_0(t)}]L_0(t)+\frac{U(t)}{g^*(t)}L_0(t)[[\frac{L_0(tx)}{L_0(t)}-1]\\&=\frac{[U(tx)-U(t)]}{g(t)}[\frac{L_0(tx)}{L_0(t)}]+\frac{U(t)}{g(t)}L_0(t)[[\frac{L_0(tx)}{L_0(t)}-1]\end{aligned}$$

ただし $g^*(t)=g(t)L_0(t)$ とした。第二項が 0 に収束する条件が必要十分。

第 3 章

3-1: $f\geq 0, f\in C_K^+(E)$ に対して $g(x)=1-e^{-f(x)}$ をとる。このとき $\mu_n(1-e^{-f})\to\mu_0(1-e^{-f})$ となる。逆に任意の $f\geq 0, f\in C_K^+(E)$ に対して $f=\sum_i(1-e^{-g_i}), 0\leq 1-e^{-g_i}\leq 1, g_i\geq 0$ と有限和にかける。このとき $\mu_n(1-e^{-g_i})\to\mu_0(1-e^{-g_i})$ より $\mu_n(f)\to\mu_0(f)$ を意味するので弱収束が得られる。

3-2: 写像 $T_t(\xi)=\xi[0,t]$ とすると、$\xi_0[0,t]=0$(almost surely) であり、任意の $t\in[0,\infty)$ について $T_t(\xi_n)-T_t(\xi_0)=\xi_n[0,t]-\xi_0[0,t]=\xi_n[0,t]\to 0$(almost surely). almost surely(ほとんど至る) 所で連続。

3-3: (a) $T_1(m_1,m_2)=m_1+m_2$ とするとき $T_1(m_1^n,m_2^n)-T_1(m_1^0,m_2^0)=(m_1^n-m_1^0)+(m_2^n-m_2^0)$ となる。$m_1^n\to m_1-0, m_2^n\to m_2^0$ のとき $T_1(m_1^n,m_2^n)\to T_1(m_1^0,m_2^0)$ より連続。

(b) $T_2(\mu,\lambda)=\lambda\mu$ とするとき $T_2(\mu,\lambda)-T_2(\mu^0,\lambda^0)=(\lambda-\lambda^0)\mu+\lambda^0(\mu-\mu^0)$ となる。$\lambda\to\lambda^0,\mu\to\mu^0$ のとき $T_2(\mu,\lambda)\to T_2(\mu^0,\lambda^0)$ より連続。

(c) $T_3(\mu,\lambda)=\mu(\lambda(\cdot))$ とするとき $T_3(\mu,\lambda)-T_3(\mu^0,\lambda^0)=\mu(\lambda(\cdot))-\mu^0(\lambda^0(\cdot))=$

$\mu(\lambda(\cdot)-\lambda^0(\cdot)+\lambda^0(\cdot))-\mu^0(\lambda^0(\cdot))$ ここで $\mu\in(0,+\infty]$ であるから $\mu=+\infty$ で連続とは限らない。

3-4: $c_n\epsilon_{x_n}\overset{v}{\to}c_0\epsilon_{x_0}$ は任意の $f\in C_K^+(E)$ に対して $\int_E f(x)\mu_n(dx)=c_nf(x_n)\to c_0f(x_0)$ と同値。したがって

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mu_n(dx)-c_0f(x_0)&=c_nf(x_n)-c_0f(x_0)\\&=(c_n-c_0)f(x_n)+c_0[f(x_n)-f(x_0))]\to 0\end{aligned}$$

となる必要十分条件は $c_n-c_0\to 0$ かつ $x_n-x_0\to 0.$

3-5: 任意の $f\in C_K^+(E)$ に対して $\int_E f(x)\mu_n(dx)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}f(\frac{i}{n})$ (右辺が収束することを仮定)。したがって例えば $\sum_{i=1}^n\epsilon_{i/n}\frac{1}{n}\overset{v}{\to}Leb([0,1])$.

3-8 (Proposition 2.2 (a) of Davis and Resnick (1988): $m_n\overset{v}{\to}m_o$ とする。n が大きいときある k $(1\le k<\infty)$ をとり $m_n(S)=k, m_0(S)=k$ とする。m_n, m_0 は点過程であるから

$$m_n=\sum_{j=1}^k\epsilon_{x_j^{(n)}}\ ,\ m_0=\sum_{j=1}^k\epsilon_{x_j}\ ,$$

であり $x_j^{(n)}\to x_j$ $(n\to\infty)$ ととれる。T が連続なので

$$\hat{T}m_n=\sum_{j=1}^k\epsilon_{Tx_j^{(n)}}\to\hat{T}m_0=\sum_{j=1}^k\epsilon_{Tx_j}$$

となる。

3-9 (Proposition 2.2 (b) of Davis and Resnick (1988):

$$m_n=\sum_i\epsilon_{t_i^{(n)},x_i^{(n)}}\in M_p(\mathbf{E}_1\times\mathbf{E}_2$$

が $m_0=\sum\epsilon_{t_i,x_i}$ に漠収束すると仮定する。任意の $K_1\in E_1$(コンパクト集合上の) 開集合にたいし

$$\sum_i\epsilon_{t_i^{(n)},Tx_i^{(n)}}I_{t_i^{(n)}\in G_i}\overset{v}{\to}\sum_i\epsilon_{t_i,Tx_i}I_{t_i^{(n)}\in G_i}$$

となる。任意の $f\in C_K^+(E_1\times E_2)$ にたいし

$$\begin{aligned}\sum_i f(t_i^{(n)},Tx_i^{(n)})&=\sum_i f(t_i^{(n)},Tx_i^{(n)})I_{t_i^{(n)}\in G_i}\\&\to\sum_i f(t_i,Tx_i)I_{t_i\in G_i}=\sum_i f(t_i,Tx_i)\end{aligned}$$

となる。

3-10: (a) 任意の n についての独立性より $P(\mathbf{X}_n \leq \mathbf{x}, \mathbf{Y}_n \leq \mathbf{y}) = P(\mathbf{X}_n \leq \mathbf{x})P(\mathbf{Y}_n \leq \mathbf{y})$ $\mathbf{X}_n$ と $\mathbf{Y}_n$ の収束より $P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}, \mathbf{Y} \leq \mathbf{y}) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})P(\mathbf{Y} \leq \mathbf{y})$ より独立。
(b) 特性関数を利用する。独立性より

$$\mathbf{E}[e^{i\mathbf{t}'(\mathbf{X}_n+\mathbf{Y}_n)}] = \mathbf{E}[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}_n}]\mathbf{E}[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{Y}_n}] \to \mathbf{E}[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}]\mathbf{E}[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{Y}}] = \mathbf{E}[e^{i\mathbf{t}'(\mathbf{X}+\mathbf{Y})}] \ .$$

3-11: (a) $Var[X_n - m] = \sigma_n^2 \to 0$ より X_n は m に確率収束する。
(b) $Y_n = \frac{f(X_n)-f(m)}{\sigma_n f'(m)}$ のとき

$$Y_n - Z_n = \frac{f(X_n) - f(m) - f'(X_n - m)}{\sigma_n f'(m)} = \frac{((f'(\theta_n) -)(X_n - m)}{\sigma_n f'(m)}$$

$(m \leq \theta_n \leq X_n)$ となる。$X_n \xrightarrow{p} 0$ より f' は有界だから $f'(\theta_n) - f(m) \xrightarrow{p} 0$ より $Var[Y_n - Z_n] \xrightarrow{p} 0.$
(c)

$$\frac{f(\frac{S_n}{n}) - f(p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} f'(p)} \sim N(0,1) \ .$$

3-12: $f \in C_K^+$ が upper semi-continuous なとき、

$$\begin{aligned}
P(f) &= \lim_n \int_E f(x) d\mu_n(x) \\
&\geq \lim_n \int_E \limsup x_m \to x f(x_m) d\mu_n(x_m) \\
&= \limsup_m \lim_n \int_E f(x_m) d\mu_n(x_m) = \limsup_m P(f) \ .
\end{aligned}$$

3-14: コンパクト集合 $K = \{|X_n| \leq \alpha\}$ とすると

$$\begin{aligned}
P(K^c) &= \int_{|X_n| > \alpha} \mu_n(dx) \\
&= \int_{|X_n|^\delta > \alpha^\delta} [\frac{|X_n|^\delta}{\alpha^\delta}] \mu_n(dx) \\
&= \frac{1}{\alpha^\delta} \int_{|X_n|^\delta > c} |X_n|^\delta \mu_n(dx) \to 0
\end{aligned}$$

$c \to \infty$ (一様可積分), ただし $c = \alpha^\delta$ とした. これよりタイト $P(K) > 1 - \epsilon$. 特に $\sup_n E[|X_n|^{\delta+\eta}] < +\infty$ なら

$$\int_{|X_n|^\delta > c} |X_n|^\delta \mu_n(dx) \leq \int_{|X_n|^\delta > c} |X_n|^\delta [\frac{|X_n|^\eta}{c^{\eta/\delta}}]\mu_n(dx) + \int_{|X_n|^\delta \leq c} [\frac{|X_n|^{\eta+\eta}}{c^{\eta/\delta}}]\mu_n(dx)$$
$$= \frac{1}{c^{\eta/\delta}} \int |X_n|^{\delta+\eta}\mu_n(dx)$$

より一様可積分性が得られる。

3-15: (3.33) において $x^\gamma = y$ とおくと $x = y^{1/\gamma}$. $t = (1/(1-F(s)))$ とおくと $s \to \infty$ ($t \to \infty$) より Page 34 (v) を適用する。

$$\frac{\bar{F}(sy)}{\bar{F}(s)} = \frac{1-F(sy)}{1-F(s)} = \frac{U^{\leftarrow}(s)}{U^{\leftarrow}(sy)} \to y^{-1/\gamma} .$$

Vervaart の補題を適用すると (3.34) を得る。

3-16: (a) $1 - F(x) = x^{-1/\gamma} + cx^{-1/\delta}$ より

$$\frac{\bar{F}(sx)}{\bar{F}(s)} - x^{-1/\gamma} = \frac{(tx)^{-1/\gamma} + c(tx)^{-1/\delta} - x^{-1/\gamma}[t^{-1/\gamma} + ct^{-1/\delta}]}{t^{-1/\gamma} + ct^{-1/\delta}}$$
$$\sim \frac{c(x^{-1/\delta} - x^{-1/\gamma})}{t^{-1/\gamma+1/\delta}} .$$

(b) $F(x) = 1/2 + (1/\pi)arctanx$ より $y = U(x) = 1/[1/2 - (1/\pi)arctanx]$, $x = tan\pi[1/2 - 1/y]$ を利用する。$x = \sin[\pi(1/2-1/y)]/\cos[\pi(1/2-1/y)] = \cos\pi[(-1/y)/(-\sin\pi(-1/y))] = \cos(\pi/y)\sin(\pi/y)$ を評価すると、y が大なら $U^{-1}(y)$ は $(y/\pi)[1+3(\pi/y)^2]$ より $y = U(x) \sim \pi[x - 1/(3x)]$ となる。したがって

$$\frac{U(tx)}{U(t)} \sim \frac{x - \frac{x^{-1}}{3t^2}}{1 - 1/(3t^2)}$$

となる。

(d) X_1, X_1 が独立な指数分布 (母数 1) のとき $X_1 + X_2$ がガンマ分布 (2,1) にしたがうので密度関数は $g(x) = \frac{1}{\Gamma(2)}x^{2-1}e^{-x}$ で与えられるので $1 - F(x) = \inf_x^\infty g_y)dy = xe^{-x} + e^{-x}$ となる。したがって

$$\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \frac{\frac{1+\log(tx)}{tx}}{\frac{1+\log t}{t}} \to \frac{1}{x}$$

となる ($\gamma = 1, \delta = 0$)。

3-18: 初期分布 $\pi^{'} = (\pi_j)$ とすると k 期分布は $\pi^{'}[P^{(n)}]^k$ となるが $P^{(n)} \to P$ のとき $\pi^{'}[P^{(n)}]^k \to \pi^{'}P^k = \pi^{'}$ となり、定常分布に収束する (最後の等式は $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$

による)。

3-19: 集合 $x \in \mathbf{S}$ 上から収束しない列を除いた集合を $\mathbf{S}^*$ とすると $\mathbf{S} = \mathbf{D} \cup \mathbf{S}^*$ であるが $P_0(\mathbf{D}) = 0$ より $\mathbf{S}^*$ に対して Skkrokhod の定理を適用すればよい。

3-20:

$$X_n - (\xi_0, \eta_0) = [(\xi_n, \eta_n) - (\xi_n, \eta_0)] + [(\xi_n, \eta_0) - (\xi_0, \eta_0)]$$

と分解する。独立性 (条件付期待値) と収束の仮定より $\mathbf{E}[f(\xi_n, \eta_0)] - \mathbf{E}[f(\xi_0, \eta_0)] \to 0$ および $\mathbf{E}[f(\xi_n, \eta_n)] - \mathbf{E}[f(\xi_n, \eta_0)] \to 0$ が成り立つ。したがって $\mathbf{E}[f(\xi_n, \eta_n)] - \mathbf{E}[f(\xi_0, \eta_0)] \to 0\ (n \to \infty)$.

3-21: Skorohod 距離をとると $|\sup_{0 \le s \le 1} x_n(s) - \sup_{0 \le s \le 1} y_n(\lambda(s))| \to 0\ (n \to \infty)$ となる。

3-22: 例えば $X_n(t) = 0\ (0 \le t \le 1 - 1/n), n[t - (1 - 1/n)]\ (1 - 1/n \le t^l eq1)$ とすると $X_\infty = \lim_{n \to \infty} X_n(t) \in D[0,1] \backslash C[0,1]$ となるが Skorohod 距離では収束しない。

第 4 章

4-1: 一般に $X_i\ (i = 1, \cdots, n)$ が独立に密度 $f(x_i)$、分布 $F(x_i)$ にしたがうとき、順序統計量 $X_{jn}\ , j = k_1, \cdots, k_h$ の同時密度は

$$f(y_1, \cdots, y_h) = \frac{n!}{(k_1 - 1)!(k_2 - k_1 - 1) cdots (k_h - k_{h-1} - 1)!(n - k_h)!}$$
$$\times f(y_1) \cdots f(y_h)[F(y_1)]^{k_1 - 1}[F(y_2) - F(y_1)]^{k_2 - k_1 - 1} \cdots [1 - F(y_h)]^{n - k_h}$$

となる。(例えば Y_l が与えられた時の Y_k の条件付分布は密度関数 $f(x|Y < y_l) = f(x)/F(y_l)$ から独立な l-1 個の標本から k 番目となるので条件付密度と周辺密度 $f(y_l)$ の積となる。例えば竹内啓「数理統計学」140-141 頁を参照。)
いま $X_i\ (i = 1, \cdots, n)$ が独立に指数分布にしたがうとき順序統計量 $E_{in}\ (i = 1, \cdots, n)$ の同時密度関数は $f(e_1, \cdots, e_n) = n! \lambda^n e^{-\sum_{i=1}^n e_i}$ で与えられる。変換 $D_1 = E_{1n}, D_2 = E_{2n} - E_{1n}, \cdots, D_n = E_{nn} - E_{n-1,n}$ より同時分布は

$$\begin{aligned} f(d_1, \cdots, d_n) &= n! \lambda^n \exp\{-[d_1 + (d_1 + d_2) + \cdots + (d_1 + \cdots + d_n)]\} \\ &= n! \lambda^n \exp(-n d_1 - (n-1) d_2 - \cdots - [(n+1) - (k+1)] d_{k+1} \\ &\quad - \cdots - [(n+1) - n] d_n) \end{aligned}$$

より $D_{k+1} = E_{k+1,n} - E_{kn} \sim Exp[(n-k)\lambda]$ となる。

4-2. i.i.d. 確率変数 $X_i\ , i = 1, \cdots, n$ が $X_{(n)}$ となる分布は同一である。$X_{(n)}$ を

条件とすると $X_i|X_{(n)}=x$ は i.i.d. 確率変数列、したがって $X_{(1)},\cdots,X_{(n-1)}$ は順序統計量である。これを繰り返すと $X_{(k)}$ を条件とした順序統計量もしたがう。$X_{(n)}=x$ を条件とする $X_{(n)}$ の条件付分布は 4.1 の最初の部分で与えられているが、x にのみ依存しているので $X_{(k)}$ はマルコフ連鎖となる。

4-3. 順序統計量 $E_{(k)}$ の密度関数は

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= \frac{1}{B(k,n-k+1}f(x)[F(x)]^{k-1}[1-F(x)]^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}[e^{-x}][1-e^{-x}]^{k-1}[1-(1-e^{-x})]^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}e^{-x(n+1-k)}[1-e^{-x}]^{k-1}
\end{aligned}$$

で与えられる。任意の $x>0$ に対して $P(X_{(k)}\leq x)=F(x)\to 0$ となるのは $f_k(x)\to 0$. Stirling の公式 $n!\sim n^{n-1/2}e^{-n}$ を用いて評価する。$n\to\infty, k\to$ のとき

$$\begin{aligned}
&\frac{n^{n-1/2}}{n^{n-k-1/2}(1-k/n)^{n-k-1/2}k^{k-1/2}}e^{-(n+1-k)} \\
&\sim \sqrt{k}[\frac{n}{k}]^k e^{-n[(1-\frac{k}{n}+\frac{1}{n})x]}\to 0
\end{aligned}$$

となるのは

$$\frac{1}{2}\log k + k\log(\frac{n}{k}) - n[(1-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}]\to 0$$

と同値。$n\to\infty, k\to\infty, n/k\to\infty$ のとき成り立つ。

4-5. 推定された直線の切片を $\hat{c}$ とするとき、LS($\hat{\alpha}_j\xrightarrow{p}\alpha_j$, $\hat{c}\xrightarrow{p}0$) より Hausdorf 距離の意味
(2 次元なら $d_H=max\{\sup_{x\in X}d(x,Y),\sup_{y\in Y}d(y,X\})$
で収束する.

第 5 章

5-3 : まず $\mu_n\xrightarrow{v}\mu \Leftrightarrow \mu_n(1-e^{-f})\to\mu_0(1-e^{-f})\ \forall f\in C_K^+(\mathbb{E}),\ n\to\infty$ を示す.

($\Rightarrow$) 任意の $f\in C_K^+(\mathbb{E})$ に対して $1-e^{-f}\in C_K^+(\mathbb{E})$ であるから漠収束の定義から $\mu_n(1-e^{-f})\to\mu_0(1-e^{-f})$.

($\Leftarrow$) 補題 3.1 より, $\mathbb{E}$ の任意のコンパクト集合 K_0 に対して $1_{K_0}\leq f_n\downarrow 1_{K_0}$ となる関数列 $\{f_n\}\subset C_K^+(\mathbb{E})$ が存在する. このとき, $m\geq 1$ に対して

$1-e^{-1_{K_0}} \le 1-e^{-f_m} \downarrow 1-e^{-1_{K_0}}$, $m \to \infty$ であるから,

$$(1-e^{-1})\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K_0) \le \lim_{n\to\infty} \mu_n(1-e^{-f_m}) = \mu_0(1-e^{-f_m})$$
$$\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mu_0(1-e^{-1_{K_0}}) = (1-e^{-1})\mu_0(K_0).$$

最後の極限をとる際には測度の連続性を利用した. 従って $\mathbb{E}$ の任意のコンパクト集合 K_0 に対して $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K_0) \le \mu_0(K_0)$ が成り立つので, 定理 3.2 (Portmanteau) より $\mu_n \overset{v}{\to} \mu_0$.

以下問題 5-3 を考える.

($\Rightarrow$) 定理 5.2 より, $N_n \Rightarrow N_0$ のとき, N_n, N_0 のラプラス汎関数をそれぞれ Ψ_{N_n}, Ψ_{N_0} とすると, 任意の $f \in C_K^+(\mathbb{E})$ に対して $\Psi_{N_n}(f) \to \Psi_{N_0}(f)$, $n \to \infty$. 即ち,

$$\mu_n(1-e^{-f}) = \int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})\mu_n(dx) \to \int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})\mu_0(dx) = \mu_0(1-e^{-f}),\ n \to \infty.$$

従って, 先ほど示した結果から $\mu_n \overset{v}{\to} \mu$.

($\Leftarrow$) $\mu_n \overset{v}{\to} \mu$ が成り立つとき, 任意の $f \in C_K^+(\mathbb{E})$ に対して $\mu_n(1-e^{-f}) \to \mu_0(1-e^{-f})$ となるから, e^{-x} の連続性より, $\Psi_{N_n}(f) \to \Psi_{N_0}(f)$, $n \to \infty$. 定理 5.2 より, これは $N_n \Rightarrow N_0$ を意味する.

5-5 : (a) $f \in C_K^+(\mathbb{E})$, $m = \sum_i \xi_i \epsilon_{y_i}$ とすると,

$$E[e^{-m(f)}] = E[e^{-\sum_i \xi_i f(y_i)}] = \prod_i E[e^{-f(y_i)\xi_1}]$$
$$= \prod_i e^{-(1-e^{-f(y_i)})} = e^{-\sum_i(1-e^{-f(y_i)})}.$$

(b) $m = \sum_i \xi_i \epsilon_{Y_i}$ とすると, (a) の結果と定理 5.1 から,

$$E[e^{-m(f)}] = E\left[E\left[e^{-\sum_i \xi_i f(Y_i)}|\{Y_i\}\right]\right]$$
$$= E\left[e^{-\sum_i(1-e^{-f(Y_i)})}\right]$$
$$= \exp\left(-\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-(1-e^{-f(x)})})\nu(dx)\right).$$

5-6 : $m = \sum_i \xi_i \epsilon_{y_i}$ とすると,

$$E[e^{-m(f)}] = E[e^{-\sum_i \xi_i f(y_i)}] = \prod_i E[e^{-f(y_i)\xi_1}]$$
$$= E[e^{-\xi_1 \sum_i f(y_i)}] = \phi\left(\sum_i f(y_i)\right) = \phi(m(f)).$$

5-7 : $\{X(t), t \geq 0\}$ がドリフト付きの正のジャンプを持つレヴィ過程 (レヴィ測度は ν) であるとき, このレヴィ過程を確率積分で表現する (レヴィ-伊藤表現) 際に用いる $[0,\infty)\times(0,\infty]$ 上のポアソン乱測度を $N = PRM(\mathbb{LEB}\times\nu)$ とする. このとき, N はこのレヴィ過程が与えられた時間内にあるサイズのジャンプを何回したかを数える計数測度である. 従って $x > 0$ に対して

$$\begin{aligned} P(Y(t) \leq x) &= P\left(\{[0,t] \text{ の間に } x \text{ よりサイズの大きいジャンプが発生しない }\}\right) \\ &= P(N(([0,t] \times (x,\infty])) = 0) \\ &= e^{-t\nu((x,\infty])} =: F^t(x). \end{aligned}$$

ここで, 最後の等式ではポアソン乱測度の性質より, $N(([0,t] \times (x,\infty]))$ が平均 $t\nu((x,\infty])$ のポアソン分布であることを利用した. 以上の議論により $Y(\cdot)$ は極値過程であり, その分布関数も上記のように与えられる.

5-8 : $f \in C_K^+((0,\infty])$ を任意にとる. $N = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_{\Gamma_k}$ を強度 $\lambda > 0$ の一様ポアソン過程とする.

1.

$$
\begin{aligned}
&E[e^{-N_1(f)}] \\
&= E\left[\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{n=0}^{\tau^{(k)}} e^{-f(\Gamma_k+S_n^{(k)})}\right] = E\left[E\left[\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{n=0}^{\tau^{(k)}} e^{-f(\Gamma_k+S_n^{(k)})}\,\middle|\,\{\Gamma_k\},\{\tau^{(k)}\}\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{n=0}^{\tau^{(k)}} E\left[e^{-f(\Gamma_k+S_n^{(k)})}\,\middle|\,\{\Gamma_k\},\{\tau^{(k)}\}\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{n=0}^{\tau^{(k)}} E\left[e^{-f(\Gamma_k+S_n^{(1)})}\,\middle|\,\{\Gamma_k\},\{\tau^{(k)}\}\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{k=1}^{\infty} e^{-\sum_{n=0}^{\tau^{(k)}} f(\Gamma_k+S_n^{(1)})}\right] = E\left[e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\tau^{(k)}} f(\Gamma_k+S_n^{(1)})}\right] \\
&= E\left[E\left[e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\tau^{(k)}} f(\Gamma_k+S_n^{(1)})}\,\middle|\,\{\Gamma_k\},S_n^{(1)}\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{k=1}^{\infty} E\left[e^{-\sum_{n=0}^{\tau^{(1)}} f(\Gamma_k+S_n^{(1)})}\,\middle|\,\{\Gamma_k\},S_n^{(1)}\right]\right] = E\left[e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\tau^{(1)}} f(\Gamma_k+S_n^{(1)})}\right] \\
&= E\left[E\left[e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\tau^{(1)}} f(\Gamma_k+S_n^{(1)})}\,\middle|\,\tau^{(1)},\{S_n^{(1)}\}_{n=1}^{\tau^{(1)}}\right]\right] \\
&= E\left[e^{-N(\sum_{n=0}^{\tau^{(1)}} f(\cdot+S_n^{(1)}))}\right] = E\left[\exp\left\{-\lambda\int_0^{\infty}\left(1-e^{-\sum_{n=0}^{\tau^{(1)}} f(x+S_n^{(1)})}\right)dx\right\}\right] \\
&= E\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\exp\left\{-\lambda\int_0^{\infty}\left(1-e^{-\sum_{n=0}^{\ell} f(x+S_n^{(1)})}\right)dx\right\}P[\tau^{(1)}=\ell]\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} E\left[\exp\left\{-\lambda\int_0^{\infty}\left(1-e^{-\sum_{n=0}^{\ell} f(x+S_n^{(1)})}\right)dx\right\}\right]P[\tau^{(1)}=\ell].
\end{aligned}
$$

2. 1. と同様にして,

$$
\begin{aligned}
E[e^{-N_1(f)}] &= E\left[e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\tau^{(1)} f(\Gamma_k+Y_1^{(1)})}\right] = E\left[\left(e^{-\sum_{k=1}^{\infty} f(\Gamma_k+Y_1^{(1)})}\right)^{\tau^{(1)}}\right] \\
&= E\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(e^{-\sum_{k=1}^{\infty} f(\Gamma_k+Y_1^{(1)})}\right)^{\ell} P[\tau^{(1)}=\ell]\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} E\left[e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\ell f(\Gamma_k+Y_1^{(1)})}\right]P[\tau^{(1)}=\ell] \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} E\left[e^{-N(\ell f(\cdot+Y_1^{(1)}))}\right]P[\tau^{(1)}=\ell] \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} E\left[\exp\left\{-\lambda\int_0^{\infty}\left(1-e^{-\ell f(x+Y_1^{(1)})}\right)dx\right\}\right]P[\tau^{(1)}=\ell]
\end{aligned}
$$

第 6 章

6-2：$\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ であるから, 定理 3.6(ii) より $b_n \to \infty$ が存在して $n(1-F(b_n)) \to 1$ を満たすようにとれる．このとき, 定理 3.6(iii) と問題の仮定から

$$nP(b_n^{-1}Y_i \in \cdot) \xrightarrow{v} c_i\nu_\alpha.$$

ここで ν_α は $\nu_\alpha((x,\infty]) = x^{-\alpha}$ を満たす測度．以下 $k=2$ の場合を示す．問題の仮定から

$$nP\left(\left(\frac{Y_1}{b_n}, \frac{Y_2}{b_n}\right) \in (x,\infty] \times (x,\infty]\right) = \frac{P\left(b_n^{-1}Y_1 > x, b_n^{-1}Y_2 > x\right)}{(1-F(b_n))} + o(1) \to 0,\ n \to \infty.$$

これにより, $nP\left(\left(\frac{Y_1}{b_n}, \frac{Y_2}{b_n}\right) \in \cdot\right)$ は $[0,\infty]^2\backslash\{\mathbf{0}\}$ の内点に測度をもたない測度に漠収束する．このことと各成分の漠収束の結果から,

$$nP\left(\left(\frac{Y_1}{b_n}, \frac{Y_2}{b_n}\right) \in (dx, dy)\right) \xrightarrow{v} c_1\nu_\alpha(dx)\delta_0(dy) + c_2\delta_0(dx)\nu_\alpha(dy).$$

従って,

$$\begin{aligned}\frac{P\left(Y_1 + Y_2 > b_n\right)}{(1-F(b_n))} &= nP\left(b_n^{-1}(Y_1+Y_2) > 1\right) + o(1) \\ &= nP(b_n^{-1}Y_1 > 1) + nP(b_n^{-1}Y_2 > 1) + o(1) \\ &\to c_1\nu_\alpha((1,\infty]) + c_2\nu_\alpha((1,\infty]) = c_1 + c_2.\end{aligned}$$

6-4：$b(n) \to \infty$ は $n(1-F(b(n))) = nP(Z_1 > b(n)) \to 1$ を満たす定数列とする．確率変数列 $\{X_n\}$ と定数 c について,

$$X_n \xrightarrow{P} c \Leftrightarrow E[X_n] \to c,\ \mathrm{Var}(X_n) \to 0$$

であることを利用する．優収束定理より,

$$\begin{aligned}E\left[\int_0^x \frac{m}{n}\sum_{t=1}^n \epsilon_{Z_t/b(m)}(u,\infty]u^{\beta-1}du\right] &= \int_0^x mP\left(Z_1/b(m) > u\right)u^{\beta-1}du \\ &\to \int_0^x \nu_\alpha(u,\infty]u^{\beta-1}du.\end{aligned}$$

また優収束定理より,

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^x \frac{m}{n}\sum_{t=1}^n \left(\epsilon_{Z_t/b_{(m)}}(u,\infty]-P(Z_1/b_{(m)})\right)u^{\beta-1}du\right)^2\right]\\
&=\frac{m}{n}\int_0^x\int_0^y\left\{mP\left(\frac{Z_1}{b(m)}>\max\{u,t\}\right)\right.\\
&\left.-mP\left(\frac{Z_1}{b(m)}>u\right)P\left(\frac{Z_1}{b(m)}>t\right)\right\}u^{\beta-1}t^{\beta-1}dudt\\
&\le\frac{m}{n}\int_0^x\int_0^y mP\left(\frac{Z_1}{b(m)}>\max\{u,t\}\right)u^{\beta-1}t^{\beta-1}dudt\to 0,\ n\to\infty.
\end{aligned}
$$

6-7 : $f\in C_K^+(\mathbb{E}\times\mathbb{E}')$ を任意にとる. このとき, $M_n=\sum_k \epsilon_{(Y_{n,k},X_k)}$ のラプラス汎関数は

$$
\begin{aligned}
E[e^{-M_n(f)}]&=E\left[E\left[e^{-\sum_k f(Y_{n,k},X_k)}\middle|\{Y_{n,k}\}_{k\ge1}\right]\right]\\
&=E\left[\prod_k E\left[e^{-f(Y_{n,k},X_1)}\middle|\{Y_{n,k}\}_{k\ge1}\right]\right]\\
&=E\left[\prod_k\int_{\mathbb{E}'}e^{-f(Y_{n,k},x)}P[X_1\in dx]\right]=E\left[\prod_k g(Y_{n,k})\right].
\end{aligned}
$$

ただし $g(y)=\int_{\mathbb{E}'}e^{-f(y,x)}P[X_1\in dx]$. ここで, $-\log g\in C_K^+(\mathbb{E})$ であることに注意すると, $N_n:=\sum_k \epsilon_{Y_{n,k}}\Rightarrow PRM(\nu)=:N$ であるから,

$$
\begin{aligned}
E[e^{-M_n(f)}]&=E\left[e^{-\sum_k(-\log g(Y_{n,k}))}\right]=E\left[e^{-N_n(-\log g)}\right]\\
&\to E[e^{-N(-\log g)}]=\exp\left\{-\int_{\mathbb{E}}(1-e^{\log g(y)})\nu(dy)\right\}\\
&=\exp\left\{-\int_{\mathbb{E}}(1-g(y))\nu(dy)\right\}\\
&=\exp\left\{-\int_{\mathbb{E}}\left(1-\int_{\mathbb{E}'}e^{-f(y,x)}P[X_1\in dx]\right)\nu(dy)\right\}\\
&=\exp\left\{-\int_{\mathbb{E}\times\mathbb{E}'}\left(1-e^{-f(y,x)}\right)\nu(dy)P[X_1\in dx]\right\}=E[e^{-M(f)}].
\end{aligned}
$$

ただし, $M=PRM(\nu\times P[X_1\in\cdot])$. ラプラス汎関数の収束と点測度の弱収束が同値なので, $M_n\Rightarrow M$.

6-9 : まず $\mathbf{Z}_1$ が (6.43) を満たすとき, ある分布関数 $G(\boldsymbol{x})$ が存在して

$$
\lim_{n\to\infty}P\left[\bigvee_{j=1}^n\frac{\mathbf{Z}_j}{n}\le\boldsymbol{x}\right]=\lim_{n\to\infty}P^n\left[\frac{\mathbf{Z}_1}{n}\le\boldsymbol{x}\right]=G(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\ge\mathbf{0}\qquad(1)
$$

となることを示す. (6.43) より,

$$nP\left(\frac{\mathbf{Z}_1}{n} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c\right) \to \nu_*([\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c),\ n \to \infty$$

が成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned}
\log\left(P^n\left[\frac{\mathbf{Z}_1}{n} \le \boldsymbol{x}\right]\right) &= n\log\left(1-\left(1-P\left[\frac{\mathbf{Z}_1}{n} \le \boldsymbol{x}\right]\right)\right)\\
&= -n\left(P\left[\frac{\mathbf{Z}_1}{n} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c\right] + O\left(P^2\left[\frac{\mathbf{Z}_1}{n} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c\right]\right)\right)\\
&\to -\nu_*([\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c),\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

従って, $G(\boldsymbol{x}) := e^{-\nu_*([\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c)}$ とすると, (1) が成り立つ.
($\Leftarrow$) $d = 2$ の場合を示す. (6.29), (6.30) の漸近独立性が成り立つとすると, $nP(Z_1^{(j)}/n \in \cdot) \xrightarrow{v} \nu$, $j = 1, 2$ かつ

$$\nu_*(dx^{(1)}, dx^{(2)}) = \nu(dx^{(1)})\epsilon_0(dx^{(2)}) + \epsilon_0(dx^{(1)})\nu(dx^{(2)}).$$

このとき, $G(x) = e^{-\nu((x,\infty])}$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\bigvee_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{Z}_j}{n} \le \boldsymbol{x}\right] = G(x^{(1)})G(x^{(2)})$$

となる.
($\Rightarrow$) (1) の $G(\boldsymbol{x})$ が 1 次元の分布関数 G_1, G_2 を用いて $G(\boldsymbol{x}) = G_1(x^{(1)})G_2(x^{(2)})$ と書けるとする. このとき, 同時分布の収束から

$$nP(Z_1^{(j)}/n > x^{(j)}) \to -\log G_j(x^{(j)}),\ n \to \infty,\ j = 1, 2. \qquad (2)$$

また,

$$\begin{aligned}
&-nP\left[\frac{\mathbf{Z}_1}{n} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c\right]\\
&= -nP\left[\bigcup_{j=1,2}\left\{\frac{Z_1^{(j)}}{n} > x^{(j)}\right\}\right]\\
&= -nP(Z_1^{(1)}/n > x^{(1)}) - nP(Z_1^{(2)}/n > x^{(2)}) + nP(Z_1^{(1)}/n > x^{(1)}, Z_1^{(2)}/n > x^{(2)})
\end{aligned}$$

であるから, (2) と合わせて $nP(Z_1^{(1)}/n > x^{(1)}, Z_1^{(2)}/n > x^{(2)}) \to 0$, $n \to \infty$. $\mathbf{Z}_1$ は (6.43) を満たすので, これは

$$nP\left[\frac{\mathbf{Z}_1}{n} \in [\mathbf{0}, \cdot]^c\right] \xrightarrow{v} \nu_*(\cdot)$$

の漠収束先 $\nu_*(\cdot)$ の測度が座標軸上に集中していることを意味する. 従って (2) と合わせて漸近独立性が従う.

6-10：

$U \sim U(0,1), Z = (1/U, 1/(i-U))$. このとき $0 < z_1, z_2 < 1$ に対し

$$\begin{aligned} P(Z \le (z_1, z_2)) &= P(1/U \le z_1, 1/(1-U) \le z_2) \\ &= P(1/z_1 \le U \le 1 - z_2) \\ &= 1 - 1/z_1 - 1/z_2 \end{aligned}$$

となるので

$$P(Z > (z_1, z_2)) = 1/z_1 + 1/z_2$$

より

$$\frac{P(Z_1 > t, Z_2 > t)}{P(Z_1 > t)} = \frac{2/t}{1 - 1/t} \to 0 \ \ (t \to \infty)\ .$$

より漸近独立。

6-11：$Z = (1/\Phi(N_1), 1/\Phi(N_2))$ に変更. 例えば $U_i = \Phi(N_i) \sim U(0,1)$ $(i = 1, 2)$. したがって

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{\Phi(N_1)} > z_1, \frac{1}{\Phi(N_2)} > z_2) &= P(\Phi(N_1) < 1/z_1, \Phi(N_2) < 1/z_2) \\ &= P(N_1 < \Phi^{-1}(1/z_1), N_2 < \Phi^{-1}(1/z_2)) \end{aligned}$$

より $u_i = \Phi^{-1}(1/z_i)$ $(i = 1, 2)$ とすると $u_i \to -\infty$ のとき $P(N_1 < u_1, N_2 < u_2)$ の挙動、つまり $u_i \to -\infty$ のとき $P(-N_1 > -u_1, -N_2 > u_2)$ の挙動、二次元正規分布は漸近独立 (Shibuya (1960)) に帰着する。

6-13：$M_n = \bigvee_{j=1}^n \frac{Z_j}{b_n}$, $m_n = \bigwedge_{j=1}^n \frac{Z_j}{b_n}$ とする. (6.39), (6.40) より, $x \ge 0$ に対して

$$\begin{aligned} \log P(M_n \le x) &= n \log P\left(\frac{Z_1}{b_n} \le x\right) \\ &= -nP(Z_1/b_n > x) + o(1) \to -\nu((x, \infty]) = c_+ x^{-\alpha}, \\ \log P(m_n \ge -x) &= n \log P\left(\frac{Z_1}{b_n} \ge -x\right) \\ &= -nP(Z_1/b_n < -x) + o(1) \to -\nu([-\infty, -x)) = c_- x^{-\alpha}. \end{aligned}$$

であるから, $x \ge 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} P(M_n \le x) = e^{-c_+ x^{-\alpha}}$, $\lim_{n\to\infty} P(m_n \ge -x) = e^{-c_- x^{-\alpha}}$. 従って M_n, m_n の漸近分布はそれぞれ

$x>0$, $x<0$ に集中している. $x_1>0$, $x_2>0$ とすると,

$$\begin{aligned}
\log P(M_n \le x_1, m_n \ge -x_2) &= \log P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{-x_2 \le \frac{Z_j}{b_n} \le x_1\right\}\right)\\
&= n\log\{F(b_n x_1) - F(-b_n x_2)\}\\
&= n\log\left\{\bar{F}(-b_n x_2) - \bar{F}(b_n x_1)\right\}\\
&= n\log\left\{1-(1-\bar{F}_n(-b_n x_2)+\bar{F}(b_n x_1))\right\}\\
&= -nP(Z_1/b_n > x_1) - nP(Z_1/b_n \le -x_2) + o(1)\\
&\to -\nu((x_1,\infty]) - \nu([-\infty,-x_2)).
\end{aligned}$$

従って $\lim_{n\to\infty} P(M_n \le x_1, m_n > -x_2) = e^{-c_+ x_1^{-\alpha} - c_- x_2^{-\alpha}}$. よって

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P\left(M_n \le x_1, m_n \le -x_2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} P(M_n \le x_1) - \lim_{n\to\infty} P(M_n \le x_1, m_n > -x_2)\\
&= e^{-c_+ x_1^{-\alpha}} - e^{-c_+ x_1^{-\alpha} - c_- x_2^{-\alpha}}\\
&= e^{-c_+ x_1^{-\alpha}}(1 - e^{-c_- x_2^{-\alpha}}).
\end{aligned}$$

6-14 : ある $b_n^X, b_n^Y \to \infty$, $n\to\infty$ が存在して

$$nP(\mathbf{X}/b_n^X \in \cdot) \stackrel{v}{\to} \nu_1(\cdot),\ nP(\mathbf{Y}/b_n^Y \in \cdot) \stackrel{v}{\to} \nu_2(\cdot)$$

が成り立つとする. $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ は独立であるから, 補題 7.2 の証明と同様の議論により,

$$nP\left(\left(\frac{\mathbf{X}}{b_n^X}, \frac{\mathbf{Y}}{b_n^Y}\right) \in (dx, dy)\right) \stackrel{v}{\to} v_1(dx)\epsilon_0(dy) + \epsilon_0(dx)\nu_2(dy).$$

6-16 : $M_n = \sum_{j=1}^n \epsilon_{X_{n,j}}$ とする. また $X_1,\dots,X_n$ からいくつかデータを間引いた点過程を $M_{n,k} = \sum_{\ell=1}^{r}\sum_{s=1}^{k-m}\epsilon_{X_{n,(\ell-1)k+s}}$ とする. ここで $2m \le k < n$, $r_n = [n/k]$(n/k の整数部分) とする. $M_{n,k}$ は M_n から

$$\underbrace{X_{n,k-m+1},\dots,X_{n,k-1}}_{I_{n,1}^*}, \underbrace{X_{n,2k-m+1},\dots,X_{2k-1}}_{I_{n,2}^*},$$
$$\dots, \underbrace{X_{n,(r-1)k-m+1},\dots,X_{n,(r-1)k-1}}_{I_{n,r_n}^*}, \underbrace{X_{n,rk-m+1},\dots,X_{n,n}}_{I_{n,r_n+1}^*}$$

($X_{n,(\ell-1)k-m+1},\dots,X_{n,(\ell-1)k-1}$ は “小ブロック”) を除いた点測度. m-従属性より, $\{(X_{n,(\ell-1)k+1},\dots,X_{n,\ell k-m})\}_{\ell=1}^{r}(X_{n,(\ell-1)k+1},\dots,X_{n,\ell k-m}$ は “大ブロック”) は i.i.d. 以下では $I_{n,\ell} = \{(\ell-1)k+1,\dots,\ell k-m\}$ とする.

(Step1) $f \in C_K^+(\mathbb{E})$ としてまず以下を示す.

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left|E\left[e^{-M_n(f)}\right]-\left(E\left[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}}f(X_{n,s})}\right]\right)^{r_n}\right|=0. \quad (3)$$

m-従属性より

$$\left|E\left[e^{-M_n(f)}\right]-\left(E\left[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}}f(X_{n,s})}\right]\right)^{r}\right| \overset{m\text{-従属性}}{=} \left|E\left[e^{-M_n(f)}\right]-E\left[e^{-M_{n,k}(f)}\right]\right|$$
$$\le E\left[\left|e^{-\sum_{\ell=1}^{r_n}\sum_{s\in I_{n,\ell}}f(X_{n,s})}-e^{-\sum_{j=1}^{n}f(X_{n,j})}\right|\right]$$
$$\le E\left[\left|1-e^{-\sum_{\ell=1}^{r_n+1}\sum_{s\in I_{n,\ell}^*}f(X_{n,s})}\right|\right]=E\left[\left|\prod_{\ell=1}^{r_n+1}\prod_{s\in I_{n,\ell}^*}1-\prod_{\ell=1}^{r_n+1}\prod_{s\in I_{n,\ell}^*}e^{-f(X_{n,s})}\right|\right]$$
$$\le \sum_{\ell=1}^{r_n+1}\sum_{s\in I_{n,\ell}^*}E\left[\left|1-e^{-f(X_{n,s})}\right|\right]\le m(r_n+1)E\left[\left|1-e^{-f(X_{n,1})}\right|\right]$$
$$=m(r_n+1)\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})P[X_{n,1}\in dx]. \quad (4)$$

上式の評価において, 最後の不等式は $1\le x_j, y_j\le 1$, $j=1,\dots,n$ に対して

$$\left|\prod_{j=1}^{n}x_i-\prod_{j=1}^{n}y_i\right|\le\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|$$

となることを利用した. ここで, $nP[X_{n,1}\in\cdot]\overset{v}{\to}\nu$, $1-e^{-f}\in C_K^+(\mathbb{E})$ であるから

$$\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})nP[X_{n,1}\in dx]\to\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})\nu(dx).$$

また $n/k<r_n+1\le n/k+1$ であるから,

$$m(r_n+1)\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})P[X_{n,1}\in dx]$$
$$\le\frac{m}{k}\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})nP[X_{n,1}\in dx]+\frac{m}{n}\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})nP[X_{n,1}\in dx]$$
$$\overset{n\to\infty}{\to}\frac{m}{k}\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})\nu(dx)\overset{k\to\infty}{\to}0. \quad (5)$$

ゆえに $\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}m(r_n+1)\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})P[X_{n,1}\in dx]=0.$ この結果と (4) から,

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left|E\left[e^{-M_n(f)}\right]-\left(E\left[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}}f(X_{n,s})}\right]\right)^{r_n}\right|=0.$$

(Step2) $f\in C_K^+(\mathbb{E})$, $N=PRM(\nu)$ として以下を示す.

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left(E\left[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}}f(X_{n,s})}\right]\right)^{r_n}=E[e^{-N(f)}]. \quad (6)$$

$0 \leq y_j \leq 1,\ j = 1, \ldots, n$ に対して

$$1 - \sum_{j=1}^{n} y_j \leq \prod_{j=1}^{n} (1 - y_j) \leq 1 - \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{1 \leq i,j \leq n}^{n} y_i y_j$$

が成り立つので, $y_j = 1 - e^{-f(X_{n,j})}$ として期待値をとると,

$$\begin{aligned} 1-(k-m)E[1-e^{-f(X_{n,1})}] &\leq E[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}} f(X_{n,s})}] \qquad (7)\\ &\leq 1-(k-m)E[1-e^{-f(X_{n,1})}] \\ &\quad + \sum_{1\leq s,t\leq k-m} E[(1-e^{-f(X_{n,s})})(1-e^{-f(X_{n,t})})] \\ &\leq 1-(k-m)E[1-e^{-f(X_{n,1})}] \\ &\quad + (k-m)\sum_{s=2}^{k-m} E[(1-e^{-f(X_{n,1})})(1-e^{-f(X_{n,s})})]. \qquad (8) \end{aligned}$$

問題の仮定と $1 - e^{-f} \in C_K^+(\mathbb{E})$, $k \leq [n/k]$(n は十分大きくとる) より,

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} r_n (k-m) \sum_{s=2}^{k-m} E[(1-e^{-f(X_{n,1})})(1-e^{-f(X_{n,s})})] \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{k-m}{k}\right)\left(1+\frac{k}{n}\right) n \sum_{s=2}^{[n/k]} E[(1-e^{-f(X_{n,1})})(1-e^{-f(X_{n,s})})] \\ &\leq 2\limsup_{n\to\infty} n \sum_{s=2}^{[n/k]} E[(1-e^{-f(X_{n,1})})(1-e^{-f(X_{n,s})})] \to 0,\ k\to\infty. \qquad (9) \end{aligned}$$

(5) より $\lim_{n\to\infty} r_n(k-m)E[1-e^{-f(X_{n,1})}] \to \int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})\nu(dx)$ であるから, 十分大きな n に対して

$$\begin{aligned} \log\left\{(1-(k-m)E[1-e^{-f(X_{n,1})}])^{r_n}\right\} &= r_n \log\left(1 - \frac{r_n(k-m)E[1-e^{-f(X_{n,1})}]}{r_n}\right) \\ &= -r_n\left(\frac{r_n(k-m)E[1-e^{-f(X_{n,1})}]}{r_n}\right) + o(1) \\ &\to -\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})\nu(dx),\ n\to\infty. \end{aligned}$$

この結果を (7) と合わせると

$$E[e^{-N(f)}] = \exp\left(-\int_{\mathbb{E}}(1-e^{-f(x)})\nu(dx)\right) \leq \liminf_{n\to\infty}\left(E[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}} f(X_{n,s})}]\right)^{r_n}.$$

更に (8), (9) と合わせると

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(E[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}} f(X_{n,s})}]\right)^{r_n}\\
&\le E[e^{-N(f)}]+2\limsup_{n\to\infty} n\sum_{s=2}^{[n/k]} E[(1-e^{-f(X_{n,1})})(1-e^{-f(X_{n,s})})]\\
&\to E[e^{-N(f)}],\ k\to\infty.
\end{aligned}$$

故に $\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left(E[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}} f(X_{n,s})}]\right)^{r_n}=E[e^{-N(f)}]$.

(Step3) 問題の結論を示す. (3), (6) より,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left|E[e^{-M_n(f)}]-E[e^{-N(f)}]\right|\\
&\le \limsup_{n\to\infty}\left|E[e^{-M_n(f)}]-\left(E[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}} f(X_{n,s})}]\right)^{r_n}\right|\\
&\quad+\limsup_{n\to\infty}\left|\left(E[e^{-\sum_{s\in I_{n,1}} f(X_{n,s})}]\right)^{r_n}-E[e^{-N(f)}]\right|\to 0,\ k\to\infty.
\end{aligned}$$

ラプラス汎関数の収束と点測度の弱収束が同値なので, $M_n\Rightarrow N$, $n\to\infty$.

第 7 章

7-3 : $\{X_\alpha(t):t>0\}$ を非減少 α-安定過程とする (レヴィ測度は ν_α). $\bar F\in RV_{-\alpha}$ と $b(t)$ の取り方から, $nP[X_1/b(n)\in\cdot]\xrightarrow{v}\nu_\alpha$, $n\to\infty$. 従って

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nE\left[\left(\frac{X_1}{b(n)}\right)^2 1\left\{\frac{X_1}{b(n)}\le\epsilon\right\}\right]&=\lim_{n\to\infty}\int_{x\le\epsilon} x^2 nP[X_1/b(n)\in dx]\\
&=\int_{x\le\epsilon} x^2\nu(dx)=\frac{\epsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}\to 0,\ \epsilon\downarrow 0.
\end{aligned}$$

よって系 7.1 より

$$\frac{1}{b(n)}\sum_{j=1}^{[nt]}X_j-[nt]E\left[\frac{X_1}{b(n)}1\left\{\left|\frac{X_1}{b(n)}\right|\le 1\right\}\right]\Rightarrow X_\alpha(t)\ \text{in}\ D[0,\infty).\quad(10)$$

また任意の $t>0$ に対して $nt-1<[nt]\le nt$ であるから

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in[0,t]}\left|[nt]E\left[\frac{X_1}{b(n)}1\left\{\left|\frac{X_1}{b(n)}\right|\le 1\right\}\right]-t\int_{x\le 1}x\nu_\alpha(dx)\right|\\
&\le\left|\int_{x\le 1}xnP[X_1/b(n)\in dx]-\int_{x\le 1}x\nu_\alpha(dx)\right|\sup_{s\in[0,t]}|s|+\frac{1}{n}\int_{x\le 1}xnP[X_1/b(n)\in dx]\\
&\to 0,\ n\to\infty.
\end{aligned}$$

よって $[n\cdot]E\left[\frac{X_1}{b(n)}1\left\{\left|\frac{X_1}{b(n)}\right|\le 1\right\}\right]$ は $(\cdot)\int_{x\le 1} x\nu_\alpha(dx)$ に局所一様収束．従って

$$[n\cdot]E\left[\frac{X_1}{b(n)}1\left\{\left|\frac{X_1}{b(n)}\right|\le 1\right\}\right]\to(\cdot)\int_{x\le 1} x\nu_\alpha(dx)=\frac{(\cdot)}{1-\alpha}\ \text{in}\ D[0,\infty). \tag{11}$$

故に (10), (11) とスルツキーの補題より，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b(n)}\sum_{j=1}^{[nt]}X_j-\frac{t}{1-\alpha}\\&=\frac{1}{b(n)}\sum_{j=1}^{[nt]}X_j-[nt]E\left[\frac{X_1}{b(n)}1\left\{\left|\frac{X_1}{b(n)}\right|\le 1\right\}\right]\\&\quad+[nt]E\left[\frac{X_1}{b(n)}1\left\{\left|\frac{X_1}{b(n)}\right|\le 1\right\}\right]-t\int_{x\le 1}x\nu_\alpha(dx)\Rightarrow X_\alpha(t)\ \text{in}\ D[0,\infty).\end{aligned}$$

7-6 : $\tau:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$\tau(x_1,x_2)=((\text{sign }x_1)|x_1|^{-1/\alpha_1},(\text{sign }x_2)|x_2|^{-1/\alpha_2})$$

とする．また $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 上のレヴィ測度 ν が $\tilde{\nu}=\nu\circ\tau$ として，任意の $a>0$ に対して $a\tilde{\nu}(\cdot)=\tilde{\nu}(a^{-1}\cdot)$ を満たすとする．このとき，$\tilde{\nu}$ は 6.1.4 の議論より極座標表示を利用して

$$\tilde{\nu}\left(\left\{x:\|x\|>r,\frac{x}{\|x\|}\in\Lambda\right\}\right)=r^{-1}S(\Lambda)$$

と書ける．ただし $S(\cdot)$ は $\aleph_+$ 上の有限測度 (角測度)．$Y_{n,i}=\left(\frac{Y_i^{(1)}}{b_n^{(1)}},\frac{Y_i^{(2)}}{b_n^{(2)}}\right)'$，$b_n(\cdot)=[n\cdot]E[Y_{n,1}1\{\|Y_{n,1}\|<1\}]$ とすると，定理 7.1 の証明と同様の議論により

$$\left(\sum_{i=1}^{[n\cdot]}\frac{Z_i^{(1)}}{b_n^{(1)}},\sum_{i=1}^{[n\cdot]}\frac{Z_i^{(2)}}{b_n^{(2)}}\right)-b_n(\cdot)\Rightarrow X(\cdot)\ \text{in}\ D([0,\infty),\mathbb{R}^2).$$

ここで $X(\cdot)$ はレヴィ過程でそのレヴィ測度 ν は $\tilde{\nu}=\nu\circ\tau$ を満たす．

7-7 : 1. 系 6.1 より，$b_t=\left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t)$ とすると，$n\to\infty$ として

$$\sum_{k=1}^{n}\epsilon_{\left(\frac{k}{n},\frac{Z_k}{b_n}\right)}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\epsilon_{(t_k,j_k)}=PRM(\mathbb{LEB}\times\nu_\alpha)\ \text{in}\ M_p((0,\infty)\times(0,\infty]). \tag{12}$$

ここで, $T_1:(0,\infty)\times(0,\infty]\to(0,\infty)\times(0,\infty]^2$ を $T_1(t,x)=(t,x,x^2)$ とすると, (12) と命題 5.5 より $n\to\infty$ として

$$\begin{aligned}\hat{T}_1\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_{(\frac{k}{n},\frac{Z_k}{b_n})}\right)&=\sum_{k=1}^n \epsilon_{T_1(\frac{k}{n},\frac{Z_k}{b_n})}=\sum_{k=1}^n \epsilon_{\left(\frac{k}{n},\frac{Z_k}{b_n},\frac{Z_k^2}{b_n^2}\right)}\\&\Rightarrow \hat{T}_1\left(\sum_k \epsilon_{(t_k,j_k)}\right)=\sum_k \epsilon_{(t_k,j_k,j_k^2)}\\&=PRM((dx\times d\nu_\alpha)\circ T_1^{-1})\text{ in }M_p((0,\infty)\times(0,\infty]^2).\end{aligned}\tag{13}$$

また $T_2:M_p((0,\infty)\times(0,\infty]^2)\to D([0,\infty),\mathbb{R}^2)$ を

$$T_2\left(\sum_k \epsilon_{(t_k,j_{1,k},j_{2,k})}\right)=\left(\sum_{t_k\le(\cdot)} j_{1,k},\sum_{t_k\le(\cdot)} j_{2,k}\right)$$

と定めると, 7.2.3 と同様の議論により, T_2 はほとんど確実に連続関数. さらに

$$(x_{1,n}(\cdot),x_{2,n}(\cdot))=\left([n\cdot]E\left[\frac{Z_1}{b_n}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right],[n\cdot]E\left[\frac{Z_1^2}{b_n^2}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right]\right)$$

とすると, $(x_{1,n},x_{2,n})\to\left(\frac{(\cdot)}{1-\alpha},\frac{(\cdot)}{2-\alpha}\right)$ in $D([0,\infty),\mathbb{R}^2)$. 従って問題 7-3 の結果と命題 3.1, スルツキーの補題, (13), 連続写像定理より, $n\to\infty$ として

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{[n\cdot]}Z_k-[n\cdot]E\left[\frac{Z_1}{b_n}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right],\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{[n\cdot]}Z_k^2-[n\cdot]E\left[\frac{Z_1^2}{b_n^2}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right]\right)\\&=:(X_{1,n}(\cdot),X_{2,n}(\cdot))\\&=T_2\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_{\left(\frac{k}{n},\frac{Z_k}{b_n},\frac{Z_k^2}{b_n^2}\right)}\right)-(x_{1,n},x_{2,n})\\&\Rightarrow T_2\left(\sum_k \epsilon_{(t_k,j_k,j_k^2)}\right)-\left(\frac{(\cdot)}{1-\alpha},\frac{(\cdot)}{2-\alpha}\right)=X(\cdot)\text{ in }D([0,\infty),\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

ここで $X(\cdot)$ はレヴィ過程でそのレヴィ測度は $\nu_X(A)=\nu_\alpha(\{x\in[0,\infty):(x,x^2)\in A\})$. 特に $A=(a,\infty]\times[b,\infty)$, $a>0,b>0$ のときは $\nu_X(A)=(\max\{a,\sqrt{b}\})^{-\alpha}$.

2. $y_n(\cdot)=\frac{n}{[n\cdot]}\in D(0,\infty)$ とすると $y_n(\cdot)\to\frac{1}{(\cdot)}$ in $D(0,\infty)$ であるから, 1 の結果と命題 3.1, スルツキーの補題より,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{n}{b_n}\bar{Z}_{[n\cdot]}-nE\left[\frac{Z_1}{b_n}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right],\frac{n}{b_n^2[n\cdot]}\sum_{k=1}^{[n\cdot]}Z_k^2-nE\left[\frac{Z_1^2}{b_n^2}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right]\right)\\&=y_n(\cdot)\,(X_{1,n}(\cdot),X_{2,n}(\cdot))\Rightarrow X(\cdot)/(\cdot)\text{ in }(D(0,\infty),\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

この結果より $\frac{n}{b_n^2}(\bar{Z}_{[n\cdot]})^2 \Rightarrow 0 \text{ in } D(0,\infty)$. 即ち, $\frac{n}{b_n^2}(\bar{Z}_{[n\cdot]})^2 \xrightarrow{p} 0 \text{ in } D(0,\infty)$.
よって, 再びスルツキーの補題より,

$$\left(\frac{n}{b_n}\bar{Z}_{[n\cdot]} - nE\left[\frac{Z_1}{b_n}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right], \frac{n}{b_n^2}\mathcal{S}_{[n\cdot]} - nE\left[\frac{Z_1^2}{b_n^2}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right]\right)$$
$$= \left(\frac{n}{b_n}\bar{Z}_{[n\cdot]} - nE\left[\frac{Z_1}{b_n}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right], \frac{n}{b_n^2[n\cdot]}\sum_{k=1}^{[n\cdot]} Z_k^2 - \frac{n}{b_n^2}(\bar{Z}_{[n\cdot]})^2 - nE\left[\frac{Z_1^2}{b_n^2}1_{\{\frac{Z_1}{b_n}\le 1\}}\right]\right)$$
$$\Rightarrow X(\cdot)/(\cdot) \text{ in } D((0,\infty),\mathbb{R}^2).$$

7-8：

$$\begin{aligned}P(Z_1Z_2 > t) &= P(Z_1Z_2 > t, Z_2 \le t/x) + P(Z_1Z_2 > t, Z_2 > t/x, Z_1 \le s)\\ &\quad + P(Z_1Z_2 > t, Z_2 > t/x, Z_1 > s)\\ &= \int_1^{t/s} \bar{F}(\frac{t}{y}F(dy) + \int_1^s \bar{F}(\frac{t}{y})F(dy) + \bar{F}(s)\bar{F}(\frac{t}{s})\end{aligned}$$

より

$$P(Z_1Z_2 > xt) \sim x^{-\alpha}[\int_1^{xt/s} \bar{F}(\frac{t}{y}F(dy) + \int_1^s \bar{F}(\frac{t}{y})F(dy) + \bar{F}(s)\bar{F}(\frac{t}{s})]$$

より $x \to \infty$ のとき $Z_1Z_2 \sim RV_{-\alpha}$ となる。(正確には幾つかの議論が必要。) さらに

$$\begin{aligned}\frac{P(Z_1Z_2 > x)}{P(Z_1 > x)} &= \frac{P(Z_1Z_2 > t, Z_2 > y) + P(Z_1Z_2 > t, Z_2 \le y)}{P(Z_1 > x)}\\ &\sim \int_{z>y} (\frac{1}{z})^{-\alpha}P(Z_2 \in dz) + (\frac{1}{y})^{-\alpha}\\ &\sim \int_{z>y} z^{\alpha}P(Z_2 \in dz) + (const)\end{aligned}$$

より $\mathbf{E}[Z_2^{\alpha}] = \infty$ のとき発散する。正確には積分範囲を M に止めて $M \to \infty$ などの議論が必要。

第 9 章

9-2: 命題 9.3 の仮定の下で

$$\sqrt{k}[H_{k,n} - \frac{1}{\alpha}] \Rightarrow \frac{1}{\alpha}W(1)$$

である。同様に $\sqrt{2k}[H_{2k,n} - \frac{1}{\alpha}] \Rightarrow \frac{1}{\alpha}W(1)$ より $\sqrt{k}[H_{2k,n} - \frac{1}{\alpha}] \Rightarrow \frac{1}{2\alpha}W(2)$ となる。一般には $\sqrt{k}[H_{mk,n} - \frac{1}{\alpha}] \Rightarrow \frac{1}{m\alpha}W(m)$. したがって

$$\sqrt{k}\int_u^v [H_{[kz],n} - \frac{1}{\alpha}]dz \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\int_u^v \frac{1}{z}W(z)dz$$

となる。分散は

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[\int_u^v \frac{1}{z}W(z)dz] &= \mathbf{E}[\int_u^v \int_u^v \frac{1}{yz}W(y)W(z)dydz] \\ &= 2\int_{y.z} \frac{1}{yz} zdzdy \\ &= 2\int_u^v \frac{1}{y}(y-s)dy \\ &= 2[(v-u) - u\log(v/u)\ ]\ \ .\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sqrt{k}[\frac{1}{(r-1)k}\sum_{j=k+1}^{rk}(H_{j,n}-\frac{1}{\alpha})] &\sim (\frac{1}{r-1})\sqrt{k}[\int_1^r (H_{kz,n}-\frac{1}{\alpha})dz] \\ &\sim (\frac{1}{r-1})\frac{1}{\alpha}[\int_1^r \frac{1}{z}W(z)dz]\ .\end{aligned}$$

より漸近分布は

$$N(0, \frac{1}{(r-1)^2\alpha^2}2[(r-1)-\log r])$$

となる。

9-3: $b(t)=t, b(t)^0 = t^{1/2}, b(t)^{00} = t^{1/3}$ とする。$\mathcal{E}$ 上の極限測度は Z_1 軸上に集中、$\mathcal{E}^0$ 上の極限測度は Z_2 軸上、$\mathcal{E}^{00}$ 上の極限測度は Z_3 軸上に表れる。

9-4: $d=2$ のとき (9.51) の正則変動性より $\mathbf{Z} \sim RV(-\alpha)$, (9.54) の正則変動性より $Z_1 \sim RV(-\alpha^0)$ である。それぞれ $P(Z_1>t, Z_2>t) \sim x^{-\alpha}L(t)$ $(t\to\infty)$, $P(Z_1>t)\sim x^{-\alpha_0}\tilde{L}(t)$ $(t\to\infty)$ となるので

$$\frac{2\log P(Z_1>t)}{\log P(Z_1>t, Z_2>t)} - 1 \sim 2(\frac{\alpha^0}{\alpha}) - 1$$

となる。

9-5: $b(n)=[b(t)]$ として $t\to\infty$ を考える。$W_{n,i}=Y_i/b(n), X_{n,i}=Z_i/b(n)$ の分布関数を F, G とすると裾同等 (tail equavalence) とは

$$\frac{1-F(x)}{1-G(x)} \to a\ (>0)$$

を意味する。定理 5.3 より $\sum_{i=1}^n \epsilon_{W_n,i} \Rightarrow PMR(\nu)$ は $nP(W_{n,1}\in A) = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^n \epsilon_{W_n,i}(A)] \Rightarrow \nu(A)$ $(A\in\mathcal{C}\subset\mathcal{E})$ と同等。ししたがって $nP(W_{n,1}\in A) = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^n \epsilon_{W_n,i}(A) \Rightarrow \nu(A)$ は $nP(X_{n,1}\in A) = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^n \epsilon_{W_n,i}(A) \Rightarrow c\nu(A)$ $(c>0)$ と同等となる。

9-13:　本文では途中で設定していると解釈もできるが、Z_1 と Z_2 は独立、$Z_2 \sim RV_{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ を仮定する。
このとき問題 7-8 の解より

$$\begin{aligned}\frac{P(Z_1 Z_2 > x)}{P(z_1 > x)} &= \int_1^{x/s} \frac{\bar{F}\frac{x}{y}}{\bar{F}(x)} F(dy) + \int_1^s \frac{\bar{F}\frac{x}{y}}{\bar{F}(x)} F(dy) + \frac{\bar{F}(s)\bar{F}\frac{x}{s}}{\bar{F}(x)} \\ &\sim \int_1^{x/s} (\frac{1}{y})^{-\alpha} F(dy) + \int_1^s (\frac{1}{y})^{-\alpha} F(dy) + \bar{F}(s)(\frac{1}{s})^{-\alpha}\end{aligned}$$

となる。ここで x が大のとき $P(Z_1 > x \sim x^{-\alpha})$. $s \sim x$ として積分を実行すると $\int_1^{x/s} \alpha y^{-1} dy + \int_1^s \alpha y^{-1} dy + 1 = \alpha \log x + 1$ となる。したがって

$$P(Z_1 Z_2 > x) \sim x^{-\alpha}(1 + \alpha \log x)$$

となる. あとは 343 ページの例と同様.