

また、攪乱項の分散 σ^2 の OLS 推定量 s^2 は以下の OLS 残差に基づいた不偏分散で与えられる^{*6)}。

$$s^2 = \frac{1}{T-2} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{c} - \hat{\phi}y_{t-1})^2 \quad (2.29)$$

以上の議論を AR(p) モデルに拡張するのは容易であろう。ここでは具体的な導出はしないが、AR モデルにおける OLS 推定量の性質を定理としてまとめておこう。

定理 2.4 (OLS 推定量の性質) AR モデルにおける OLS 推定量は以下の性質をもつ。

- 1) OLS 推定量は**一致推定量** (consistent estimator) である。
- 2) OLS 推定量を基準化したものは漸近的に正規分布に従う。
- 3) $\varepsilon_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$ のとき、OLS 推定量は一致推定量の中で漸近的に最小の分散共分散行列をもつ^{*7)}。

性質 (1) は、標本数が大きくなったときに、OLS 推定量が真の値に限りなく近づいていくことを意味しており、例えば、 $\hat{\phi}$ が漸近的に ϕ に収束することを意味している。性質 (2) は仮説検定に用いることができ、5 章で簡単に導出法を述べる。また、性質 (3) は正規性の下での OLS の**漸近有効性** (asymptotic efficiency) を表している。

回帰分析の標準的な仮定の下では、以上の性質に加えて、OLS 推定量は**不偏推定量** (unbiased estimator) であり、すべての線形不偏推定量の中で、最小の分散共分散行列をもつ**最良線形不偏推定量** (BLUE: best linear unbiased estimator) となることが知られている^{*8)}。しかしながら、AR 過程の場合は、説明変数が過去の誤差項と相関をもつため、OLS 推定量は不偏推定量とならないことに注

^{*6)} 下で述べるように、AR モデルにおける OLS 推定量は不偏推定量とはならないので、不偏分散も不偏ではないことに注意されたい。

^{*7)} ここでいう最小とは行列の意味であり、具体的には OLS 推定量の漸近分散共分散行列を Ω とし、任意の一致推定量の漸近分散共分散行列を $\tilde{\Omega}$ とするとき、 $\tilde{\Omega} - \Omega$ が必ず半正定値になることを意味する。

^{*8)} OLS 推定量が BLUE となることは、Gauss-Markov の定理と呼ばれることがある。また、正規性の下では、OLS 推定量はすべての不偏推定量の中で、最小の分散共分散行列をもつ。

意されたい^{*9)}。

以上からわかるように、AR モデルに対しては、OLS 推定量は一部の望ましい性質をもたないが、統計的推測を行うのに十分な性質をもつ。しかも、 ε_t の分布を定めずに、統計的推測を行うことができるという利点もある。したがって、OLS は時系列分析において最もよく用いられる手法の 1 つとなっている。しかしながら、時系列モデルの中には、ARMA モデルや後述する GARCH モデル、マルコフ転換モデルなど、OLS を単純に適用できないモデルも複数存在する。そのようなモデルに対しては、OLS の代わりに次に述べる最尤法が用いられることが多い。

^{*9)} 様々な仮定における OLS 推定量の性質については、例えば、Hamilton (1994) の第 8 章を参照されたい。