

問題解答(第4章)

解答 4.1 $n = 2$ では公式は

$$\begin{aligned}(a)_0(b)_2 + 2(a)_1(b)_1 + (a)_2(b)_0 &= b(b+1) + 2ab + a(a+1) \\ &= (a+b)_2 = (a+b)(a+b+1)\end{aligned}$$

となる. 証明は両辺を展開することにより容易に得られる. $n = 3$ では

$$\begin{aligned}(a)_0(b)_3 + 3(a)_1(b)_2 + 3(a)_2(b)_1 + (a)_3(b)_0 \\ &= b(b+1)(b+2) + 3ab(b+1) + 3a(a+1)b + a(a+1)(a+2) \\ &= (a+b)_3 = (a+b)(a+b+1)(a+b+2)\end{aligned}$$

となり, これも両辺の展開により証明される.

解答 4.2 X を $0, 1, \dots, n$ のそれぞれを等確率 $1/(n+1)$ で取る離散一様分布に従う確率変数とすると,

$$E[X] = \frac{1}{n+1}(0+1+\dots+n) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}$$

となり,

$$E[X^2] = \frac{1}{n+1}(0+1^2+\dots+n^2) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{6}$$

であるので,

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{n(2n+1)}{6} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{2n(2n+1) - 3n^2}{12} = \frac{n(n+2)}{12}$$

となる.

解答 4.3 関係式 (4.7) より

$$\frac{\Pr(X=x+1)}{\Pr(X=x)} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{a+x}{b+n-x-1} \geq 1$$

とすると

$$\begin{aligned}(n-x)(a+x) &\geq (x+1)(b+n-x-1) \\ na + nx - ax - x^2 &\geq bx + nx - x^2 - x + b + n - x - 1 \\ na - b - n + 1 &\geq bx - 2x + ax \\ n(a-1) - (b-1) &\geq (a+b-2)x\end{aligned}$$

より $x \leq \frac{n(a-1)-(b-1)}{a+b-2}$ を得る. 逆向きの不等号も成り立ち (4.10) が示される.

解答 4.4 $\bar{x}=6$ および $s^2 = 3.75$ から (4.11) により $\tilde{a}=9$, $\tilde{b}=6$ と再現される (実際の計算で確かめられたい).

解答 4.5 $M = 18$ であり, 反復法により下のような推移をたどり $\tilde{a}=3.44138$, $\tilde{b}=8.18825$ に収束する. $a/(a+b)$ の値が大きいため例 4.5 の数値例よりも収束のスピードが速い.

ITE	N	mean	var	a	b	c
1	18.00000	3.22222	3.00654	7.37723	15.51762	0.74347
2	18.74347	3.09441	3.29835	4.81431	10.74378	1.11324
3	19.11324	3.03454	3.42271	4.10651	9.42604	1.31623
4	19.31623	3.00266	3.48576	3.80020	8.85592	1.43242
5	19.43242	2.98470	3.52028	3.64468	8.56651	1.50036
30	19.60025	2.95915	3.56821	3.44138	8.18825	1.60026
31	19.60026	2.95915	3.56821	3.44138	8.18825	1.60026

解答 4.6 解答 4.5 の結果より $\tilde{a}=3.44138$, $\tilde{b}=8.18825$ であり, $\tilde{c}=1.60026$ である. よって

$$\tilde{\omega} = 1 - \frac{M + \tilde{c}}{N} = 1 - \frac{18 + 1.60026}{26} = 1 - \frac{19.60026}{26} = 0.24614$$

となる.