E

振動・波動補足ノート

E. 1　１次元連成振動における正弦関数間の直交関係

式 (3.59) から式 (3.61) を得る正確な導出は以下の通りである．$\ell = 1, 2, ..., N$ として，式 (3.59) の両辺に $\sin(q_\ell R_j)$ をかけて，j について和をとると

$$\sum_n \frac{d^2 A_n}{dt^2} \sum_{j=1}^{N} \sin(q_n R_j) \sin(q_\ell R_j) = -\sum_n \omega_n^2 A_n \sum_{j=1}^{N} \sin(q_n R_j) \sin(q_\ell R_j)$$

ここで直交関係

$$\sum_{j=1}^{N} \sin(q_n R_j) \sin(q_\ell R_j) = \frac{N+1}{2} \delta_{n,\ell} \tag{E.1}$$

を適用すると，式 (3.61) において n を ℓ に置き換えた式が得られる．

式 (E.1) は次のようにして示せる．まず，

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} \sin(q_n R_j) \sin(q_\ell R_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} \left[\cos\left((q_n - q_\ell) R_j\right) - \cos\left((q_n + q_\ell) R_j\right)\right] \end{aligned} \tag{E.2}$$

右辺において，j についての和が $j = 0$ からになっている点に注意されたい．ここで

$$z = \exp\left(i (q_n - q_\ell) R_j\right) = \exp\left(\frac{\pi i}{N+1} (n - \ell)\right)$$

とおくと，

$$\sum_{j=0}^{N} \cos\left(\left(q_n - q_\ell\right) R_j\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} \left[z^j + \left(z^*\right)^j\right] \tag{E.3}$$

$n \neq \ell$ の場合，j についての和を実行すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N} \left[z^j + \left(z^*\right)^j\right] \\
&= \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} + \frac{1 - \left(z^*\right)^{N+1}}{1 - z^*} = \left[1 - (-1)^{n-\ell}\right] \left(\frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - z^*}\right) \\
&= \left[1 - (-1)^{n-\ell}\right] \left(\frac{1}{1 - z} + \frac{z}{z - 1}\right) = 1 - (-1)^{n-\ell}
\end{aligned}$$

ただし，2 番目の等号では $z^{N+1} = \exp\left(\pi i \left(n - \ell\right)\right) = (-1)^{n-\ell}$ を用いた．よって，式 (E.3) より

$$\sum_{j=0}^{N} \cos\left(\left(q_n - q_\ell\right) R_j\right) = \frac{1 - (-1)^{n-\ell}}{2} \tag{E.4}$$

同様に，

$$\sum_{j=0}^{N} \cos\left(\left(q_n + q_\ell\right) R_j\right) = \frac{1 - (-1)^{n+\ell}}{2} = \frac{1 - (-1)^{n-\ell}}{2} \tag{E.5}$$

が示せる．2 番目の等号では，$(-1)^{n+\ell} = (-1)^{n-\ell}(-1)^{2\ell} = (-1)^{n-\ell}$ を用いた．よって，式 (E.2)，式 (E.4)，式 (E.5) より $n \neq \ell$ のとき

$$\sum_{j=1}^{N} \sin\left(q_n R_j\right) \sin\left(q_\ell R_j\right) = 0 \tag{E.6}$$

一方，$n = \ell$ のとき

$$\sum_{j=1}^{N} \sin\left(q_n R_j\right) \sin\left(q_\ell R_j\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} \left[1 - \cos\left(2 q_n R_j\right)\right] \tag{E.7}$$

となるが，上記と同様の計算により

$$\sum_{j=0}^{N} \cos\left(2 q_n R_j\right) = 1 - (-1)^{2n} = 0 \tag{E.8}$$

ゆえに，

$$\sum_{j=1}^{N} \sin\left(q_n R_j\right) \sin\left(q_\ell R_j\right) = \frac{N + 1}{2} \tag{E.9}$$

したがって，直交関係 (E.1) が成り立つ．

E. 2　1 次元的に連結した N 個の調和振動子

図 3.3 のように，ばね定数 k のばねでつながれた N 個の質量 m の質点を考える．両端のばねの端は壁に固定されているとする．$\omega = \sqrt{k/m}$ として，質点の運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = -\omega^2 K_N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

とかける．ここで行列 K_N は $N \times N$ 行列で次式で与えられる．

$$K_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

この行列は実対称行列である．まず，行列 K_N の固有値を求める．

$$\begin{aligned} \det(K_N - \lambda) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2-\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\det(K_{N-1}-\lambda) - \det(K_{N-2}-\lambda) \end{aligned}$$

よって，$a_N = \det(K_N - \lambda)$ とおくと

$$a_N = (2-\lambda)\, a_{N-1} - a_{N-2} \tag{E.10}$$

ところで，$a_2 = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ であるが，これは式 (E.10) と

$a_0 = 1, a_1 = 2 - \lambda$ より導ける．また，$a_3 = (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda)$ だが，これも式 (E.10) と a_2, a_1 を用いて導ける．

式 (E.10) の漸化式は，$\alpha + \beta = 2 - \lambda$, $\alpha\beta = 1$ として，$a_N - \alpha a_{N-1} = \beta(a_{N-1} - \alpha a_{N-2})$ と変形することで解ける．ここで $\alpha + \beta = 2 - \lambda$, $\alpha\beta = 1$ より，α, β は 2 次方程式 $\xi^2 - (2-\lambda)\xi + 1 = 0$ の解だから

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[2 - \lambda - \sqrt{(2-\lambda)^2 - 4}\right]$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left[2 - \lambda + \sqrt{(2-\lambda)^2 - 4}\right]$$

一方，$a_N - \alpha a_{N-1} = \beta(a_{N-1} - \alpha a_{N-2})$ および $a_N - \beta a_{N-1} = \alpha(a_{N-1} - \beta a_{N-2})$ から

$$a_N - \alpha a_{N-1} = \beta^{N-1}(a_1 - \alpha a_0) = \beta^{N-1}(2 - \lambda - \alpha)$$

$$a_N - \beta a_{N-1} = \alpha^{N-1}(a_1 - \beta a_0) = \alpha^{N-1}(2 - \lambda - \beta)$$

第 1 式の両辺に β をかけた式から，第 2 式の両辺に α をかけた式をひくと

$$(\beta - \alpha)a_N = \beta^N(2 - \lambda - \alpha) - \alpha^N(2 - \lambda - \beta)$$

ところで

$$\alpha = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - i\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2} = \exp(-i\phi)$$

とかける．ただし

$$\cos\phi = 1 - \frac{\lambda}{2}, \qquad \sin\phi = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2}$$

である．$\sin\phi \geq 0$ だから $0 \leq \phi \leq \pi$ である．同様にして $\beta = e^{i\phi}$ である．したがって

$$
\begin{aligned}
a_N &= \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\beta^N\left(2-\lambda-\alpha\right)-\alpha^N\left(2-\lambda-\beta\right)\right] \\
&= \frac{1}{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}\left[e^{iN\phi}\left(2-\lambda-e^{-i\phi}\right)-e^{-iN\phi}\left(2-\lambda-e^{i\phi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}\left[e^{iN\phi}\left(2\cos\phi-e^{-i\phi}\right)-e^{-iN\phi}\left(2\cos\phi-e^{i\phi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sin\phi}\left[2\sin\left(N\phi\right)\cos\phi-\sin\left(N-1\right)\phi\right] \\
&= \frac{1}{\sin\phi}\left[2\sin\left(N\phi\right)\cos\phi-\sin N\phi\cos\phi+\cos N\phi\sin\phi\right] \\
&= \frac{1}{\sin\phi}\left[\sin\left(N\phi\right)\cos\phi+\cos N\phi\sin\phi\right] \\
&= \frac{\sin\left(N+1\right)\phi}{\sin\phi}
\end{aligned}
$$

すなわち

$$a_N = \det\left(K_N-\lambda\right) = \frac{\sin\left(N+1\right)\phi}{\sin\phi}$$

よって，固有値方程式 $a_N = 0$ より

$$\sin\left(N+1\right)\phi = 0$$

ϕ は $0 \leq \phi \leq \pi$ をみたすから

$$\phi = \frac{\pi}{N+1}n \equiv \phi_n$$

ここで $n = 1, 2, ..., N$ である．$\cos\phi = 1-\frac{\lambda}{2}$ より $\lambda = 2\left(1-\cos\phi\right)$ だから，固有値は

$$\lambda_n = 2\left(1-\cos\phi_n\right) = 4\sin^2\frac{\phi_n}{2} = 4\sin^2\frac{\pi}{2\left(N+1\right)}n$$

ゆえに基準振動の振動数は

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n}\omega = 2\omega\sin\frac{\pi n}{2\left(N+1\right)}$$

固有値 $\lambda = \lambda_n$ の固有ベクトルは，基準座標 $Q_n\left(t\right)$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} Q_n\left(t\right)$$

とかくと

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2-\lambda_n & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2-\lambda_n & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2-\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = 0$$

より，

$$(2-\lambda_n)\,c_1 - c_2 = 0$$

$$-c_{j-2} + (2-\lambda_n)\,c_{j-1} - c_j = 0 \qquad (j = 2, 3, ..., N)$$

$$c_{N-1} - (2-\lambda_n)\,c_N = 0$$

2 番目の式より得られる式

$$c_j = (2-\lambda_n)\,c_{j-1} - c_{j-2}$$

を式 (E.10) と比較すると a_N と同じ漸化式になっていることがわかる．よって $c_0 = 0$，$c_1 = C$ とおくと $c_2 = C\,(2-\lambda_n)$ となり，漸化式を解いて

$$c_j = C\frac{\sin(j\phi_n)}{\sin\phi_n}$$

となる．逆に，この結果を用いて $c_j = (2-\lambda_n)\,c_{j-1} - c_{j-2}$ が成り立つことを確かめられる．

規格化定数 C は $C' = \frac{C}{\sin\phi_n}$ とおいて

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} c_j^2 &= C'^2 \sum_{j=1}^{N} \sin^2(j\phi_n) \\
&= C'^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\left(1-\cos 2j\phi_n\right) \\
&= C'^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{2ij\phi_n} + e^{-2ij\phi_n}}{2}\right) \\
&= C'^2 \frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\phi_n} - e^{2i(N+1)\phi_n}}{1-e^{2i\phi_n}} + \frac{e^{-2i\phi_n} - e^{-2i(N+1)\phi_n}}{1-e^{-2i\phi_n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

ここで

$$\phi_n = \frac{\pi}{N+1}n$$

より $e^{2i(N+1)\phi_n} = 1$ だから

$$\begin{aligned}
&C'^2 \frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\phi_n} - e^{2i(N+1)\phi_n}}{1 - e^{2i\phi_n}} + \frac{e^{-2i\phi_n} - e^{-2i(N+1)\phi_n}}{1 - e^{-2i\phi_n}}\right)\right) \\
&= C'^2 \frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\phi_n} - 1}{1 - e^{2i\phi_n}} + \frac{e^{-2i\phi_n} - 1}{1 - e^{-2i\phi_n}}\right)\right) \\
&= C'^2 \frac{1}{2}(N+1)
\end{aligned}$$

したがって $C' = \sqrt{\frac{2}{N+1}}$．ゆえに

$$c_j = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin(j\phi_n)$$

n 番目の基準振動の成分なので $c_j \to c_j^{(n)}$ とかいて

$$c_j^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{\pi j n}{N+1}\right)$$

直交変換を U とすると

$$\mathbf{c}^{(n)} = \begin{pmatrix} c_1^{(n)} \\ c_2^{(n)} \\ \vdots \\ c_N^{(n)} \end{pmatrix}$$

とおいて

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{(1)} & \mathbf{c}^{(2)} & \cdots & \mathbf{c}^{(N-1)} & \mathbf{c}^{(N)} \end{pmatrix}$$

と書ける．この U を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

と変数変換すると運動方程式から次の基準振動の方程式が得られる．

$$\frac{d^2}{dt^2}Q_n = -\omega_n^2 Q_n$$

E.3 1次元連成振動における指数関数間の直交関係

3.4 節で周期的境界条件を考えた．この場合，正弦関数は指数関数に置き換わる．直交関係 (E.1) に対応する直交関係は

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\exp\left(iq_nR_j\right)\right]^*\exp\left(iq_\ell R_j\right)=N\delta_{n,\ell} \tag{E.11}$$

となる．$j=\ell$ の場合に成り立つことは容易にわかる．$j\neq\ell$ の場合も次式より示せる．

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\exp\left(iq_nR_j\right)\right]^*\exp\left(iq_\ell R_j\right)=e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-n)}\frac{1-e^{2\pi i(\ell-n)}}{1-e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-n)}}=0 \tag{E.12}$$

このように，周期的境界条件のもとでは直交関係が容易になる．

E.4 固有関数の完全性

式 (4.43) の条件を証明しよう．式 (4.43) の左辺は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)f_n\left(x'\right)\\
&=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(k_nx\right)\sin\left(k_nx'\right)\\
&=\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(k_n\left(x-x'\right)\right)-\cos\left(k_n\left(x+x'\right)\right)\right]\\
&=\frac{1}{2L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(ik_n\left(x-x'\right)\right)+\exp\left(-ik_n\left(x-x'\right)\right)\right.\\
&\qquad\left.-\exp\left(ik_n\left(x+x'\right)\right)-\exp\left(-ik_n\left(x+x'\right)\right)\right]\\
&=\frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(ik_n\left(x-x'\right)\right)-\exp\left(ik_n\left(x+x'\right)\right)\right]\\
&=\frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(\frac{i\pi}{L}\left(x-x'\right)n\right)-\exp\left(\frac{i\pi}{L}\left(x+x'\right)n\right)\right]
\end{aligned} \tag{E.13}$$

最後の行の和で表された関数に，α を変数として成り立つ次の式を適用する．

$$\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i\alpha}{L}n\right)=2\pi\delta\left(\alpha\right) \tag{E.14}$$

この式は次のようにして証明できる．まず，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i\alpha}{L}n\right) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=-N}^{N}\exp\left(\frac{i\alpha}{L}n\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{L}\frac{\exp\left(\frac{i\alpha}{L}\left(N+1\right)\right)-\exp\left(-\frac{i\alpha}{L}N\right)}{\exp\left(\frac{i\alpha}{L}\right)-1}\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{L}\frac{\exp\left(\frac{i\alpha}{L}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)-\exp\left(-\frac{i\alpha}{L}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\exp\left(\frac{i\alpha}{2L}\right)-\exp\left(-\frac{i\alpha}{2L}\right)}\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{L}\frac{\exp\left(\frac{i\alpha}{L}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)-\exp\left(-\frac{i\alpha}{L}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{2i\sin\left(\frac{\alpha}{2L}\right)}
\end{aligned}$$

分子に

$$\exp\left(\frac{i\alpha}{L}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)-\exp\left(-\frac{i\alpha}{L}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{i\alpha}{L}\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{N+\frac{1}{2}}dx\exp\left(\frac{i\alpha}{L}x\right)$$

を適用すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i\alpha}{L}n\right) &= \lim_{N\to\infty}\frac{\alpha}{2L^2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2L}\right)}\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{N+\frac{1}{2}}dx\exp\left(\frac{i\alpha}{L}x\right)\\
&= \frac{\alpha}{2L^2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2L}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp\left(\frac{i\alpha}{L}x\right)\\
&= \frac{\pi\alpha}{L^2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2L}\right)}\delta\left(\frac{\alpha}{L}\right)=\frac{2\pi}{L}\delta\left(\frac{\alpha}{L}\right)\\
&= 2\pi\delta\left(\alpha\right)
\end{aligned}$$

よって，式 (E.14) が示せた．

式 (E.14) において，$\alpha=\pi\left(x-x'\right)$ とおくと

$$\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i\pi}{L}\left(x-x'\right)n\right)=2\delta\left(x-x'\right) \tag{E.15}$$

この式を式 (E.13) に適用すると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)f_n\left(x'\right) &= \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(\frac{i\pi}{L}\left(x-x'\right)n\right)-\exp\left(\frac{i\pi}{L}\left(x+x'\right)n\right)\right]\\
&= \delta\left(x-x'\right)-\delta\left(x+x'\right)
\end{aligned}$$

$x + x' = 0$ の場合は考える必要がないから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right) f_n\left(x'\right) = \delta\left(x - x'\right) \tag{E.16}$$

となる．

E. 5 単スリットを通った光

6.4 節でヤングの干渉実験について述べたが，単スリットを通った光を仮定した．単スリットを通った光がどのように記述されるかを補足しておく．

単スリットを通り抜けた光を考える．スリットが z 軸方向に空いているとすると，単スリットを通り抜けた光（$\mathbf{E}$ や $\mathbf{B}$）の振幅は，z に依存しないから次のように書ける．

$$u\left(\mathbf{r}, t\right) = u\left(x, y, t\right) = f\left(x, y\right) e^{-i\omega t}$$

波動方程式 $\partial_t^2 u = c^2 \nabla^2 u$ に代入すると，$k = \omega / c$ として

$$-k^2 f = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) f = \partial_\rho^2 f + \frac{1}{\rho} \partial_\rho f + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 f \tag{E.17}$$

ここで 2 次元の極座標，$x = \rho \cos\phi, y = \rho \sin\phi$ を導入して 2 次元のラプラシアンを書き換えた．単スリットを通った波は，ϕ に依存しないので右辺の最後の項は落とすことができ，

$$\partial_\rho^2 f + \frac{1}{\rho} \partial_\rho f + k^2 f = 0 \tag{E.18}$$

この微分方程式の解はベッセル関数 $J_0\left(x\right)$ で表せて

$$f = A J_0\left(k\rho\right) \tag{E.19}$$

$\rho \to \infty$ での振るまいを知るために，$f = \frac{g}{\sqrt{\rho}}$ とおいて f の微分方程式に代入する．

$$\begin{aligned} f &= \frac{g}{\sqrt{\rho}} = \rho^{-1/2} g \\ \partial_\rho f &= \rho^{-1/2} \partial_\rho g - \frac{1}{2} \rho^{-3/2} g \\ \partial_\rho^2 f &= \rho^{-1/2} \partial_\rho^2 g - \rho^{-3/2} \partial_\rho g + \frac{3}{4} \rho^{-5/2} g \end{aligned}$$

より

$$\rho^{-1/2}\partial_\rho^2 g-\rho^{-3/2}\partial_\rho g+\frac{3}{4}\rho^{-5/2}g+\rho^{-3/2}\partial_\rho g-\frac{1}{2}\rho^{-5/2}g+k^2\rho^{-1/2}g=0$$

整理して

$$\partial_\rho^2 g=-\left(k^2+\frac{1}{4\rho^2}\right)g \tag{E.20}$$

したがって $k\rho\gg 1$ のとき

$$g\simeq Ae^{ik\rho} \tag{E.21}$$

と書ける．よって単スリットを通った光は，$\rho\gg k^{-1}$ において次式で表される．

$$u(\mathbf{r},t)=Ae^{ik(\rho-ct)} \tag{E.22}$$

E. 6　固有値に縮退がある場合の実対称行列の対角化

実対称行列 A が対角化可能であることを，固有値に縮退がある場合も含めて示す．まず，行列 A のひとつの固有値を λ_1，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1$ とする．$\boldsymbol{v}_1$ に直交する規格化された $n-1$ 個のベクトルを $\boldsymbol{v}'_2,...,\boldsymbol{v}'_n$ とおくと，$k=2,3,...,n$ として

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}'_k=0 \tag{E.23}$$

である．なお，$\boldsymbol{v}'_k$ は行列 A の固有ベクトルとはかぎらないことに注意しよう．

これらのベクトルから，行列 U' を次式で定義する．

$$U'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}'_2 & \cdots & \boldsymbol{v}'_n\end{pmatrix} \tag{E.24}$$

この行列 U' を用いて，行列 A を変換する．

$$U'^TAU'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1^T\\ \boldsymbol{v}'^T_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}'^T_n\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}'_2 & \cdots & \boldsymbol{v}'_n\end{pmatrix} \tag{E.25}$$

行列のかけ算を計算する際，

$$\boldsymbol{v}_1^T A \boldsymbol{v}_k' = (A\boldsymbol{v}_1)^T \boldsymbol{v}_k' = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_k' \tag{E.26}$$

を用いると

$$U'^T A U' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1 & \lambda_1 \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \lambda_1 \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_n' \\ \lambda_1 \boldsymbol{v}_2'^T \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2'^T A \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \boldsymbol{v}_2'^T A \boldsymbol{v}_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 \boldsymbol{v}_n'^T \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_n'^T A \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \boldsymbol{v}_n'^T A \boldsymbol{v}_n' \end{pmatrix} \tag{E.27}$$

式 (E.23) を適用して

$$U'^T A U' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{v}_2'^T A \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \boldsymbol{v}_2'^T A \boldsymbol{v}_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \boldsymbol{v}_n'^T A \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \boldsymbol{v}_n'^T A \boldsymbol{v}_n' \end{pmatrix} \tag{E.28}$$

右辺の行列の 1 行目と 1 列目を除いた行列を A' とすると，

$$A' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_2'^T A \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \boldsymbol{v}_2'^T A \boldsymbol{v}_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{v}_n'^T A \boldsymbol{v}_2' & \cdots & \boldsymbol{v}_n'^T A \boldsymbol{v}_n' \end{pmatrix} \tag{E.29}$$

式 (E.28) の左辺について，$\left(U'^T A U'\right)^T = U'^T A U'$ だから，行列 A' も実対称行列であることがわかる．

行列 A' のひとつの固有値を λ_2，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とする．$\boldsymbol{v}_2$ に直交する規格化された $n-2$ 個のベクトルを $\boldsymbol{v}_3'', ..., \boldsymbol{v}_n''$ とおく．行列 U'' を $U'' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3' & \cdots & \boldsymbol{v}_n' \end{pmatrix}$ で定義して，同様の手続きを繰り返すことで，行列 A が対角化されることがわかる．[*1)]

E.7 ギブス振動

A. 10 節のフーリエ級数展開の式 (A.47) より

---

*1) なお，ここでは実対称行列 A が対角化されることを示すことが目的である．実際の対角化において，行列 U'，U''，... を順次導入して行列 A を変換していくということはしない．

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right] \tag{E.30}$$

係数は次式で求められる．

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L dt f(t) \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dt \cos\left(\frac{2\pi n}{L} t\right) f(t) \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dt \sin\left(\frac{2\pi n}{L} t\right) f(t) \end{aligned}$$

これらを式 (E.30) に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{L} \int_0^L dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L dt \cos\left(\frac{2\pi n}{L} t\right) f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{L} \int_0^L dt \sin\left(\frac{2\pi n}{L} t\right) f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L dt f(t) \\ &\quad \times \underbrace{\left[\cos\left(\frac{2\pi n}{L} t\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{L} t\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right]}_{\cos\left(\frac{2\pi n}{L}(t-x)\right)} \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L dt f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(t-x)\right) \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L dt f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(t-x)\right) \right] \end{aligned}$$

ここで

$$f_N(x) = \frac{2}{L} \int_0^L dt f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(t-x)\right) \right]$$

を定義する．$[\cdots]$ 内にある式の和が有限の N までになっていることに注意しよう．$[\cdots]$ 内を以下のように変形する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}(t-x)\right)\\
&=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\exp\left(\frac{2\pi i}{L}n(t-x)\right)\right]\underbrace{=}_{\alpha=\frac{2\pi}{L}(t-x)}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\exp(i\alpha n)\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}+\frac{e^{i\alpha(N+1)}-e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1}\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{e^{i\alpha(N+1)}-e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1}+\underbrace{\frac{e^{-i\alpha(N+1)}-e^{-i\alpha}}{e^{-i\alpha}-1}}_{\mathrm{Re}\,a=\mathrm{Re}\,a^*}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{e^{i\alpha(N+1)}-e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1}-\frac{e^{-i\alpha N}-1}{e^{i\alpha}-1}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\alpha}-1+e^{i\alpha(N+1)}-e^{i\alpha}-e^{-i\alpha N}+1}{e^{i\alpha}-1}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\alpha(N+1)}-e^{-i\alpha N}}{e^{i\alpha}-1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\alpha(N+1/2)}-e^{-i\alpha(N+1/2)}}{e^{i\alpha/2}-e^{-i\alpha/2}}\right]\\
&=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)}
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}(t-x)\right)=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)}$$

したがって

$$f_N(x)=\frac{1}{L}\int_0^L dt f(t)\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)}$$

周期関数なので，積分範囲を $L/2$ だけずらしてもよいから

$$f_N(x)=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dt f(t)\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)} \tag{E.31}$$

この結果をもとにして，関数が不連続である点の近傍でのフーリエ級数の振舞いを調べよう．

$x=0$ で不連続になる次の関数を考える．

$$f(x)=\begin{cases} A & (0<x<L/2)\\ -A & (-L/2<x<0)\end{cases}$$

(E.31) より

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dt f(t)\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)} \\ &= \frac{A}{L}\int_0^{L/2} dt\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)} - \frac{A}{L}\int_{-L/2}^{0} dt\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)} \\ &= \frac{A}{L}\int_0^{L/2} dt\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)} - \frac{A}{L}\int_0^{L/2} dt\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t+x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t+x)} \end{aligned}$$

積分変数を右辺第 1 項では $s=t-x$，第 2 項では $s=t+x$ と変換して

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{A}{L}\int_{-x}^{L/2-x} ds\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}s}{\sin\frac{\pi}{L}s} - \frac{A}{L}\int_{x}^{L/2+x} ds\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}s}{\sin\frac{\pi}{L}s} \\ &= \frac{A}{L}\int_{-x}^{x} ds\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}s}{\sin\frac{\pi}{L}s} - \frac{A}{L}\int_{L/2-x}^{L/2+x} ds\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}s}{\sin\frac{\pi}{L}s} \end{aligned}$$

(1 行目から 2 行目の変形では，第 1 項と第 2 項とで相殺する分を考慮した.)

さて，$x=0$ 近傍の振る舞いは右辺第 1 項で決まる．そこでこの項を

$$f_N^{(1)}(x) = \frac{A}{L}\int_{-x}^{x} ds\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}s}{\sin\frac{\pi}{L}s}$$

とおく．$(2N+1)\frac{\pi}{L}=p$ とおいて積分変数を s から $ps=\xi$ に変換すると

$$\begin{aligned} f_N^{(1)}(x) &= \frac{2A}{L}\int_0^{x} ds\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}s}{\sin\frac{\pi}{L}s} = \frac{2A}{L}\int_0^{x} ds\frac{\sin(ps)}{\sin\left(\frac{ps}{2N+1}\right)} \\ &= \frac{2A}{L}\frac{1}{p}\int_0^{px} d\xi\frac{\sin\xi}{\sin\left(\frac{\xi}{2N+1}\right)} \end{aligned}$$

ここで，$0<\xi<px=(2N+1)\frac{\pi}{L}x$ のとき，$0<\frac{\xi}{2N+1}<\frac{\pi}{L}x$ であることに着目すると，$x=0$ 近傍では $\sin\left(\frac{\xi}{2N+1}\right)>0$ である．一方，$\sin\xi$ は $\xi=\pi$ で符号を変える．このことから，$x=0$ 近傍で右辺が最大値（この最大値を M_N とおく）をとるのは，$px=\pi$ のときであることがわかる．ゆえに，M_N は

$$M_N = \frac{2A}{L}\frac{1}{p}\int_0^{\pi} d\xi\frac{\sin\xi}{\sin\left(\frac{\xi}{2N+1}\right)} = \frac{2A}{\pi}\int_0^{\pi} d\xi\frac{\sin\xi}{(2N+1)\sin\left(\frac{\xi}{2N+1}\right)}$$

$N\to\infty$ の極限をとると

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} M_N &= \frac{2A}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi} d\xi\frac{\sin\xi}{(2N+1)\sin\left(\frac{\xi}{2N+1}\right)} \\ &= A\times\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\xi\frac{\sin\xi}{\xi} \\ &= 1.1789797...\times A \end{aligned}$$

(2 行目の積分は数値計算で行った.)

この結果から，フーリエ表示の $f(x)$ は $px = \pi$ すなわち

$$x = \frac{\pi}{p} = \frac{L}{2N+1} \tag{E.32}$$

のところで最大値をとり，値は約 18 パーセント増しの値をとることがわかる. N をどれだけ大きくとっても，これだけのずれが生じてしまうということになる.

具体的に次の関数を考えよう.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ -1 & (-1 \leq x < 0) \end{cases}$$

この関数のフーリエ級数を求めると

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)\pi x)$$

右辺の和を $n = N$ までの有限項に置き換えた近似式を $f_N(x)$ とおくと

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)\pi x)$$

$N = 3, 20, 50$ の場合を図示すると図 E.1 のようになる. $x = 0$ 近傍を図示した

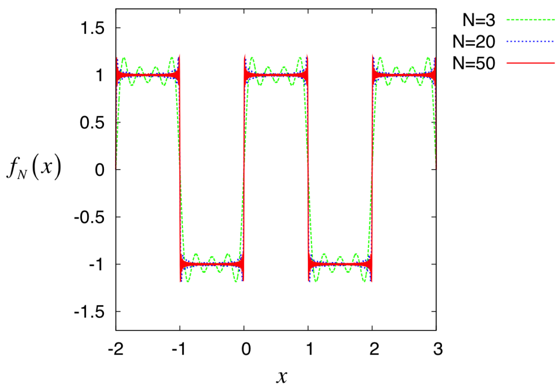

図 E.1 $N = 3$(緑),$N = 20$(青),$N = 50$(赤) の場合の関数 $f_N(x)$.

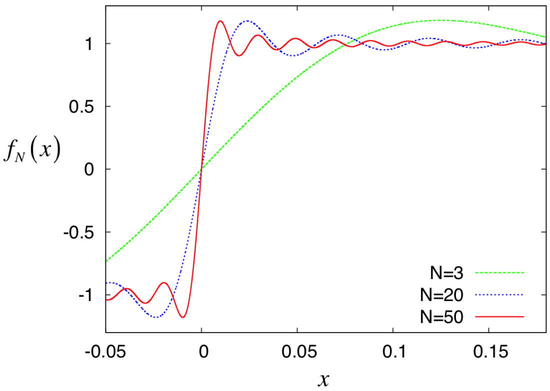

図 E.2 $x = 0$ 近傍における $N = 3$(緑),$N = 20$(青),$N = 50$(赤) の場合の関数 $f_N(x)$.

のが図 E.2 である．

さて，式 (E.32) の式に $L = 2$ を代入し，N を $2N+1$ でおきかえると，$x = \frac{2}{4N+3} \equiv x_N$ のところで約 18 パーセント増しの値をとることになる．$N = 3, 20, 50$ のとき，具体的に値を求めると $x_3 = \frac{2}{15} = 0.13333....$, $x_{20} = \frac{2}{83} = 0.019417...$, $x_{50} = \frac{2}{203} = 0.0098522....$ これらの値が妥当なものであることが図 E.2 の $x = 0$ 近傍のピーク位置からわかるであろう．

一般に，関数 $f(x)$ が $x = a$ で不連続のとき，フーリエ級数の $x = a$ での値は，

$$\frac{1}{2}\left[f(a+0) + f(a-0)\right]$$

となる．このことは次のように理解できる．式 (E.31) より，

$$\begin{aligned}
f_N(x) &= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dt f(t)\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)} \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{0} dt f(t)\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)} \\
&\quad + \frac{1}{L}\int_{0}^{L/2} dt f(t)\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)}{\sin\frac{\pi}{L}(t-x)}
\end{aligned}$$

積分変数を $\xi = (2N+1)\frac{\pi}{L}(t-x)$ と変換すると

$$
\begin{aligned}
f_N(x) &= \frac{1}{(2N+1)\pi}\int_{\frac{(2N+1)\pi}{L}\left(-\frac{L}{2}-x\right)}^{-\frac{(2N+1)\pi}{L}x} d\xi f\left(x+\frac{L}{(2N+1)\pi}\xi\right)\frac{\sin\xi}{\sin\frac{\xi}{2N+1}} \\
&\quad + \frac{1}{(2N+1)\pi}\int_{-\frac{(2N+1)\pi}{L}x}^{\frac{(2N+1)\pi}{L}\left(\frac{L}{2}-x\right)} dt f\left(x+\frac{L}{(2N+1)\pi}\xi\right)\frac{\sin\xi}{\sin\frac{\xi}{2N+1}}
\end{aligned}
$$

$x=0$ が不連続点だとして，$x=0$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f_N(x) &= \frac{1}{(2N+1)\pi}\int_{-\frac{(2N+1)\pi}{2}}^{0} d\xi f\left(\frac{L}{(2N+1)\pi}\xi\right)\frac{\sin\xi}{\sin\frac{\xi}{2N+1}} \\
&\quad + \frac{1}{(2N+1)\pi}\int_{0}^{\frac{(2N+1)\pi}{2}} d\xi f\left(\frac{L}{(2N+1)\pi}\xi\right)\frac{\sin\xi}{\sin\frac{\xi}{2N+1}}
\end{aligned}
$$

$N\to\infty$ の極限をとると

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} f_N(x) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{(2N+1)\pi}{2}}^{0} d\xi f\left(\frac{L}{(2N+1)\pi}\xi\right)\frac{\frac{\xi}{2N+1}}{\sin\frac{\xi}{2N+1}}\frac{\sin\xi}{\xi} \\
&\quad + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{(2N+1)\pi}{2}} d\xi f\left(\frac{L}{(2N+1)\pi}\xi\right)\frac{\frac{\xi}{2N+1}}{\sin\frac{\xi}{2N+1}}\frac{\sin\xi}{\xi}
\end{aligned}
$$

被積分関数にある

$$
\frac{\frac{\xi}{2N+1}}{\sin\frac{\xi}{2N+1}}
$$

という関数は，$N\to\infty$ で 1 になる．よって，

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} f_N(x) &= \frac{f(-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{0} d\xi\frac{\sin\xi}{\xi} + \frac{f(+0)}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\xi\frac{\sin\xi}{\xi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[f(-0)+f(+0)\right]\int_{0}^{\infty} d\xi\frac{\sin\xi}{\xi}
\end{aligned}
$$

最後の積分は，

$$
I(\alpha) = \int_0^\infty d\xi e^{-\alpha\xi}\frac{\sin\xi}{\xi}
$$

を考えて $dI/d\alpha$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{d\alpha} &= -\int_0^\infty d\xi e^{-\alpha\xi}\sin\xi = -\frac{1}{2i}\int_0^\infty d\xi\left[e^{-(\alpha-i)\xi}-e^{-(\alpha+i)\xi}\right] \\
&= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\alpha-i}-\frac{1}{\alpha+i}\right) = -\frac{1}{\alpha^2+1}
\end{aligned}
$$

この結果を積分すれば,

$$I(\alpha) = -\tan^{-1}\alpha + const. \tag{E.33}$$

となる．$I(\infty) = 0$ より，$const. = \pi/2$ だから,

$$I(0) = \int_0^\infty d\xi \frac{\sin\xi}{\xi} = \frac{\pi}{2}$$

を得る．よって

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \frac{1}{2}\left[f(-0) + f(+0)\right] \tag{E.34}$$