

惑星探査とやさしい微積分 問題解答

第1章

問題 1.1 図 1.33 の V を金星から水星に読み替える． $A = \angle VES$ をコペルニクスが観測した最大離角とする．金星のときと同様に，視線 EV が水星軌道（円と仮定）に接するとき，この最大離角が実現する．すなわち α が最大のときに三角形 EVS が直角三角形（ V が直角の頂点）である．コペルニクスは観測から $VS/ES \approx 0.38$ と結論したので， $\sin \alpha = VS/ES = 0.38$ である．辺の長さの比から逆に角を求める（現代の私たちは関数電卓の \sin^{-1} あるいは \arcsin というボタンを押す）と， $\alpha \approx 22\frac{1}{3}^\circ$ を得る．こうして，コペルニクスは $EV \approx 0.38$ と結論できた（単位は au）．実際は，水星軌道は離心率が大きいため， α の範囲は $18^\circ \sim 28^\circ$ と広い．

問題 1.2 前問で行った議論を理解していれば

$$\alpha_E \approx \frac{d}{(1 - \epsilon_M) \left(\frac{T_M}{T_E}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} = \frac{d}{(1 - 0.0926) \left(\frac{686.95}{365.25}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} = \frac{d}{0.3826} = 2.614d$$

を確認するだけ．

問題 1.3 図 1.36a の視線 BA と $B'A$ は互いに平行とみなせるので，図 1.36b から $(\alpha + \beta) + (\alpha' + \beta') = \pi$ となる． $\triangle BB'M$ に注目すると $\beta + \beta' + \theta = \pi$ だから $\beta + \beta' = \pi - \theta$ ，したがって $\theta = \alpha + \alpha'$ を得る．

問題 1.4 図 1.37 の扇型 MBB' の中心角 θ の大きさは近似的に $\frac{BB'}{d(B, M)}$ rad である．視差 $p(M)$ が秒角を単位とする数値のとき， $\theta = 2 \times p(M) \cdot 4.85 \times 10^{-6}$ rad なので， $d(B, M) \approx \frac{BB'}{9.7p(M)} \times 10^6$ である．ただし，距離 $d(B, M)$ と BB' は同じ単位で表す．

問題 1.5

- i) 図 1.40b の円の半径を R とする．図 1.40a にもどり， $\cos \varphi = \frac{R}{r_E}$ に注意せよ．
- ii) 図 1.40b の三角形に余弦定理を適用して $(BB')^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos \theta = 2R^2(1 - \cos \theta)$ ．よって $BB' = R\sqrt{2(1 - \cos \theta)}$ ．点 B は図 1.40b の円周上で一定の速さで回転するから， $6\frac{1}{6}$ 時間と 24 時間の比が θ と 360° の比に一致する．
- iii) $\theta = \frac{6 + \frac{10}{24}}{24} \times 360^\circ = 92.5^\circ$
- iv) $BB' = r_E \cos \varphi \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$ ．
 $= 6364.57 \cos(52.92 \frac{\pi}{180}) \sqrt{2(1 - \cos(92.5 \frac{\pi}{180}))} \approx 5543.98$ km.

問題 1.6 ニュートンは，木星の 4 個の衛星の軌道についての正確な情報を持っていなかったのだから，すべて円軌道とし，軌道半径をそれぞれ 5.578, 8.876, 14.159, 24.903 と仮定することになった（単位は木星の半径）．各衛星の軌道周期はそれぞれ 42.48, 85.30, 171.99, 402.09（単位は時間）と与えられている．円軌道を仮定したので，円の半径は軌道長半径となる．ニュートンは，以上の仮定からケプラーの比 $\frac{a^3}{T^2}$ を各衛星について計算し

$$\frac{5.578^3}{42.48^2} \approx 0.09618, \quad \frac{8.876^3}{85.30^2} \approx 0.09612, \quad \frac{14.159^3}{171.99^2} \approx 0.09596, \quad \frac{24.903^3}{402.09^2} \approx 0.09552$$

を得た．用いたデータが不正確である可能性を考慮すれば，木星をまわる 4 個の衛星に対してもケプラーの第 3 法則が適用されることを，ニュートンは結論した．

問題 1.7 土星の 5 個の衛星についてニュートンが行った $\frac{a^3}{T^2}$ の計算は

$$\frac{(1 + \frac{19}{20}) \cdot 3}{45.31^2} \approx 0.003612, \quad \frac{(2 + \frac{1}{2})^3}{65.69^2} \approx 0.003621, \quad \frac{(3 + \frac{1}{2})^3}{108.42^2} \approx 0.003647, \\ \frac{8^3}{372.69^2} \approx 0.003686, \quad \frac{24^3}{1903.8^2} \approx 0.003814$$

であった．ここでも，衛星の軌道はいずれも円としその半径を軌道長半径 a としている（単位は外側のリングの半径）．各衛星の軌道周期 T は単位を時間とする．ニュートンの時代の機器による半径と周期の測定精度を考慮すると，土星とその衛星の系についてケプラーの第 3 法則が十分よく成り立つことを示す結果と言えよう．

このあと，ニュートンが『プリンキピア』の中で考察している問題点に直接関係する諸事項に注目する．太陽系の天体の速さの最大値と最小値を求める式を，ニュートンがどのように導出したかを見ることにする．次の設問は図 1.42 とセットになる．

問題 1.8 この設問では図 1.42 を用いる．

i) P から Q までの弧の長さを \widehat{PQ} とする．この天体が P から Q まで移動するに要した時間が Δt だから，この移動のときの平均の速さは $v_{av} = \frac{\widehat{PQ}}{\Delta t}$ となる．極めて小さな Δt について， Q は P に極めて接近しているから， \widehat{PQ} と Δs は極めて近い値であり

$$v_{av} = \frac{\widehat{PQ}}{\Delta t} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ii) Δs が小さいとき，扇型（弧は楕円） SPQ の面積 ΔA は三角形 $\triangle SPQ$ の面積 $\frac{1}{2}(SP \cdot \Delta s)$ と近似的に等しい．したがってこの天体の面積速度は $\kappa = \frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \frac{SP \cdot \Delta s}{\Delta t}$ ．図 1.9 より，近日点距離は $SP = a - c$ であるから， $\kappa \approx \frac{1}{2} \frac{(a - c) \cdot \Delta s}{\Delta t}$ ．この式と $\kappa = \frac{ab\pi}{T}$ とから

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{2ab\pi}{(a - c)T}$$

iii) $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で $Q \rightarrow P$ となり，平均の速さ $v_{av} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$ は近日点での最大の速さ v_{max} に近づく．また，扇型 SPQ の面積 ΔA の近似 $\frac{1}{2}(SP \cdot \Delta s) = \frac{1}{2}(a - c) \cdot \Delta s$ は真の値に近づく．したがって，近似式

$$\kappa = \frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{\frac{1}{2}(a - c) \cdot \Delta s}{\Delta t} \approx \frac{1}{2}(a - c)v_{max}$$

は正確な等式となる． $\kappa = \frac{ab\pi}{T}$ より，

$$v_{max} = \frac{2ab\pi}{(a - c)T}$$

という結論になる。

iv) $c = \epsilon a$ と $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ から, $a - c = a(1 - \epsilon)$ および $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$ である。

$$v_{\max} = \frac{2a^2\sqrt{1 - \epsilon^2} \pi}{a(1 - \epsilon) T} = \frac{2a(\sqrt{1 - \epsilon})(\sqrt{1 + \epsilon}) \pi}{(\sqrt{1 - \epsilon})^2 T} = \frac{2a\pi}{T} \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}}$$

問題 1.9 図 S1.1 の点 A は, 惑星 (あるいは彗星や小惑星) の軌道の遠日点, Q はこの惑星が A に到達する直前の位置である。Q から A への移動に要する時間を Δt とする。遠日点では最小の速さ v_{\min} が実現することは既知である。



図 S1.1

1) Q から A までの弧の長さを \widehat{QA} とする。この天体が Q から A まで移動するに要した時間が Δt だから, この移動のときの平均の速さ v_{av} は $\widehat{QA}\Delta t$ に等しい。極めて小さな Δt について, Q は A に極めて接近しているから, \widehat{QA} と Δs は極めて近い値であり, $v_{\text{av}} = \frac{\widehat{QA}}{\Delta t} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 。

2) Δs が小さいとき, 扇型 (弧は楕円)SAQ の面積 ΔA は三角形 ΔSAQ の面積 $\frac{1}{2}(SA \cdot \Delta s)$ と近似的に等しい。したがってこの天体の面積速度は

$$\kappa = \frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{\frac{1}{2}(SA \cdot \Delta s)}{\Delta t}$$

図 S1.1 より, 遠日点距離は $SA = a + c$ であるから,

$$\kappa \approx \frac{\frac{1}{2}(a + c) \cdot \Delta s}{\Delta t}$$

この式と $\kappa = \frac{ab\pi}{T}$ とから

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{2ab\pi}{(a + c)T}$$

3) $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で $Q \rightarrow A$ となり, 平均の速さ $v_{\text{av}} \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$ は遠日点での最小の速さ v_{\min} に近づく。また, 扇型 SAQ の面積 ΔA の近似値

$$\frac{1}{2}(SA \cdot \Delta s) = \frac{1}{2}(a + c) \cdot \Delta s$$

は真の値に近づく。したがって, 近似式

$$\kappa = \frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{\frac{1}{2}(a + c) \cdot \Delta s}{\Delta t} \approx \frac{1}{2}(a + c)v_{\min}$$

は正確な等式となる。 $\kappa = \frac{ab\pi}{T}$ より,

$$v_{\min} = \frac{2ab\pi}{(a + c)T}$$

となる。

4) $c = \epsilon a$ と $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ から, $a + c = a(1 + \epsilon)$ および $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$ 。

$$v_{\min} = \frac{2a^2\sqrt{1 - \epsilon^2} \pi}{a(1 + \epsilon) T} = \frac{2a(\sqrt{1 - \epsilon})(\sqrt{1 + \epsilon}) \pi}{(\sqrt{1 + \epsilon})^2 T} = \frac{2a\pi}{T} \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}}$$

次の 2 つの設定には, $1 \text{ au/年} = (149,597,870.7 \text{ km})/1 \text{ 年} \times 1 \text{ 年}/(31,557,600 \text{ sec}) \approx 4.74 \text{ km/sec}$ という単位の変換を用いる。

問題 1.10 地球軌道の長半径を $a = 1 \text{ au}$, 離心率を $\epsilon = 0.0167$, 近日点周期を $T = 1$ 年とすると

$$v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} = 2\pi \sqrt{\frac{1 + 0.0167}{1 - 0.0167}} \approx 6.39 \text{ au/年} \approx 30.29 \text{ km/sec},$$

$$v_{\min} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} = 2\pi \sqrt{\frac{1 - 0.0167}{1 + 0.0167}} \approx 6.18 \text{ au/年} \approx 29.29 \text{ km/sec}.$$

問題 1.11 ハレー彗星の軌道長半径を $a = 17.83 \text{ au}$, 離心率を $\epsilon = 0.967$, 周期を $T = 75.32$ 年とすると

$$v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} = \frac{2(17.83)\pi}{75.32} \sqrt{\frac{1 + 0.967}{1 - 0.967}} \approx 11.483 \text{ au/年} \approx 54.43 \text{ km/sec},$$

$$v_{\min} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} = \frac{2(17.83)\pi}{75.32} \sqrt{\frac{1 - 0.967}{1 + 0.967}} \approx 0.193 \text{ au/年} \approx 0.91 \text{ km/sec}.$$

問題 1.12 右側の焦点の位置については, 図 1.7 についての説明を参照し, 次のようにまとめられる。垂直軸と楕円の交点 C と水平軸上の点を結んでできる斜めの線分の長さが, この楕円の長半径 a となるとき, 水平軸上のその点が焦点である。図 1.43 の楕円④は実は円であり (長半径と短半径が同じ長さ), 2 つの焦点は一致し原点 O に重なる。これらの楕円が, 焦点にある大きな天体の重力により運動する物体の軌道であるとしよう。楕円軌道の遠点距離が小さいと, 万有引力の法則から, 重力が大きくなり近点付近の軌道の曲がり方が大きくなって, 軌道がより扁平になる。

この状況が「中心となる天体の万有引力による軌道運動」の様子と整合しているか調べる。ここでは, 近点における回転運動の加速度とそれを引き起こす重力から速さを求め, 一方すでに学んだ重力による楕円軌道に特徴的な最大の速さとこの速さが一致することを示す。楕円の焦点にある大きな天体の質量を M とし軌道運動を行う天体の質量を m とする。長半径 a , 離心率 ϵ の楕円の近点における曲がり方は楕円に接する円の半径 (曲率半径) $r_0 = \frac{b^2}{a} = (1 - \epsilon^2)a$ によって表される。近点距離 $a(1 - \epsilon)$ に対する重力の大きさは $F = \frac{GMm}{a^2(1 - \epsilon)^2}$ である。近点における運動を半径 r_0 , 速さ v_0 の円運動で近似するとその加速度は $\frac{v_0^2}{r_0}$ であり, これが重力によって引き起こされる加速度なので,

$$\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{v_0^2}{(1-\varepsilon^2)a} = \frac{1}{m} \frac{GmM}{a^2(1-\varepsilon)^2}$$

したがって

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

を得る．一方、重力による楕円軌道の近点における速さは、 $GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ 、 $v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ から $v_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ となり、 $v_0 = v_{\max}$ である．

問題 1.13 $F = G \frac{MM_E}{d^2}$ と $F = \frac{4\pi^2 M}{T^2} \frac{M_E d}{M_E + M}$ を用いると $\frac{4\pi^2 M}{T^2} \frac{M_E d}{M_E + M} = \frac{GMM_E}{d^2}$ を得て $\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{d}{M_E + M} = \frac{G}{d^2}$ となり、 $\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{d^3}{M_E + M} = G$ ．したがって

$$\frac{4\pi^2}{G} \frac{d^3}{T^2} = M_E + M$$

よって

$$\frac{4\pi^2}{GM_E} \frac{d^3}{T^2} = \frac{M_E + M}{M_E} = 1 + \frac{M}{M_E}$$

問題 1.14

$$GM_E = 3.98600 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

および

$$GM = 4.90279 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

より

$$\frac{M}{M_E} = \frac{GM}{GM_E} = \frac{4.90279 \times 10^{12}}{3.98600 \times 10^{14}} = \frac{1}{81.3006}$$

$M_E = 5.9724 \times 10^{24} \text{ kg}$ を用いて、月の質量は $M = \frac{M_E}{81.3006} = 7.3461 \times 10^{22} \text{ kg}$ ．

問題 1.15

i) 地球が月に及ぼす重力の大きさを F_E とし、地球と月の質量をそれぞれ M_E および M とする．万有引力の法則により

$$F_E = \frac{GM_E M}{a_M^2} \approx \frac{(3.98600 \times 10^{14})(7.3461 \times 10^{22})}{(3.8440 \times 10^8)^2} = 1.9817 \times 10^{20} \text{ N}$$

ii) 太陽が月に及ぼす重力の大きさを F_S とし、太陽と月の質量をそれぞれ M_S および M とする．万有引力の法則により

$$F_S = \frac{GM_S M}{a_E^2} = \frac{(1.32712 \times 10^{20})(7.3461 \times 10^{22})}{(1.49598 \times 10^{11})^2} = 4.3563 \times 10^{20} \text{ N}$$

iii) 月が太陽から受ける重力は地球から受ける重力の 2 倍以上なので「なぜ月は地球を周回するのか?」と思うかもしれない．月が太陽に向かって「落ちる」加速度

$$\frac{F_S}{M} = \frac{GM_S}{a_E^2}$$

と、地球が太陽に向かって「落ちる」加速度

$$\frac{1}{M_E} \frac{GM_E M_S}{a_E^2} = \frac{GM_S}{a_E^2}$$

は同じ値であり、最も粗い近似としては地球と月は同じ太陽をまわる軌道上をそろって公転運動する．そのうえで、地球は月に i) で求めた重力を及ぼし、月は地球に向かって「落下(周回)」を続ける．

問題 1.16 地球をまわる月軌道の長半径 $a = 3.84748 \times 10^5 \text{ km}$ 、周期 $T = 2.36062 \times 10^6 \text{ sec}$ 、離心率 $\varepsilon = 0.0549$ から

$$v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 1.08192 \approx 1.08 \text{ km/sec},$$

$$v_{\min} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 0.969311 \approx 0.969 \text{ km/sec}.$$

図 1.46 に関係して、これらの速さを問題 1.10 で求めた地球の(太陽から見た)速さと比較すると、月は太陽のまわりを常に反時計回りに回転することが分かる．したがって、太陽をまわる月の軌道が「輪をつなげたような」形になることはない．

問題 1.17

$$\begin{aligned} G &= 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2} = 6.67384 \times 10^{-11} \frac{(100 \text{ cm})^3}{(1000 \text{ g}) \text{ sec}^2} \\ &= 6.67384 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2} \end{aligned}$$

問題 1.18 地球が半径 6371 km の球であると仮定すると、体積の概略値は $V = \frac{4\pi}{3} (6371 \text{ km})^3 = 1.0832 \times 10^{21} \text{ km}^3$ ．質量を $M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ とすると密度の平均値は

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{5.97 \times 10^{24}}{1.0832 \times 10^{21}} = 5511.41 \approx 5.51 \times 10^3 \text{ g/cm}^3$$

問題 1.19 1 章 G 節で記したように 1 フィート = 30.48 cm、1 インチ = 2.54 cm．図 1.47 の球については、「 $\frac{1}{4}$ インチ離れている」から $d = \frac{1}{2} \frac{2.54}{4} = 0.3175 \text{ cm}$ である．球の半径は $\frac{1}{2}$ フィートだから $c = \frac{30.48}{2} + d = 15.24 + 0.3175 = 15.5575 \text{ cm}$ ．球の体積は $\frac{4}{3} \pi (15.24)^3 \approx 14,827 \text{ cm}^3$ ．球の密度が地球のそれであるとすると球の質量は $(14,827)(5.51) = 81,716 \text{ g}$ ．

問題 1.20 各球の質量を $m = 81,716 \text{ g}$ とし、球の中心間の距離を $x \text{ (cm)}$ とすると、両球に働く重力は

$$\begin{aligned} G \frac{m \cdot m}{x^2} &= G \frac{m^2}{x^2} = (6.67384 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}) \cdot \left(\frac{81,716^2}{x^2} \text{ g}^2 \text{ cm}^{-2} \right) \\ &= \frac{445.65}{x^2} \text{ cm} \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2} = \frac{445.65}{x^2} \text{ dyne} \end{aligned}$$

両球が接触したとき ($x = 30.48 \text{ cm}$) この力は最大になり、その値は $\frac{445.65}{30.48^2} = 0.480 \text{ dyne}$ ．図 1.47 の位置に両球があるとき ($x = 2c = 2(15.5575) = 31.115 \text{ cm}$)、力は最小となり $\frac{445.65}{31.115^2} = 0.460 \text{ dyne}$ である．

問題 1.21 引力により各球が運動し距離 d だけ移動するのに必要な時間 t を求めれば、この時間 t の後に両球が接触するのだから、問題は解けたことになる。一定の力 F のもとで静止している質量 m の質点が運動を開始するとき、時間 t の間に移動する距離は $x(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$ であるから、 $t^2 = \frac{2mx(t)}{F}$ したがって $t = \sqrt{\frac{2mx(t)}{F}}$ となる。題意により $x(t) = d = 0.3175$ cm, また力 F は両球の間隔の変化にともない変化するが、最大の 0.480 dyne が継続したとして t を計算すると

$$t = \sqrt{\frac{2mx(t)}{F}} = \sqrt{\frac{2(81,716)(0.3175)}{0.480}} = 328.79 \text{ sec}$$

もし、最小の力がずっと継続したとすると $t = \sqrt{\frac{2mx(t)}{F}} = \sqrt{\frac{2(81,716)(0.3175)}{0.460}} = 335.86 \text{ sec}$ となり、少し長い時間がかかって球の接触が起きる。実際の時間はこの2つの間のどこかとなるが、いずれにしても約 $5\frac{1}{2}$ 分と見積もられる。この結論はニュートンが述べていること相いれない。ニュートンは(ケプラーの第3法則のニュートン版から) GM を求めることはできたのだが (M は地球の質量), G については(彼自身が述べているように) 手がかりがなかったのである。

問題 1.22 $EE' = 2ES = 2 \text{ au}$ とし, A の恒星視差 $\rho(A) = \frac{1}{2} \angle EAE'$ を秒角で表すと, 地球 E から A までの距離は $d(A, E) \approx \frac{2}{9.7 \rho(A)} \times 10^6$ である。距離の単位を光年に変更すると, $1 \text{ ly} \approx 63,200$ 年であるから

$$d(A, E) \approx \frac{2}{9.7 \rho(A)} \times \frac{10^6}{6.32 \times 10^4} \approx \frac{3.3}{\rho(A)} \text{ ly}$$

となる。 $\rho(A)$ に各測定値 $0.29, 0.13, 0.75$ を代入すると, 距離の推定値として

$$11.4 \text{ 光年 (61 Cygni), } 25.1 \text{ 光年 (Vega), } 4.4 \text{ 光年 } (\alpha\text{-Centauri})$$

を得る。一番大きな視差 0.75 秒角でも, $0.75 \cdot \frac{1}{3600} \approx 0.0002^\circ$ であることに注意せよ。

問題 1.23

i) *Sputnik 1* の楕円軌道の長半径を a , 離心率を ϵ とする。この軌道の遠地点距離は地球半径 6371 km に高度 939 km を加えて $a + \epsilon a = 7310$ km, 近地点距離は 215 km を加えて $a - \epsilon a = 6586$ km. 和をとると $2a = (a + \epsilon a) + (a - \epsilon a) = 13896$ km だから $a = 6948$ km. また, $2a\epsilon = (a + \epsilon a) - (a - \epsilon a) = 7310 - 6586 = 724$ km だから $a\epsilon = 362$ km, したがって $\epsilon = \frac{362}{6948} \approx 0.052$. 軌道周期は $96.2 \cdot 60 = 5772$ sec. 問題 1.8 と 1.9 での速さの最大・最小の計算と同様に

$$v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} = 7.9682 \text{ km/sec}, \quad v_{\min} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} = 7.1790 \text{ km/sec}$$

ii) 地球の質量を M としてケプラーの第3法則(ニュートン版)を用いると,

$$GM = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = 4\pi^2 \frac{(6.948 \times 10^6)^3}{5772^2} \approx 3.975 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

問題 1.24

i) *Explorer 1* の軌道の長半径 a と離心率 ϵ は前問と同様に $a + \epsilon a = 6371 + 2534 = 8905$ km, $a - \epsilon a = 6371 + 360 = 6731$ km より $a = 7818$ km および $\epsilon \approx 0.14$ と計算される。また軌道周期は $T = (114.9)(60) = 6894$ sec であるから

$$v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \approx 8.20 \text{ km/sec}, \quad v_{\min} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \approx 6.19 \text{ km/sec}$$

Sputnik 1 と比較すると, *Explorer 1* の速さの最大値は大きく, 最小値は小さい。これは軌道の形とどのような関係があるか考察せよ。

ii) 地球の質量を M とすると,

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \pi^2 \frac{(7.818 \times 10^6)^3}{6894^2} \approx 3.969 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

第2章

問題 2.1 月の質量を M として、ニュートン版ケプラーの第3法則から、

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2 (2413 \times 10^3)^3}{(178.05 \times 60)^2} \approx 4.8601 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

および

$$G = 6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$$

より、 $M = 7.282 \times 10^{22} \text{ kg}$.

問題 2.2 この物語は 1995 年に公開された映画『アポロ 13』で映像化されている。主演トム・ハンクス、ケビン・ベーコン他。アカデミー賞（編集賞，録音賞）受賞。

問題 2.3 MKS 単位系で記す。初期軌道：

$$GM = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = 4\pi^2 \frac{(13055 \times 10^3)^3}{(12.62 \times 3600)^2} \approx 4.2557 \times 10^{13} \text{ m}^3/\text{sec}^2.$$

同様に、第1回軌道修正後： $GM \approx 4.2843 \times 10^{13} \text{ m}^3/\text{sec}^2$

第2回軌道修正後： $GM \approx 4.2863 \times 10^{13} \text{ m}^3/\text{sec}^2$.

問題 2.4 初期軌道：

$$v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} = \frac{2\pi(13055)}{12.62 \times 3600} \sqrt{\frac{1+0.63}{1-0.63}} \approx 3.79 \text{ km/sec},$$

$$v_{\min} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} = \frac{2\pi(13055)}{12.62 \times 3600} \sqrt{\frac{1-0.63}{1+0.63}} \approx 0.86 \text{ km/sec}$$

同様に、第1回軌道修正後： $v_{\max} \approx 3.80 \text{ km/sec}$ ，および $v_{\min} \approx 0.89 \text{ km/sec}$.

第2回軌道修正後： $v_{\max} \approx 3.68 \text{ km/sec}$ ，および $v_{\min} \approx 0.92 \text{ km/sec}$.

問題 2.5-6 動画，*Voyager* のミッション，スペースシャトル，ハッブル宇宙望遠鏡を参照。

問題 2.7 火星の質量を M (kg) とする。表 2.2 の衛星 Phobos のデータから

$$GM = \frac{4\pi^2 (9378 \times 10^3)^3}{(0.31891 \times 24 \times 60 \times 60)^2} \approx 4.28871 \times 10^{13} \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

衛星 Deimos のデータからは

$$GM = \frac{4\pi^2 (23459 \times 10^3)^3}{(1.26244 \times 24 \times 60 \times 60)^2} \approx 4.28390 \times 10^{13} \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

$G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ を用いると、それぞれから $M = 6.42615 \times 10^{23} \text{ kg}$ と $M = 6.41894 \times 10^{23} \text{ kg}$ を得る。

問題 2.8-10 ビデオ鑑賞の誘い。

問題 2.11 ケプラーの第3法則により、太陽を周回する楕円軌道にあるどんな天体についても $\frac{a^3}{T^2}$ の値が等しくなる（より具体的な表現はニュートンによる）。したがって地球軌道の長半径を $a \approx 1 \text{ au}$ （1 au の定義は地球と太陽の平均距離であり軌道長半径とは異なる）とし軌道周期を $T \approx 1 \text{ 年}$ （時間の単位として1年の定義は365.25日であり地球の公転周期とは異なる）とすると、これらの単位で表したとき、どの天体についても $a^3 \approx T^2$ となる。離心率 ϵ (< 1) の楕円軌道上の天体の速さの最大値が $v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}$ となることを思い出し、 $T \approx a^{\frac{3}{2}}$ を用いて変形すると

$$v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \approx \frac{2\pi a}{a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}$$

$$< 2\pi \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1+1}{1-\epsilon}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{a(1-\epsilon)}}$$

速さの単位が au/年であることを注意。また $a(1-\epsilon)$ は楕円軌道の近日点距離である。

問題 2.12 彗星が太陽コロナに近づきその地獄のような環境で生き残るには、太陽表面から少なくとも 25,000 km したがって太陽中心から 720,000 km (0.00481 au) 以上離れていなければならない。近日点距離 $a(1-\epsilon)$ が最低でも 0.00481 au となる軌道にあると仮定する。問題 2.11 より、太陽をまわる天体の速さの上限は

$$\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{a(1-\epsilon)}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{0.00481}} \approx 128 \text{ au}$$

太陽を周回する楕円軌道にある天体の速さは、単位を変換して、

$$(128)(4.74) \approx 607 \text{ km/sec}$$

を越えることはない。

問題 2.13 表 2.8 から、1680 年の大彗星は離心率が極めて 1 に近く、近日点距離が 0.0062 au である。問題 2.11 から、この彗星の速さの最大値は

$$v_{\max} \approx 2\pi \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1+1}{1-\epsilon}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{0.0062}} \approx 112.65 \text{ au/年} \approx 534 \text{ km/sec}$$

に近い値であった。

問題 2.14 近日点距離はそれぞれ 0.00553 au, 0.00775 au, 0.00779 au。前問と同様に計算すると、最大速度は 119.5 au/年, 100.9 au/年, 100.7 au/年。したがって 567 km/sec, 478 km/sec, 477 km/sec。

問題 2.15 問題 2.13 と同様に、C/2011 W3 の速さの最大値は

$$\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{0.00555}} = 119.3 \text{ au/年} = 568 \text{ km/sec}$$

と計算される。本問の直後に記したリンク

<https://phys.org/news/2012-03-comet-lovejoy-survive-sun.html>

の動画は、この彗星が太陽の近くを駆け抜ける様子の実写であり、一見に値する。

本章の「問題と考察」の残りの部分は、太陽系の質量中心と、小惑星 Vesta と Ceres に向かった宇宙機 Dawn のイオン・エンジンについての話題を、ここで完結する形で提示している。

第3章

問題 3.1 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いて直交座標を求める。

- i) $(0, 0)$
- ii) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) \approx (4.33, 2.5)$
- iii) $\left(-\frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{\sqrt{2}}\right) \approx (-4.95, -4.95)$
- iv) $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \approx (-4.24, 4.24)$
- v) $(7 \cos(10), 7 \sin(10)) \approx (-5.87, -3.81)$
- vi) $(-3 \cos(-20), -3 \sin(-20)) \approx (-1.22, 2.74)$

問題 3.2 題意の点はいずれも y 軸上にないので、偏角の範囲は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ となる。タンジェントのグラフを観察すると θ と $\tan \theta$ は同符号。 $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$, $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ により極座標が求まる。

i) 直交座標 $(4, 5)$ は第 1 象限の点を表す。 $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{5}{4}\right) \approx 0.90$ が 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間の角なので対応する動径は複号の正を採用して $r = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \approx 6.40$ 。極座標は $(\sqrt{41}, \tan^{-1} \frac{5}{4}) \approx (6.40, 0.90)$ 。 θ の範囲の制限を外し、 $(\sqrt{41}, 2\pi + \tan^{-1} \frac{5}{4})$ と $(-\sqrt{41}, \pi + \tan^{-1} \frac{5}{4})$ が他の例。

ii) $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{10}{-2}\right) = -\tan^{-1}(5) \approx -1.37$ 。この偏角は $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ 。直交座標 $(-2, 10)$ は第 2 象限の点を表すので、負の偏角に対応して動径は負となり、 $r = -\sqrt{(-2)^2 + 10^2} = -\sqrt{104} = -2\sqrt{26} \approx -10.2$ 。極座標は $(-2\sqrt{26}, -\tan^{-1} 5) \approx (-10.2, -1.37)$ 。偏角の制限を外し、 $(2\sqrt{26}, \pi - \tan^{-1} 5)$ と $(-2\sqrt{26}, 2\pi - \tan^{-1} 5)$ が他の例。

iii) $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-7}{-5}\right) = \tan^{-1} \left(\frac{7}{5}\right) \approx 0.95$ 。この偏角は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 。直交座標 $(-5, -7)$ は第 3 象限の点を表すので、正の偏角に対応して動径は負となり、 $r = -\sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} = -\sqrt{74} \approx -8.60$ 。極座標は $(-\sqrt{74}, \tan^{-1} \frac{7}{5}) \approx (-8.60, 0.95)$ 。他の極座標の例は $(\sqrt{74}, -\tan^{-1} \frac{7}{5})$ と $(-\sqrt{74}, 2\pi - \tan^{-1} \frac{7}{5})$ 。

iv) $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-15}{6}\right) = -\tan^{-1} \left(\frac{5}{2}\right) \approx -1.19$ 。この偏角は $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ 。直交座標 $(6, -15)$ は第 4 象限の点を表すので、負の偏角に対応して動径は正となり、 $r = \sqrt{6^2 + (-15)^2} = \sqrt{261} \approx 16.16$ 。極座標は $(\sqrt{261}, -\tan^{-1} \frac{5}{2}) \approx (16.16, -1.19)$ 。 $(-\sqrt{261}, \pi - \tan^{-1} \frac{5}{2})$ と $(\sqrt{261}, 2\pi - \tan^{-1} \frac{5}{2})$ が他の例。

問題 3.3 極方程式を求めるには、直交座標の方程式に $x = r \cos \theta$ および $y = r \sin \theta$ を代入する。

i) $2r \cos \theta + 3r \sin \theta = r (2 \cos \theta + 3 \sin \theta) = 4$ より、 $r = \frac{4}{2 \cos \theta + 3 \sin \theta} (2 \cos \theta + 3 \sin \theta = \sqrt{2^2 + 3^2} \sin(\theta + \alpha), \tan \alpha = \frac{2}{3})$ を用いると、 $r = \frac{4}{\sqrt{13} \sin(\theta + \alpha)}$ となる。サインの加法定理を用いて $A \cos \theta + B \sin \theta = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\theta + \alpha)$, $\tan \alpha =$

$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{B}{A}$ を確認せよ.

ii) $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = 4r \cos \theta$ から, $r^2 = 4r \sin \theta$ を得る. したがって $r = 0$ または $r = 4 \sin \theta$ のいずれかを満たすとき, 直交座標の方程式が満たされる. 原点 $r = 0$ は $r = 4 \sin \theta$ に含まれるので, $r = 4 \sin \theta$ が答えである.

iii) $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r \cos \theta ((r \cos \theta)^2 - 3(r \sin \theta)^2)$ から $r^2 = r^3 \cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta)$ を得る. したがって $r = 0$ または $r = \frac{1}{\cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta)} = \frac{1}{\cos 3\theta}$ ($r = 0$ を含まない). 最後の等号は $\cos(3\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta = \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2 \sin^2 \theta \cos \theta = \cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta)$.

問題 3.4 $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \theta$ および $y = r \sin \theta$ を用いて直交座標系の式に書き直す.

i) $r = 5 > 0$ より $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$. 両辺を 2 乗して, $x^2 + y^2 = 25$.

ii) $r = \cos \theta$ より $r^2 = 3r \cos \theta$ だから, $x^2 + y^2 = 3x$ すなわち $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = (\frac{3}{2})^2$.

iii) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 6$ より $\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{y}{x} = 6$. 極方程式に「 $r = 0$ を含む」という指示があれば $y = 6x$ になる.

iv) 両辺に r を乗じ $r^2 = 2r(\sin \theta) (\frac{\sin \theta}{\cos \theta}) = 2(r \sin \theta) (\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta})$, よって $x^2 + y^2 = \frac{2y^2}{x}$. $x^3 + xy^2 - 2y^2 = 0$ は原点を含み極方程式と合致する.

問題 3.5 どのグラフも単純であり, 図を用いない説明だけで十分だろう.

i) $r = -6$ のグラフは, 任意の θ について極座標 $(-6, \theta)$ となる点の集まり. 原点を中心とする半径 6 の円.

ii) $\theta = -\frac{8\pi}{6}$ のグラフは, 任意の r について $(r, -\frac{8\pi}{6})$ となる点の集まり. 動径ベクトルの傾きが $-\frac{4\pi}{3}$ となる (原点を通る) 直線. x 軸から時計回りに角 $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ の方向の原点を通る直線 $y = -\sqrt{3}x$ である.

iii) $r = 4 \sin \theta$ のグラフには原点が含まれるので, $r^2 = 4r \sin \theta$ すなわち $x^2 + y^2 = 4y$ のグラフと同じになる. 式を整理すると $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ であり, 直交座標 $(0, 2)$ を中心とする半径 2 の円である.

iv) $r(\sin \theta + \cos \theta) = 1$ を直交座標で表すと $y + x = 1$ あるいは $y = -x + 1$. 直交座標系で $(0, 1)$ を通り傾き -1 の直線.

問題 3.6 この表をグラフにすると図 3.5 となる.

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$	$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$
$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$

極座標でイメージすると, θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変化するとき $r = \cos \theta$ は 1 から 0 に変化し, 極座標の点が $(1, 0)$ から原点 $(0, \frac{\pi}{2})$ まで移動する. θ が $\frac{\pi}{2}$ から π まで変化すると $r = \cos \theta$ は 0 から -1 に変化し, 極座標の点が第 4 象限を移動して $(-1, \pi)$ から原点 $(1, 0)$ に戻ってくる. y 軸の右半分でループを描く. その形状を正確に見極

めるには, $r = \cos \theta$ の両辺に r をかけ $r^2 = r \cos \theta$. 直交座標に移り $x^2 + y^2 = x$, すなわち $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$.

結局, $r = \cos \theta$ のグラフは直交座標系の点 $(\frac{1}{2}, 0)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である. ちなみに中心の位置を極座標で表しても $(\frac{1}{2}, 0)$.

問題 3.7 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を $ax + by + c = 0$ に代入して $r(a \cos \theta + b \sin \theta) = -c$. $c \neq 0$ とすると, グラフが直線となる極方程式 $r = f(\theta) = \frac{-c}{a \cos \theta + b \sin \theta}$ を得る (直線の全域を描くとき θ はどの範囲を動くか?). $c = 0$ とすると $ax + by = 0$ である. さらに $b \neq 0$ として $ax + by = 0$ に $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を代入した $r(a \cos \theta + b \sin \theta) = 0$ は, $r = 0$ (原点) あるいは $a \cos \theta + b \sin \theta = 0$ したがって (任意の r について) $\tan \theta = -\frac{a}{b}$ (あるいは $\theta = \tan^{-1} -\frac{a}{b}$) すなわち傾き $-\frac{a}{b}$ の原点を通る直線となる ($r = f(\theta)$ の形に表すことはできない).

問題 3.8 3 章 D 節の結果を用いる.

i) 任意の $d > 0$ について, $r = \frac{d}{1 + \cos \theta}$ を直交座標で表した式は $\sqrt{x^2 + y^2} + x = d$ であり, 移項した式を 2 乗して整理すると $y^2 = d^2 - 2d \cdot x = 4 \frac{d}{2} (\frac{d}{2} - x)$, すなわち原点を焦点とし準線が $x = d$ の左に開いた放物線である. 図 3.16b 参照.

ii) 任意の $d > 0$ について, $r = \frac{d}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ ($\varepsilon < 1$) は, $a = \frac{d}{1 - \varepsilon^2}$, $b = \frac{d}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ として, 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を左に $c = \varepsilon a$ だけシフトした図形である. $d = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{5}$: $a = \frac{2}{1 - (\frac{1}{5})^2} = \frac{25}{12}$, $b = \frac{2}{\sqrt{1 - (\frac{1}{5})^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$, $c = a\varepsilon = \frac{5}{12}$. $d = 5$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $a = \frac{20}{3}$, $b = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $c = \frac{10}{3}$.

第 1 の楕円は離心率が 0.2 であり円に近い. グラフは 2 つの楕円の相対的な大きさを正しく表示.

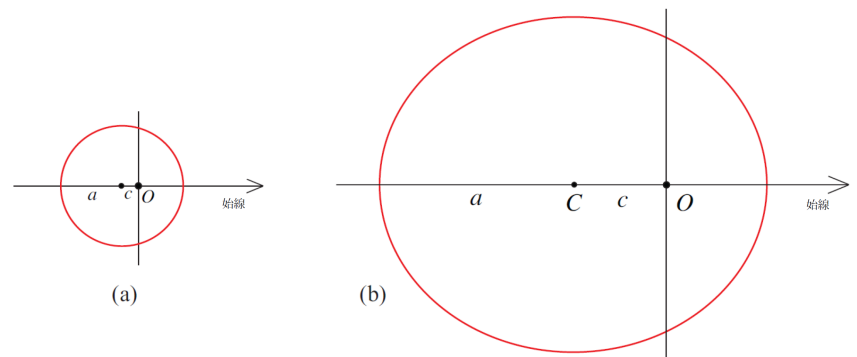


図 S3.1

iii) 任意の $d > 0$ について, $r = \frac{d}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ ($\varepsilon > 1$) は, $a = \frac{d}{\varepsilon^2 - 1}$, $b = \frac{d}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$ とし

て、双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を右に $c = \epsilon a$ だけシフトした図形である。 $d = 3, \epsilon = 2: a = \frac{3}{2^2-1} = 1, b = \frac{3}{\sqrt{2^2-1}} = \sqrt{3}, c = a\epsilon = 2. d = \frac{1}{2}, \epsilon = 5: a = \frac{1}{48}, b = \frac{1}{4\sqrt{6}}, c = \frac{5}{48}$.

図の2つの双曲線のスケールは異なる。双曲線の形(漸近線)を決める $2a \times 2b$ の長方形も描くとよい。

$\epsilon = \sqrt{2}$ のとき、この長方形は正方形 ($2a = 2b$) になる。 $\epsilon > \sqrt{2}$ のとき縦長の長方形 ($2a < 2b$)、 $\epsilon < \sqrt{2}$ のとき横長の長方形 ($2a > 2b$) となる。

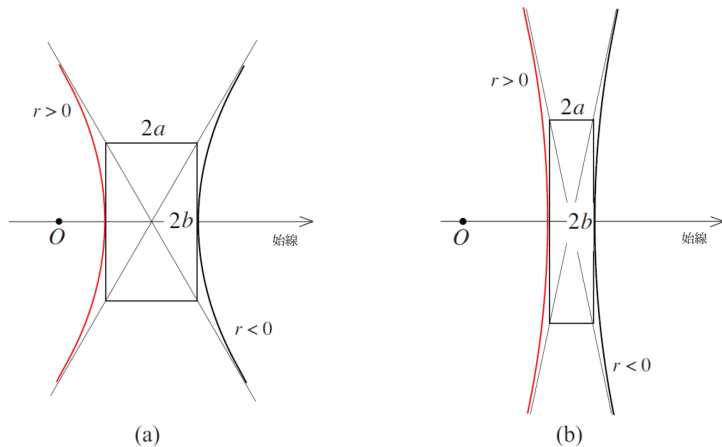


図 S3.2

問題 3.9 式 $r = \frac{d}{1+\epsilon \cos \theta}$ と 3 章 D 節の議論による。

i) 図 3.16b に示すように、この放物線の準線は垂直な直線 $x = d$ であり、焦点は原点に一致する。したがって $d = 10$ 。放物線なので $\epsilon = 1$ 。

ii) 題意より楕円の長半径と短半径はそれぞれ $a = 8, b = 5$ 。したがって $\frac{d}{1-\epsilon^2} = 8, b = \frac{d}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = 5. d = \left(\frac{d}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-\epsilon^2}{d}\right) = \frac{b^2}{a} = \frac{25}{8}. \frac{d}{1-\epsilon^2} = 8$ より $1 - \epsilon^2 = \frac{d}{8} = \frac{25}{64}$ 。したがって $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ 。この楕円の極方程式は $r = \frac{\frac{25}{8}}{1 + \frac{\sqrt{39}}{8} \cos \theta} = \frac{25}{8 + \sqrt{39} \cos \theta}$ 。

iii) 題意より双曲線の長半径と短半径はそれぞれ $a = 8, b = 5$ 。したがって $\frac{d}{\epsilon^2-1} = 8, b = \frac{d}{\sqrt{\epsilon^2-1}} = 5. d = \left(\frac{d}{\sqrt{\epsilon^2-1}}\right)^2 \cdot (\epsilon^2-1) = \frac{b^2}{a} = \frac{25}{8}. \epsilon^2 - 1 = \frac{d}{8} = \frac{25}{64}$ 。したがって $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{89}}{8}$ 。この双曲線の極方程式は $r = \frac{\frac{25}{8}}{1 + \frac{\sqrt{89}}{8} \cos \theta} = \frac{25}{8 + \sqrt{89} \cos \theta}$ 。

問題 3.10 放物線の定義から C は「焦点と準線からの距離が等しい点の集まり」である。さらに図 3.17 の C は焦点が極座標の原点と一致し、頂点が始線上にある。

本文にあるように極座標系と直交座標系を重ねる。極方程式 (*) $r = \frac{d}{1+\cos \theta}$ を $r = d - r \cos \theta = d - x$ と変形する。左辺の r は原点からグラフ上の点までの距離。右辺の x はグラフ上の点の x 座標であり、 $d - x$ はこの点から始線(方程式 $x = d$)までの距離。したがって(*)は放物線の定義と一致し原点が焦点である。 $r = \frac{d}{1+\cos \theta}$ は $\theta = 0$ で最小となるから、始線上にグラフの頂点があり、 $\theta = \pi$ で発散するので左に開いた放物線である。グラフの頂点は焦点(すなわち原点)からの距離が $r = \frac{d}{1+1} = \frac{d}{2}$ であり、準線を 2 等分する位置にある。

問題 3.11 3 章 D 節(ii) で論じた楕円は、(*) $r = \frac{d}{1+\epsilon \cos \theta}$ の d と ϵ を用いて長半径 a と短半径 b を表すと、 $a = \frac{d}{1-\epsilon^2}$ および $b = \frac{d}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ である。 $a = 7, b = 4$ において d と ϵ を求めると(問題 3.9 ii) 参照)、 $d = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{7}, \epsilon = \frac{\sqrt{33}}{7}(1). r = \frac{\frac{16}{7}}{1 + \frac{\sqrt{33}}{7} \cos \theta}$ 。

問題 3.12 前問と同様に、 $d = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}, \epsilon = \frac{\sqrt{34}}{5}(> 1). r = \frac{\frac{9}{5}}{1 + \frac{\sqrt{34}}{5} \cos \theta}$ 。

問題 3.13 $d = \frac{b^2}{a}, \epsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 。

問題 3.14 $d = \frac{b^2}{a}, \epsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ 。

問題 3.15 極方程式 $r = f(\theta)$ のグラフ C_f と、 α を定数として $r = g(\theta) = f(\theta - \alpha)$ のグラフ C_g を比較する。 $g(\alpha) = f(0)$ とすれば直ちに分かるように、 C_f を反時計回りに α だけ回転すると C_g に一致する。恒等式 $\sin \theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ を用いて $r(\theta) = \frac{d}{1+\epsilon \sin \theta} = \frac{d}{1+\epsilon \cos(\theta - \frac{\pi}{2})}$ 。 $r(\theta) = \frac{d}{1+\epsilon \cos \theta}$ のグラフを反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転すると $r(\theta) = \frac{d}{1+\epsilon \sin \theta}$ のグラフと重なる。

問題 3.16 $\epsilon < 1$ のとき分母が 0 になることはないので、定義域全体で連続かつ微分可能。

$$f'(\theta) = \frac{d\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2}$$

となり、分母が常に正であり $f'(\theta)$ の符号は分子の $\sin \theta$ の符号と一致する。

極値は $\theta = 0$ と $\pm \pi$ にある。 $-\pi < \theta < 0$ において $f'(\theta) < 0$ (減少)、 $0 < \theta < \pi$ において $f'(\theta) > 0$ (増加)となるから、

$$f(0) = \frac{d}{1+\epsilon} = \frac{b^2/a}{1+\epsilon} = \frac{a^2 - c^2}{a} \frac{1}{1+\epsilon} = \frac{(1-\epsilon^2)a^2}{a} \frac{1}{1+\epsilon} = a(1-\epsilon)$$

が極小かつ最小。最大は

$$f(\pm \pi) = \frac{d}{1-\epsilon} = a(1+\epsilon)$$

$\epsilon = 1$ のとき分母が $\theta = \pm \pi$ で 0 となるので、定義域を $-\pi < \theta < \pi$ の开区間とすると、最小については($\epsilon < 1$ の場合と同様に) $f(0) = \frac{d}{1+\epsilon}$ だが、最大は存在しない。

$\epsilon > 1$ の場合、 $\phi = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) (> 0)$ として、 $-\phi < \theta < \phi$ では($\epsilon = 1$ のときと全く同様に) 最小値 $f(0) = \frac{d}{1+\epsilon}$ であり、最大は存在しない。

$\phi < \theta \leq \pi$ では $f(\theta)$ は単調増加、

$$f(\pi) = \frac{d}{1-\varepsilon} = \frac{b^2/a}{1-\varepsilon} = \frac{c^2-a^2}{a} \frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{(\varepsilon^2-1)a^2}{a} \frac{1}{1-\varepsilon} = -a(1+\varepsilon) < 0$$

となり最大値。しかし最小値は存在しない。

$-\pi \leq \theta < -\phi$ では単調減少で同様に最小値は存在せず最大値が $f(-\pi) = \frac{d}{1-\varepsilon} (< 0)$ 。

θ	$-\pi$		$-\phi$		0		ϕ		π
増減	$\frac{d}{1-\varepsilon} (< 0)$	\searrow		\searrow	$\frac{d}{1+\varepsilon}$	\nearrow		\nearrow	$\frac{d}{1-\varepsilon}$

図 S3.3

問題 3.17 $r = f(\theta) = \cos \theta$ のグラフは図 S3.4 に示す円である。問題 3.6 で求めた増減表を参照し、偏角による動径の変化を追跡せよ。 $f'(\theta) = -\sin \theta$ が $0 < \theta < \pi$ で正、 $\pi < \theta < 2\pi$ で負となることも照合せよ (本文の図 3.4)。

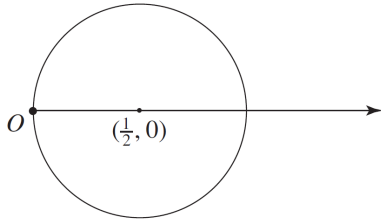


図 S3.4

問題 3.18 $r = f(\theta) = \frac{1}{\sin \theta}$ を書き直すと $r \sin \theta = 1$, したがって直交座標系では $y = 1$. 図 S3.5a から直ちに $\gamma(\theta) = \theta$. また,

$$f'(\theta) = -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\tan(\theta - \frac{\pi}{2})}{\sin \theta} = f(\theta) \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \gamma(\theta) = \theta$$

だから

$$f'(\theta) = f(\theta) \cdot \tan\left(\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立. $-\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = -\frac{\sin(\theta - \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta - \frac{\pi}{2})} = \tan(\theta - \frac{\pi}{2})$ に注意.

問題 3.19 $r = f(\theta) = \cos \theta$ のグラフは図 S3.5b の円である (中心 $C(\frac{1}{2}, 0)$, 半径 $\frac{1}{2}$). 半径 CP と P における接線は直交するので γ の補角と二等辺三角形の角 θ が等しい. すなわち $\frac{\pi}{2} - \gamma = \theta$.

$$f'(\theta) = -\sin \theta = (\cos \theta) (\tan(-\theta)) = f(\theta) \tan(-\theta) = f(\theta) \tan\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)$$

であることが証明できた。

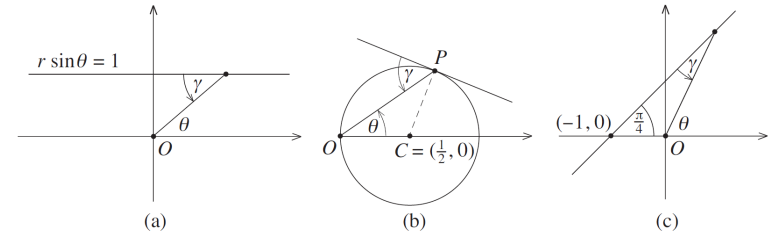


図 S3.5

問題 3.20 $r = \frac{1}{\sin \theta - \cos \theta}$ を $r \sin \theta - r \cos \theta = y - x = 1$ と書き直すと、直線 (図 S3.5c) であることが分かる。また、 $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$ に注意すれば、 $r = f(\theta) = \frac{1}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})}$ が問題 3.18 のグラフを反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した図形であることが分かる。 $\gamma(\theta) = \theta - \frac{\pi}{4}$ 。

問題 3.18 の計算を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して適用すればよいため、 θ と γ の相対的な関係は変わらず、 $f'(\theta) = f(\theta) \tan(\gamma - \frac{\pi}{2})$ の成り立つことが推測できる。実際に

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{-\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \sin^2(\theta - \frac{\pi}{4})} = f(\theta) \frac{-\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}{\sin(\theta - \frac{\pi}{4})} = f(\theta) \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= f(\theta) \tan\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$\gamma(\theta) = \theta - \frac{\pi}{4}$ でありこの公式が成立する。

問題 3.21 基本的な状況を簡単に復習する。 $P = (f(\theta), \theta)$ を極方程式 $r = f(\theta)$ のグラフ上の任意の点とする ($f(\theta) \neq 0$: グラフは原点を通らない)。偏角を、 θ から微小な正の角 $\Delta\theta$ だけ増やし、点 $(f(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta)$ をとる。図 S3.6a では、中心が O , 半径が $f(\theta)$ の円を、 θ から $\theta + \Delta\theta$ まで切り取った円弧を赤で示した。図 S3.6a は関数のグラフが円弧より原点側に来ている場合である。図 3.22a のときと同じく曲がった三角形を P における「くちばし」と呼ぶ。円弧の長さを Δs とすると $\Delta\theta = \frac{\Delta s}{f(\theta)}$ (ラジアン), したがって $\frac{1}{\Delta\theta} = \frac{1}{\Delta s} f(\theta)$ である。代入により

$$\frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta} = \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta s} \cdot f(\theta).$$

図には $r = f(\theta)$ のグラフの P における接線が描き込んであり、この接線と原点から $\theta + \Delta\theta$ 方向への直線との交点が A である。また円弧の P における接線も描いてあり、同じく交点が B である。この 2 本の接線と直線により $\triangle APB$ がつくられる。図 3.6b あるいは S3.7 には「くちばし」が赤、三角形が緑で示してある。ここで

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta s}$$

に注目する。 $\Delta\theta$ を 0 にもっていくと、線分 OAB が線分 OP に近づき、 P における「くちばし」と三角形がともに点 P に向かって小さくなり、三角形による「くちばし」の近似の精度が上がる (図 S3.7)。この過程で Δs は BP に近づき、

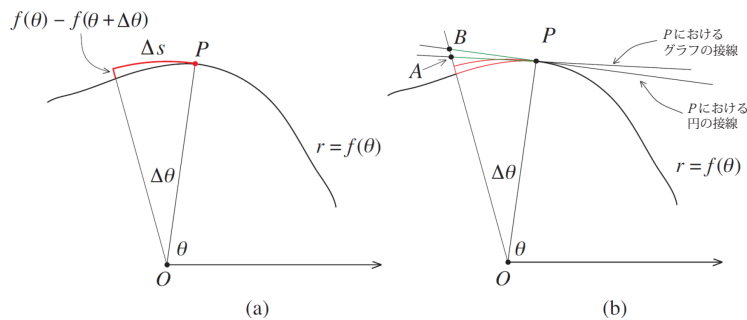


図 S3.6

$f(\theta) - f(\theta + \Delta\theta) = -(f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta))$ は AB に近づく.

したがって,

$$\frac{-(f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta))}{\Delta s} \text{ は比 } \frac{AB}{BP} \text{ に近づく.}$$

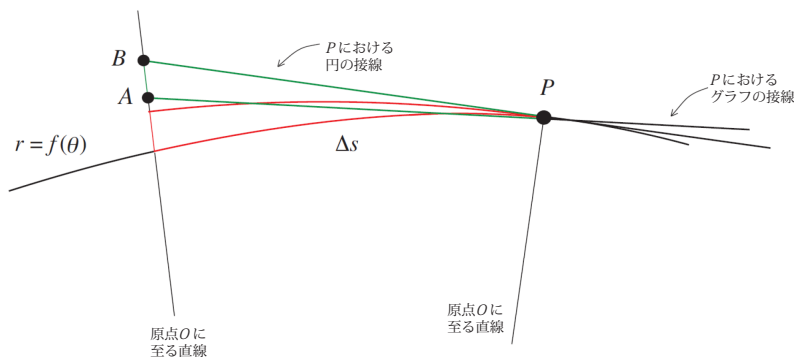


図 S3.7

円の半径と接線は常に直交するので PO と PB のなす角は $\frac{\pi}{2}$ である. したがって $\Delta\theta$ が 0 に近づくとき角 $\angle PBA$ が $\frac{\pi}{2}$ に近づき, $\triangle APB$ を「 B を直角とする直角三角形」とみなせるようになる. こうして, 比 $\frac{AB}{BP}$ は $\angle APB$ のタンジェントに近づく. $\angle APO = \gamma$, $\angle BPO = \frac{\pi}{2}$ だから $\angle APB = \frac{\pi}{2} - \gamma$. 以上を総合すると, $\Delta\theta$ が 0 に近づくとき

$$\frac{-(f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta))}{\Delta s} \text{ は比 } \frac{AB}{BP} \text{ すなわち } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \text{ に近づく.}$$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = -\tan\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)$ だから

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta s} = \tan\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)$$

が証明された. こうして図 3.6a の状況でも

$$f'(\theta) = f(\theta) \tan\left(\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}\right)$$

という結論に到達する.

問題 3.22 アルキメデスの螺旋

$$r = f(\theta) = c\theta$$

は $\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{\theta}$ を満たすから

$$\tan\left(\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\theta}$$

が成り立つ. $f'(\theta) = c > 0$ だから $r = f(\theta) = c\theta$ は θ の増加関数なので $\frac{\pi}{2} < \gamma(\theta)$, $\gamma(\theta) < \pi$ を合わせて考えると, 常に

$$0 < \left(\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ.

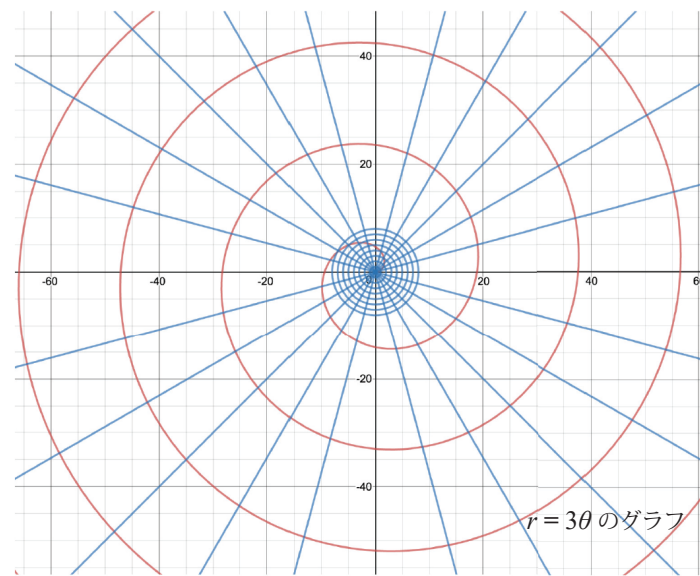


図 S3.8

θ が正で小さいとき, $\tan\left(\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\theta}$ は正で大きな値となる. \tan のグラフを考えると, これは $\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}$ が $\frac{\pi}{2}$ に近いことが分かり, $\gamma(\theta)$ が π に近い (図 3.21) ので, 螺旋の開きかたが速い.

θ が大きいときは $\tan\left(\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}\right)$ が小さいので $\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}$ が正の小さな値になり,

$\gamma(\theta)$ が $\frac{\pi}{2}$ に近く、螺旋の開き方が遅い。 θ が大きくなるほど螺旋は半径の大きな円のように振る舞う。なお動径の増加の速さ $\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}$ は c に依らない。 $r = f(\theta) = 3\theta$ のグラフを図 S3.8 に示すので、以上の振る舞いを確認せよ。

図 S3.8 のような極方程式のグラフを描くためには

<https://www.desmos.com/calculator/ms3eghkkgz>

などが利用できる。

径の長さの増加の速さ $\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}$ は c に依らない。

問題 3.23 合成関数の微分法を用いると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left[f(0)e^{\tan(\gamma - \frac{\pi}{2}) \cdot \theta} \right] = f(0)e^{\tan(\gamma - \frac{\pi}{2}) \cdot \theta} \cdot \tan\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= f(\theta) \tan\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

問題 3.24 $f(\theta) = \sin \theta$ および $f'(\theta) = \cos \theta$ より

$$\sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1$$

したがって曲線の長さは

$$\int_0^\pi 1 \cdot d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{3\pi} 1 \cdot d\theta = 3\pi.$$

$r = \sin \theta$ のグラフ (図 3.14) は半径 $1/2$ の円であり、積分区間はそれぞれ円の 1 周, 2 周, 3 周であり、図形的に見ても $2\pi \left(\frac{1}{2}\right) = \pi$, $4\pi \left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi$, $6\pi \left(\frac{1}{2}\right) = 3\pi$ である。

問題 3.25 3 章 G 節の面積の公式から、定積分 $\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta$ は、図 3.14 の $r = f(\theta) = \sin \theta$ のグラフすなわち半径 $1/2$ の円の面積であり、積分は $\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ となることが分かる。計算で積分を求めるには $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ として

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi d\theta - \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$\theta: \pi \rightarrow 2\pi$ は同じ円を同じ向きに 1 周して囲む面積だから $\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$ となり

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

問題 3.26 $r = f(\theta) = \frac{1}{\sin \theta}$. 合成関数の微分法より $f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) = -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$. 長さを求める区間は $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. 長さを与える定積分の式は、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} + \left(-\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta}} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

と表される。題意の図形はグラフと 2 直線 $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\theta = \frac{3\pi}{4}$ で囲まれた部分なので、その面積を与える定積分の式は

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2 \sin^2 \theta} d\theta$$

である。

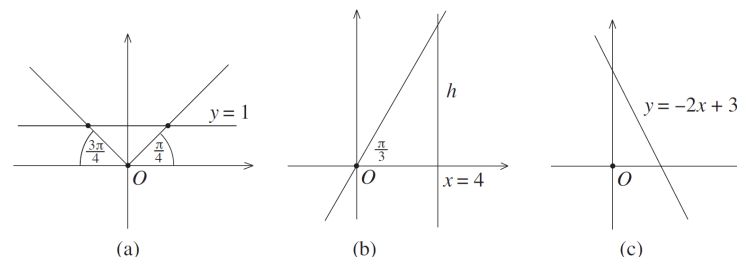


図 S3.9

極方程式 $r = \frac{1}{\sin \theta}$ を直交座標の式になおすと $y = 1$. 図 S3.9a に直線 $y = 1$ のグラフと積分区間を決める 2 直線を描いた。題意の長さは直角二等辺三角形 (倒立) の底辺の長さ (2) であり、題意の面積はこの直角三角形の面積 $(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1) = 1$ である。こうして

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2 \sin^2 \theta} d\theta = 2$$

問題 3.27 円: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ の中心は $(1,1)$, 半径は $\sqrt{2}$ であり、そのグラフを図 S3.10 に示した。円と座標軸の交点 $(2,0)$ と $(0,2)$ を結ぶ直線は $y = -x + 2$ であり円の中心はこの直線上にある (直径)。この円を表す極方程式を求めるため、 $x = r \cos \theta$ および $y = r \sin \theta$ を直交座標の式に代入すると

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (r \cos \theta - 1)^2 + (r \sin \theta - 1)^2 = r^2 - 2r(\cos \theta + \sin \theta) + 2 = 2$ となり $r(r - 2(\cos \theta + \sin \theta)) = 0$. すなわち $r = 0$ または $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ を得る。 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ を第 2 式に代入すると $r = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ となり第 1 式 (原点) を含む。図 S3.10 を見ると

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta &= \left[\text{半径} \sqrt{2} \text{の半円の面積} \right] + \left[\text{斜辺} 2\sqrt{2} \text{の直角} 2 \text{等辺三角形の面積} \right] \\ &= \pi + 2 \end{aligned}$$

円弧の長さは

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta = \left[\text{半径} \sqrt{2} \text{の円の半周} \right] = \sqrt{2}\pi.$$

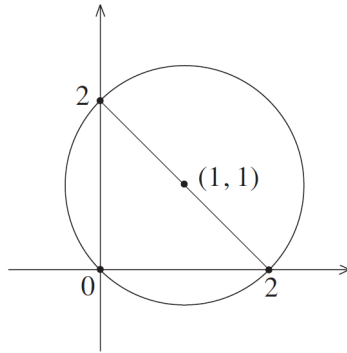


図 S3.10

これらの積分は直接に計算できる。まず

$$f(\theta)^2 = 4(\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta) = 4(1 + 2\sin\theta\cos\theta)$$

より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + 2\sin\theta\cos\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \sin 2\theta) d\theta \\ &= [2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\cos t]_0^{\pi} = \pi - (-1 - 1) = \pi + 2 \end{aligned}$$

また,

$$f'(\theta) = 2(-\sin\theta + \cos\theta)$$

より,

$$f'(\theta)^2 = 4(\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) = 4(1 - 2\sin\theta\cos\theta)$$

となるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8} d\theta = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi.$$

問題 3.28 極方程式 $r = f(\theta) = \frac{4}{\cos\theta}$ は, $x = r\cos\theta$ より, 直交座標系で直線の式 $x = 4$ となる. 偏角の区間 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ から, x 軸より上にある直線の全体がそのグラフである. 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\cos\theta}\right)^2 d\theta$ は, 図 S3.9b の底辺 4, 高さ h の直角三角形の面積を表す. $\frac{h}{4} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ より $h = 4\sqrt{3}$ となるので,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\cos\theta}\right)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{8}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

合成関数の微分法により $f'(\theta) = -4(\cos\theta)^{-2}(-\sin\theta) = \frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$ だから,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{16}{\cos^2\theta} + \frac{16\sin^2\theta}{\cos^4\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16 \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^4\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4}{\cos^2\theta} d\theta. \end{aligned}$$

図 S3.9b を見ると, この定積分が表す長さは直角三角形の高さ $4\sqrt{3}$ に等しいことが分かる. 長さを求める定積分の 2 倍が面積を求める定積分と等しい.

問題 3.29 極方程式 $r = f(\theta) = \frac{3}{\sin\theta + 2\cos\theta}$ を $r\sin\theta + 2r\cos\theta = 3$ と書き直し直交座標系の式 $y = -2x + 3$ を得る. これは傾き -2 , y 切片 3 の直線の式であり, グラフは図 S3.9c に示した. 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$ はこの直線と x 軸および y 軸に囲まれた直角三角形の面積である. したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot 3\right) = \frac{9}{4}.$$

定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta$ はこの直角三角形の斜辺の長さであり

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

問題 3.30 極方程式 $r = f(\theta) = \frac{2}{1+\cos\theta}$ のグラフは $d = 2$ の放物線である (図 3.16b). 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{2^2}{(1+\cos\theta)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{(1+\cos\theta)^2} d\theta$$

は放物線の上半分である部分の面積. 3章D節(i)から, この放物線は xy 座標で表すと $\sqrt{x^2 + y^2} + x = 2$ であり, $x^2 + y^2 = (2-x)^2$, $y^2 = (x^2 - 4x + 4) - x^2$ と変形し, $y = \pm\sqrt{4-4x}$ となる. したがって, 放物線の上半分を表す式は

$$y = \sqrt{4-4x} = 2\sqrt{1-x}.$$

求める面積は $\int_0^1 2\sqrt{1-x} dx$ である. $F(x) = -\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ を微分すると $2\sqrt{1-x}$ を得るので, この定積分は

$$\int_0^1 2\sqrt{1-x} dx = \left[-\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

問題 3.31 3章D節で学んだように, $r = f(\theta) = \frac{4}{1+\frac{1}{3}\cos\theta}$ のグラフは離心率 $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $d = 4$ の楕円である. 同節(ii)から, 楕円の長半径と短半径は $a = \frac{d}{1-\varepsilon^2} = \frac{4}{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{2}$, $b = \frac{d}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}} = 3\sqrt{2}$ となる. 楕円の面積は

$$ab\pi = \frac{9}{2} \cdot 3\sqrt{2}\pi = \frac{27}{2}\sqrt{2}\pi.$$

楕円の上半分の面積を定積分で表すと

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{1+\frac{1}{3}\cos\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \frac{27}{2\sqrt{2}}\pi = \frac{27}{4\sqrt{2}}\pi.$$

問題 3.32 定積分の値は、積分変数を θ から x に書き換えても変化しない。

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sqrt{3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + \cos x)^2} dx = \frac{2}{3}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3} \cos x\right)^2} dx = \frac{27\sqrt{2}}{16} \pi$$

問題 3.33 等角螺旋 $f(\theta) = \frac{1}{7}e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}$ では $f'(\theta) = \frac{1}{7}e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$. 3章H節の議論に従い $\tan(\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}) = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから, $(\gamma(\theta) - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

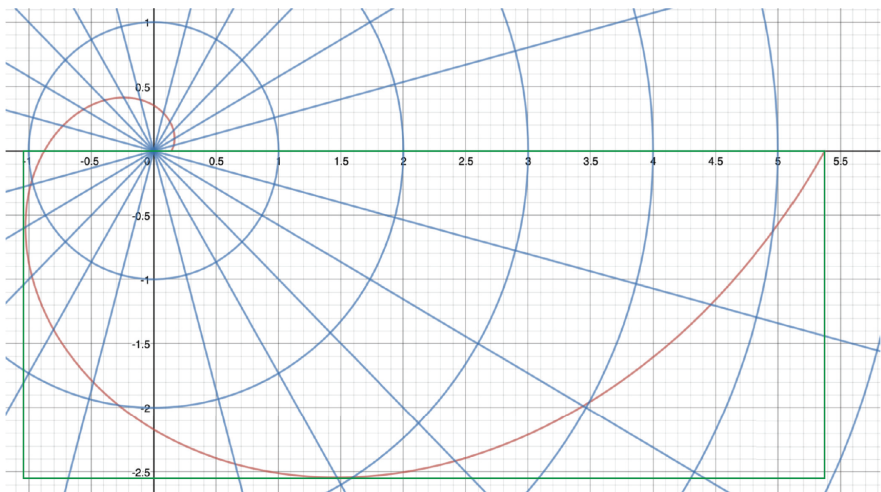


図 S3.11 $r = \frac{1}{7}e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}$ のグラフ

図 S3.11 にグラフを示す. θ が 0 から 2π までの螺旋の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{7^2} e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\theta} + \frac{1}{3 \cdot 7^2} e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{7} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4}{3} e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\theta}} d\theta = \frac{2}{7\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{\sqrt{3}}\theta} d\theta \\ &= \frac{2}{7\sqrt{3}} \left[\sqrt{3} e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}} \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{7} \left(3^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} - 1 \right) \approx 10.46. \end{aligned}$$

螺旋と始線が囲む図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7^2} e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\theta} \right) d\theta = \frac{1}{2 \cdot 7^2} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2 \cdot 7^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \left[e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\theta} \right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{196} \left(e^{\frac{4\pi}{\sqrt{3}}} - 1 \right) \approx 12.50. \end{aligned}$$

図の緑の長方形(縦 2.55, 横 6.435)は, 螺旋の長さと同数の値が概略で見積もるため. 長方形の縦 2 辺と横 1 辺の長さ: $2.55 \times 2 + 6.45 = 11.55$, 長方形の面積: $2.55 \cdot 6.45 \approx 16.45$. 定積分による螺旋の長さと同数の値と思われる.

問題 3.34 $\gamma = \frac{3\pi}{4}$ だから $r = f(\theta) = \frac{1}{4}e^{\tan(\gamma - \frac{\pi}{2})\theta} = \frac{1}{4}e^{(\tan \frac{\pi}{4})\theta} = \frac{1}{4}e^{\theta}$. $\theta = 0$ から 4π までの螺旋の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta &= \int_0^{4\pi} \sqrt{2 \left(\frac{1}{4^2} e^{2\theta} \right)} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{4\pi} e^{\theta} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(e^{4\pi} - 1 \right) \approx 101,382 \text{ (mm)}. \end{aligned}$$

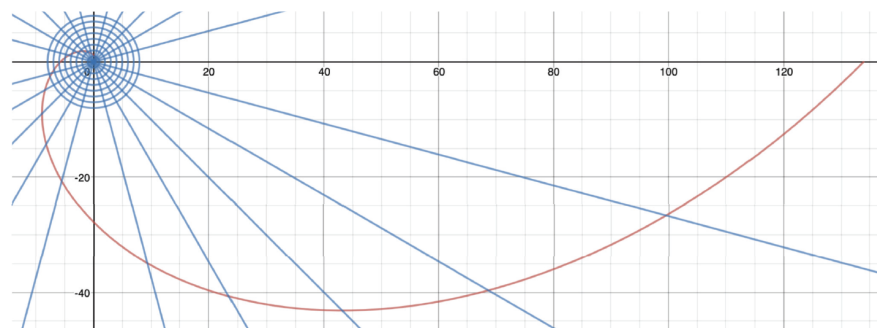


図 S3.12 a $r = \frac{1}{4}e^{\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

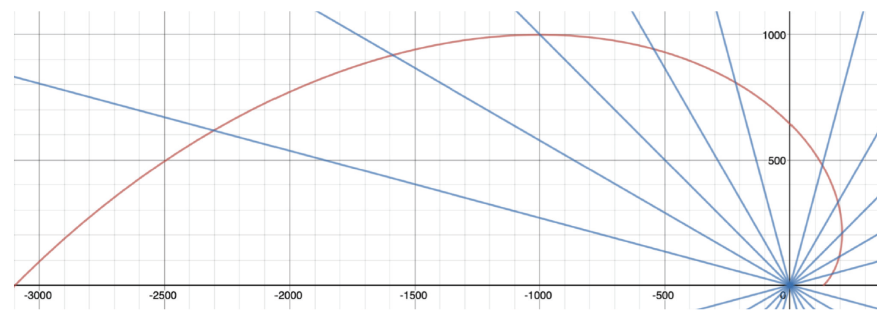


図 S3.12 b $r = \frac{1}{4}e^{\theta}, 2\pi \leq \theta \leq 3\pi$

螺旋のグラフを調べる. $(0, \frac{1}{4}), (\frac{\pi}{2}, \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{4}) \approx (1.57, 1.20), (\pi, \frac{e^{\pi}}{4}) \approx (3.14, 5.79), (\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{2}}) \approx (4.71, 27.83), (2\pi, \frac{e^{2\pi}}{4}) \approx (6.28, 133.87)$ など. $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$ の螺旋は $\theta: 2\pi \rightarrow 4\pi$ の螺旋に完全に覆われるので, 螺旋が囲む面積は

$$S = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta = \frac{e^{4\pi}}{64} (e^{4\pi} - 1) \approx 1,284,781,700 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

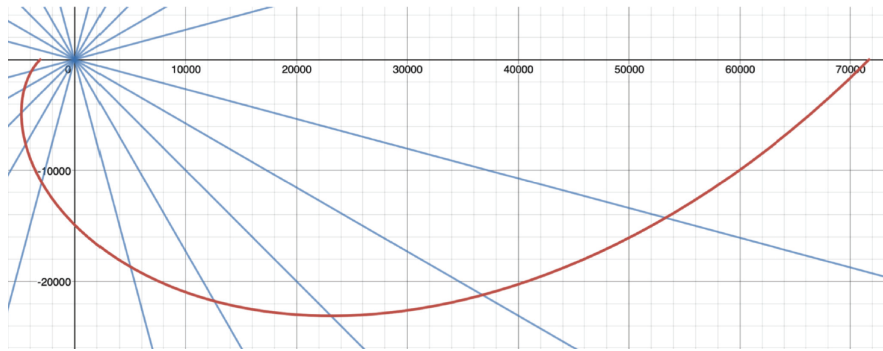


図 S3.12 c $r = \frac{1}{4}e^\theta, 3\pi \leq \theta \leq 4\pi$

問題 3.35 円弧の長さが「中心を見込む角 (ラジアン) と半径の積」となるのはラジアン の約束. 動径が一定 (すなわち円) の場合 ($f(\theta) = c, f'(\theta) = 0$) に限り, 曲線の長さを $L = \int_a^b |f(\theta)| d\theta$ で表せる. たとえば前問の等角螺旋 $r = f(\theta) = \frac{1}{4}e^\theta$ の場合, 正しい計算の

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2f(\theta)^2} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |f(\theta)| d\theta$$

は, 円にしか適用できない式で計算したときの $\sqrt{2}$ 倍となる.

図 3.25 の記号を使う. θ_i と θ_{i+1} の間のグラフの長さや円弧の長さが異なる様子を定量的に観察するため, $f(\theta) = \sin \theta$ を用いる. この関数のグラフは図 3.14 の円である. θ が 0 から反時計回りに (正) 少し増えると, グラフ上の点 (r, θ) は急速に原点から離れる. たとえば $\theta_i = \frac{\pi}{12}, \theta_{i+1} = \frac{\pi}{9}$ としてみると,

$$f(\theta_i) = \sin \frac{\pi}{12}, \quad f(\theta_{i+1}) = \sin \frac{\pi}{9}$$

である.

2 点間のグラフの長さを積分で正確に求めると

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta &= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \\ &= \left(\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\pi}{36} \approx 0.0873 \end{aligned}$$

これに対して対応する円弧の長さは

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) \left(\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \left(\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \frac{\pi}{36} \approx 0.0226$$

となり前者との乖離が大きい. これは図 S3.13 からも明らかである.

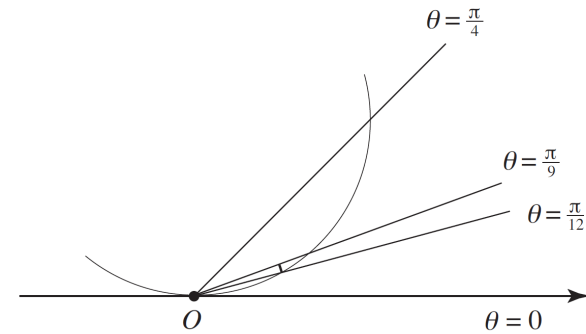


図 S3.13

問題 3.36 図 3.38 の貝の螺旋模様は $f(\theta) = f(0)e^{0.17\theta} = se^{0.17\theta}$ のグラフによって高い精度で近似される. 図 S3.14 はこの関数のグラフと, $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ および $\theta = 0$ から時計回りに $\frac{\pi}{2}$ ずつ, 番号 1 から 13 まで点を記してある. たとえば, 点 3 は $\theta = -\frac{3\pi}{2}$, 点 13 は $\theta = -\frac{13\pi}{2}$ である. 図 3.38 と図 S3.14 を比較すると, 螺旋の全長および貝殻の内部の面積は

$$\int_{-\frac{13\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta \quad \text{および} \quad \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

により計算できる.

具体的な数値を入れると, 長さは

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{13\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta &= \int_{-\frac{13\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{s^2 e^{2(0.17)\theta} + 0.17^2 s^2 e^{2(0.17)\theta}} d\theta \\ &= \sqrt{1 + 0.17^2} s \int_{-\frac{13\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} e^{0.17\theta} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{1 + 0.17^2} s}{0.17} \left[e^{0.17\theta} \right]_{-\frac{13\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \approx 6.94 s \end{aligned}$$

面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} s^2 e^{2(0.17)\theta} d\theta = \frac{1}{2} s^2 \left(\frac{1}{2(0.17)} \right) \left[e^{2(0.17)\theta} \right]_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &\approx 1.8033 s^2 \end{aligned}$$

しかし図 3.38 と図 S3.14 を比較すると, 面積の計算は未だ粗いものであることが分かる. 図 S3.15 に示すように, 右上の弓型 ABE に関係する部分を無視しているからである.

弧 AEB を円弧で近似すると, その円の半径は $\frac{3}{4}s$, 円弧が円の中心を見込む角 $\angle ACB$ は $100^\circ = \frac{5\pi}{9}$ rad と読み取ることができる. 図のように三角形 ABC の高さ CD を

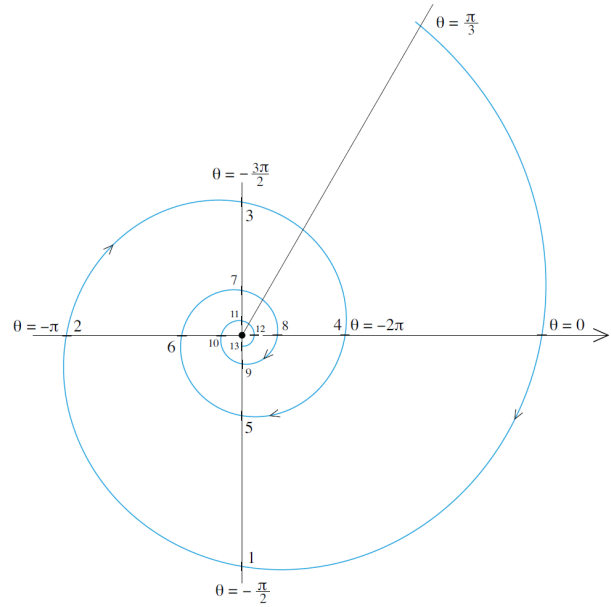


図 S3.14

h , 底辺の半分 $AD = BD = b$ とする. $h = \left(\frac{3}{4}s\right) \cos \frac{5\pi}{18}$, $b = \left(\frac{3}{4}s\right) \sin \frac{5\pi}{18}$ となるので, 弓型 ABE の面積は (サイン関数の倍角の式を用いて)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}s\right)^2 \left(\frac{5\pi}{9}\right) - hb &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}s\right)^2 \left(\frac{5\pi}{9}\right) - \left(\frac{3}{4}s\right)^2 \cos \frac{5\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \\ &= \left(\frac{3}{4}s\right)^2 \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{1}{2} \sin \frac{5\pi}{9}\right) \approx 0.2139 s^2 \end{aligned}$$

こうして, より高精度の面積の計算は

$$1.8033 s^2 + 0.2139 s^2 = 2.0172 s^2$$

となる.

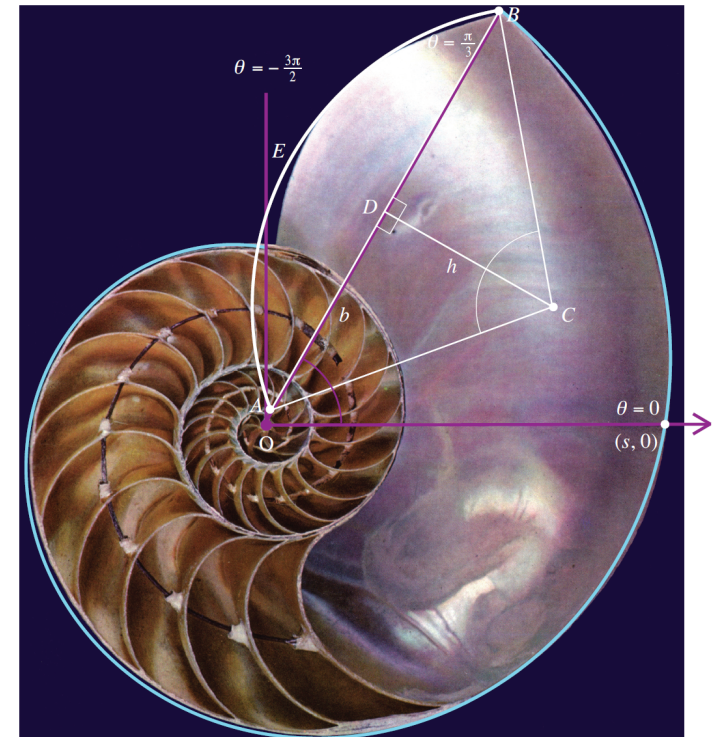


図 S3.15

第4章

問題 4.1 図 S4.1 は図 4.23 と同じ内容である．角 B は $180^\circ - 25^\circ = 125^\circ$ ．力 F の大きさが 115 N なので，正弦定理から $\frac{\sin 25^\circ}{F_1} = \frac{\sin 30^\circ}{F_2} = \frac{\sin 125^\circ}{115 \text{ N}}$ となり， $F_1 = 59.33 \text{ N}$ ， $F_2 = 70.19 \text{ N}$ ．

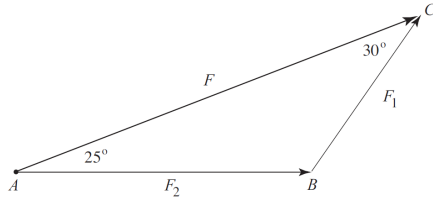


図 S4.1

問題 4.2 図 S4.2 は図 4.24 と同じ内容である．余弦定理により， $F = \sqrt{49^2 + 35^2 - 2(49)(35) \cos 115^\circ} \approx \sqrt{5075.58} \approx 71.24$ ．正弦定理により $\frac{\sin \varphi}{35} \approx \frac{\sin 115^\circ}{71.24}$ だから， $\varphi \approx \sin^{-1} \left(35 \cdot \frac{\sin 115^\circ}{71.24} \right) \approx 26.4^\circ$ ，もうひとつの角は $65^\circ - 26.4^\circ = 38.6^\circ$ ．

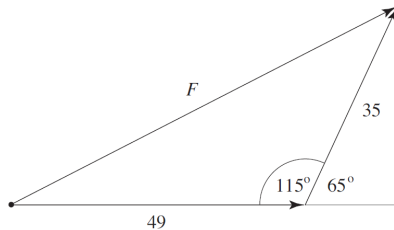


図 S4.2

問題 4.3 図 4.4a において，糸の長さ $PH = 1.6 \text{ m}$ ， $\theta = 60^\circ$ ，円錐振子の物体の円軌道の半径は $\frac{PS}{PH} = \cos \theta = 0.5$ を満たすから $PS = 0.8 \text{ m}$ ．重力加速度を $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ， P の質量 $m = 2 \text{ kg}$ より，重さは $W = mg = 19.6 \text{ N}$ ． W は F_H の鉛直成分だから $F_H = \frac{W}{\sin 60^\circ} = \frac{19.6}{\sqrt{3}/2} \approx 22.6 \text{ N}$ ． P に加わる中心力は $F = F_H \cos 60^\circ \approx 11.3 \text{ N}$ ．

問題 4.4 $x(t) = \sqrt{t}$ および $y(t) = t$ から t を消去して $y = x^2$ ：軌道は放物線． $x(0) = 0$ ， $y(0) = 0$ ： $t = 0$ で原点から出発．各軸方向の速度と加速度は $x(t) = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ ， $x'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ ， $x''(t) = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}$ ，および $y(t) = t$ ， $y'(t) = 1$ ， $y''(t) = 0$ ．速度の大きさと加速度の大きさは $v(t) = \sqrt{\frac{1}{4t} + 1}$ ， $a(t) = \frac{1}{4t^{\frac{3}{2}}}$ ．

速度ベクトルは $(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}, 1)$ ，加速度ベクトルは $(-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}, 0)$ ．

時間の経過とともに速さは 1 に近づき加速度の大きさは 0 に近づく． y 方向の速度が一定， x 方向の速度が時間の経過とともに小さくなる．加速度の方向が常に x 軸負の方向で，時間の経過とともに小さくなる．

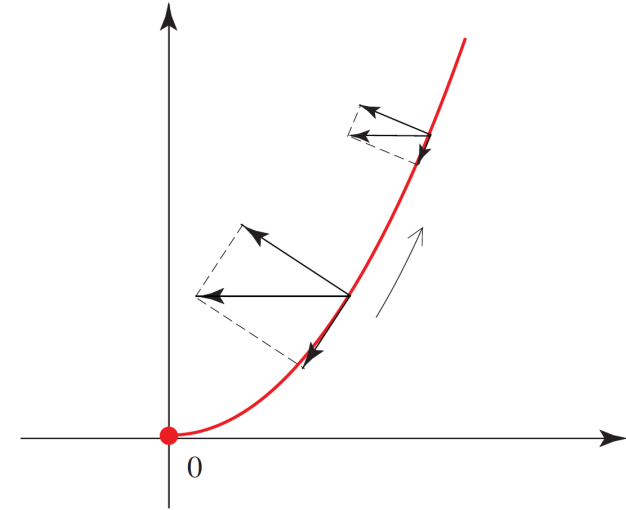


図 S4.3

速度の方向は軌道の接線方向なので，接線方向の加速度は速さを微分して

$$v'(t) = \frac{-1}{8t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4t}}}$$

これと直交する加速度の成分は，

$$\begin{aligned} \sqrt{a(t)^2 - v'(t)^2} &= \sqrt{\frac{1}{16t^3} - \frac{1}{64t^4 \left(1 + \frac{1}{4t}\right)}} = \frac{1}{4t^2} \sqrt{t - \frac{1}{\left(4 + \frac{1}{t}\right)}} \\ &= \frac{1}{4t^2} \sqrt{\frac{4t^2}{(4t+1)}} = \frac{1}{2t\sqrt{4t+1}} \end{aligned}$$

問題 4.5 中心力だから $r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2\kappa = \text{一定}$ が常に成り立つ．題意より $\frac{d\theta}{dt} = \text{一定}$ なので $r = \text{一定}$ ．すなわち円軌道． $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$ となるので， $F = m \left(\frac{4\kappa^2}{r^3} - \frac{d^2r}{dt^2} \right) = m \frac{4\kappa^2}{r^3} = \text{一定}$ (4章D節)．

問題 4.6 逆2乗則に従う中心力であっても，力の大きさが 0 になれば，力が加わらないので，ニュートンの法則 I が述べるとおり等速直線運動となる．時間 t の間に P は，直線 l 上のどの位置であっても，長さ vt の線分を移動する．固定点 S を頂

点としこの線分を底辺とする三角形の面積は常に $A_t = \frac{1}{2}vt \cdot d$ であり、面積速度は $\kappa = \frac{A_t}{t} = \frac{1}{2}vd = \text{一定}$ である。

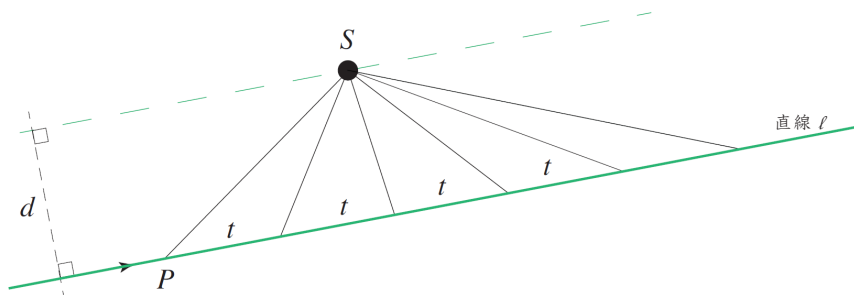


図 S4.4

4章 G 節の結論 C は「逆 2 乗則 $F = \frac{Cm}{r^2}$ に従う中心力による運動の軌跡が円錐曲線となる。力の係数 C は面積速度 κ と通径 L と $C = GM = \frac{8\kappa^2}{L}$ の関係がある」というもの。ここでは $C \rightarrow 0$ ($M \rightarrow 0$) の極限で円錐曲線が直線に近づき、矛盾がないことを示す。中心の天体の質量が小さくなると(ただし不動とする), P の加速度が小さくなり、同じ面積速度の軌道運動について速度の向きの時間的な変化の割合が小さくなる。言い換えると軌道の曲がり方が小さくなる。すなわち軌道は開き楕円軌道と双曲線軌道のいずれも放物線すなわち $\epsilon = 1$ に近づく。4章 F 節では逆 2 乗則の力による運動は $r = f(\theta) = \frac{1}{g(\theta)} = \frac{1}{B \cos \theta + \frac{C}{4\kappa^2}}$ を満たす軌道となることを導いた。 $B = \epsilon \frac{C}{4\kappa^2} = \frac{\epsilon}{d}$ である。 $C \rightarrow 0$ とすると ($\epsilon \rightarrow 1$ だから) $r = \frac{d}{\cos \theta}$ となり、これは題意の直線の式である。

問題 4.7 極方程式 $r = \frac{d}{a \sin \theta + b \cos \theta}$ を xy 座標で表すと直線の式 $ay + bx = d$ である。

$$g(\theta) = \frac{1}{f(\theta)} = \frac{1}{d} (a \sin \theta + b \cos \theta).$$

θ による微分は

$$g'' = \frac{-1}{d} (a \sin \theta + b \cos \theta) = -g$$

となるので、

$$g'' + g = 0$$

となる。4章 D 節の運動方程式(形式 2)から、ただちに

$$F(t) = 4m\kappa^2 g^2 (g + g'') = 0.$$

中心力による運動の軌跡が直線になるなら、力の大きさは 0 となる。

問題 4.8 パラメータ表示された点 $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \sin t$ の座標は、各時刻において $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}\pi}{8}) \approx (0.56, 0.56)$, $(0, \frac{\pi}{2}) \approx (0, 1.57)$, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \approx (-1.67, 1.67)$, $(-\pi, 0) \approx (-3.14, 0)$, $(\frac{5\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{-\sqrt{2}}{2}) \approx (-2.78, 2.78)$, $(0, \frac{-3\pi}{2}) \approx (0, -4.71)$, $(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{-\sqrt{2}}{2}) \approx (3.89, -3.89)$, $(2\pi, 0) \approx (6.28, 0)$ となる。これらの点をプロットするとグラフは螺旋になると予想される。

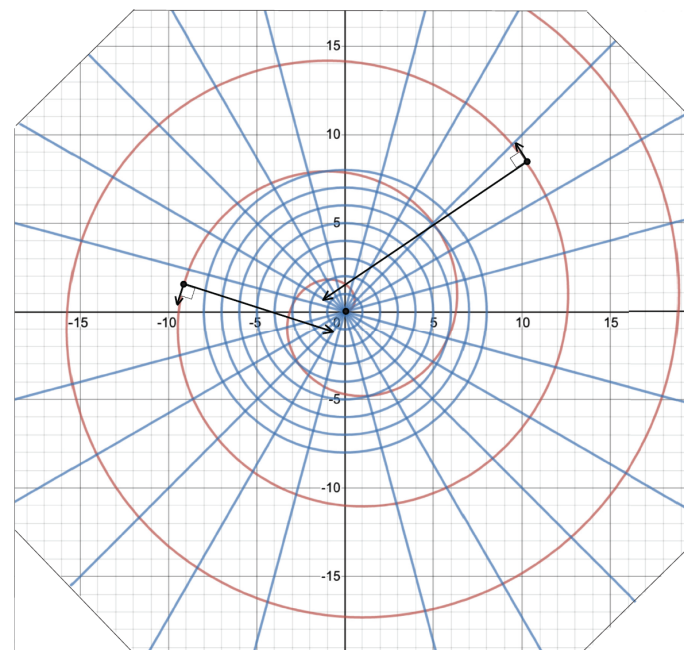


図 S4.5

速さは、 $x'(t) = \cos(t) - t \sin(t)$, $y'(t) = t \cos(t) + \sin(t)$ より、

$$v(t) = \sqrt{(\cos(t) - t \sin(t))^2 + (t \cos(t) + \sin(t))^2} = \sqrt{t^2 + 1}$$

となる。加速度の大きさは、 $x''(t) = -t \cos(t) - 2 \sin(t)$, $y''(t) = 2 \cos(t) - t \sin(t)$ より

$$a(t) = \sqrt{(-t \cos(t) - 2 \sin(t))^2 + (2 \cos(t) - t \sin(t))^2} = \sqrt{t^2 + 4}.$$

加速度の接線成分: $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$,

直交成分: $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{t^2+2}{\sqrt{1+t^2}}$.

質点の質量を $m = 1$ とするので質点に加わる力と加速度を同一視する. t の増加とともに, 力の接線成分は 0 から増加して 1 に近づき, それと直交する成分は 2 から増加して無限大に発散する.

P の運動を極座標で表す. $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \sin t$ より, $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = t$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \tan t = t$ となり, 軌道は極方程式 $r(\theta) = \theta$ のグラフとなる. この運動の面積速度は

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} t^2 \cdot 1 = \frac{1}{2} t^2$$

となり, 定数ではない. したがって, この運動を引き起こす力は中心力ではない.

問題 4.9 $x(t) = a \cos \omega t$, $y(t) = b \sin \omega t$ から $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$. 初期位置は $x(0) = a$, $y(0) = 0$. 原点から点 P に引いた線分と x 軸のなす角 θ は, $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \tan \omega t$. 両辺を t で微分すると $\frac{d}{dt} \tan \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{b}{a} \frac{\omega}{\cos^2 \omega t}$. 題意より $0 < \frac{b}{a} \leq 1$ だから $\frac{d\theta}{dt}$ の符号と ω の符号が一致し正, したがって P は時計回りに回転する. 距離 OP は

$$r(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}.$$

P の加速度は, $x''(t) = -a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x(t)$, $y'' = -b\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y(t)$ から, 線分 OP と平行かつ原点に向く. したがって, この運動を引き起こす力は原点に力の中心をもつ中心力である. その大きさは

$$F(t) = m\sqrt{a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + b^2 \omega^2 \sin^2 \omega t} = m\omega^2 r(t)$$

となる. 面積速度は, 中心力なので常に一定であり,

$$\kappa = \frac{ab\pi}{T} = \frac{ab\pi}{2\pi/\omega} = \frac{1}{2} ab\omega.$$

しかし, この中心力は逆 2 乗則を満たさない. x 軸方向と y 軸方向にそれぞれ (等しいばね定数による) フックの法則に従う復元力が働いている.

問題 4.10 放物体の最高高度とは $y(t)$ の最大値であり, $y' = -gt + v_0 \sin \varphi = 0$ より $t_{\text{top}} = \frac{v_0 \sin \varphi}{g}$ で実現する. この値を代入すると

$$\begin{aligned} y(t_{\text{top}}) &= -\frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \varphi}{g} \right)^2 + (v_0 \sin \varphi) \left(\frac{v_0 \sin \varphi}{g} \right) + y_0 = \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \varphi}{g} \right)^2 + y_0 \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi + y_0 \end{aligned}$$

問題 4.11 地面が平坦で水平でありその上に x 軸があるとすると, 地面との衝突のとき $y(t) = 0$ である. したがって,

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + (v_0 \sin \varphi) t + y_0 = 0.$$

この 2 次式の解

$$t = \frac{-(v_0 \sin \varphi) \pm \sqrt{(v_0 \sin \varphi)^2 + 2gy_0}}{-g}$$

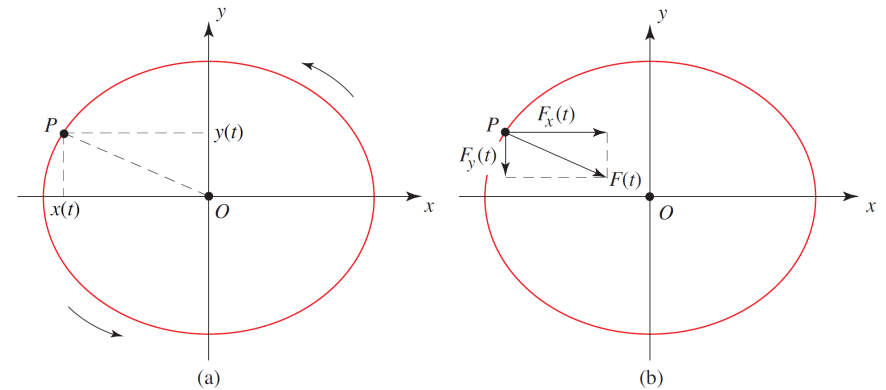


図 S4.6

のうち衝突は $t > 0$ で起きるので

$$t_{\text{imp}} = \frac{(v_0 \sin \varphi) + \sqrt{(v_0 \sin \varphi)^2 + 2gy_0}}{g}.$$

$x(0) = 0$ なので衝突の位置が飛距離 R を与え

$$R = x(t_{\text{imp}}) = (v_0 \cos \varphi) t_{\text{imp}} = \frac{v_0}{g} \cos \varphi \left[(v_0 \sin \varphi) + \sqrt{(v_0 \sin \varphi)^2 + 2gy_0} \right].$$

問題 4.12 ヒントのように直接の計算で確かめられるが, ここでは計算を少し楽にする方法を工夫する. まず概略の状況を見るため, 放物体の軌跡を図に描くと, $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ で R が最大となることが予想される. すなわち, 高さ y_0 を通過する x 座標は $\varphi = \frac{\pi}{4}$ のとき最大. その軌跡に比較して, $\varphi > \frac{\pi}{4}$ の軌跡は下側に来るので飛距離が最大になることはない. 求める最大値は $\varphi < \frac{\pi}{4}$ で実現する. このとき, $\sin \varphi$ は φ の単調増加関数なので, $\sin \varphi$ を変数として R が極値となる条件を求めればよい. $s = \sin \varphi$ と書き, $c = \frac{2gy_0}{v_0^2}$ とおくと

$$\tilde{R} = \frac{R}{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)} = \cos \varphi \left[\sin \varphi + \sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{2gy_0}{v_0^2}} \right] = \sqrt{1-s^2} \left[s + \sqrt{s^2 + c} \right].$$

\tilde{R} を s で微分し極値を与える s を求めるため

$$\frac{d\tilde{R}}{ds} = \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} \left[s + \sqrt{s^2 + c} \right] + \sqrt{1-s^2} \left[1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 + c}} \right] = 0$$

とおく. こうして $\left(\frac{1}{s} - s\right) = \sqrt{s^2 + c}$ が極値を与える条件となる. 両辺を 2 乗して整理すると

$$s = \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2gy_0}{v_0^2}}} = \frac{v_0}{\sqrt{2v_0^2 + 2gy_0}}.$$

また,

$$\tan^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1} = \frac{1}{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2}}$$

より

$$\tan \varphi = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}} .$$

問題 4.13 物体の速さは

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(v_0 \cos \varphi)^2 + (-gt + v_0 \sin \varphi)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 - (2gv_0 \sin \varphi)t + g^2 t^2} . \end{aligned}$$

問題 4.11 で求めた衝突の時刻 $t_{\text{imp}} = \frac{(v_0 \sin \varphi) + \sqrt{(v_0 \sin \varphi)^2 + 2gy_0}}{g}$ を代入すると

$$v(t_{\text{imp}}) = \sqrt{(v_0 \cos \varphi)^2 + (v_0 \sin \varphi)^2 + 2gy_0} = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}$$

となる．軌道の(接線の)傾きは $\tan \theta = \frac{y'}{x'} = \frac{-gt + v_0 \sin \varphi}{v_0 \cos \varphi}$ だから

$$\tan \theta_{\text{imp}} = -\frac{\sqrt{(v_0 \sin \varphi)^2 + 2gy_0}}{v_0 \cos \varphi} = -\sqrt{\tan^2 \varphi + \frac{2gy_0}{v_0^2 \cos^2 \varphi}} .$$

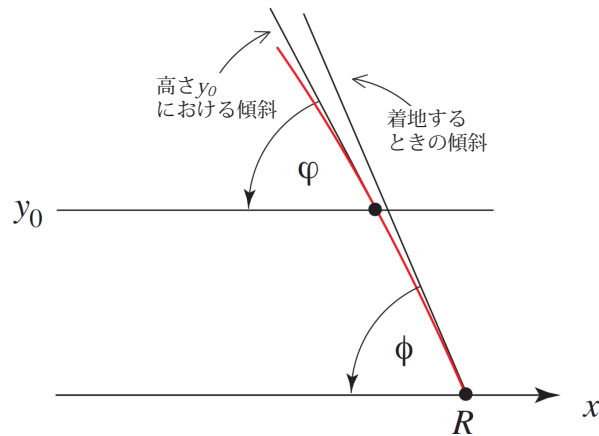


図 S4.7

$\tan \theta$ の値の変化に注目すると, 射出のとき ($t = 0$)

$$\tan \theta = \frac{-0 + v_0 \sin \varphi}{v_0 \cos \varphi} = \tan \varphi ,$$

最高高度のとき ($y' = 0$)

$$\tan \theta = 0 ,$$

射出と同じ高度に戻ってきたとき (y_0 のときの t_{imp} を用いて)

$$\tan \theta = \frac{-g \left(\frac{2v_0 \sin \varphi}{g} \right) + v_0 \sin \varphi}{v_0 \cos \varphi} = -\tan \varphi$$

である．最後の角と上に求めた $\tan \theta_{\text{imp}}$ を比較すると後者のほうが大きく, さらに落下して衝突するときはより地面に垂直に近づく．

問題 4.14 題意により $y_0 = 1.50 \text{ m}$, $v_0 = 21.7 \text{ m/sec}$, $\varphi = 30^\circ$ とおく． $g = 9.80 \text{ m/sec}^2$ である．ボールが到達する高さの最大値は, 問題 4.10 で得た式により

$$y(t_{\text{top}}) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi + y_0 = \frac{21.7^2}{19.6} \sin^2 30^\circ + 1.5 \approx 7.51 \text{ m} .$$

地面と衝突する時刻は, 問題 4.11 で得た式により

$$\begin{aligned} t_{\text{imp}} &= \frac{(v_0 \sin \varphi) + \sqrt{(v_0 \sin \varphi)^2 + 2gy_0}}{g} \\ &= \frac{(21.7)(0.5) + \sqrt{(21.7)^2(0.5)^2 + 2(9.8)(1.5)}}{9.8} \approx 2.34 \text{ sec} . \end{aligned}$$

そのときの速さは, 問題 4.13 で得た結論から

$$v(t_{\text{imp}}) = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0} = \sqrt{21.7^2 + 2(9.8)(1.5)} \approx 22.4 \text{ m/sec} .$$

本文では, このあとハンマー投げの話題が続く．放物体の飛距離の式

$$R = \frac{v_0}{g} \cos \varphi [v_0 \sin \varphi + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \varphi + 2gy_0}]$$

にセディフ選手のデータを入れると

$$\begin{aligned} R &= \frac{30.7}{9.81} \cos 39.9^\circ \left[30.7 \sin 39.9^\circ + \sqrt{(30.7)^2 \sin^2 39.9^\circ + 2(9.81)(1.66)} \right] \\ &= 96.50 \approx 96.5 \text{ m} \end{aligned}$$

となる．このときの実際の飛距離との差は $96.50 - 96.74 = 9.76 \approx 9.8 \text{ m}$ である．これはヘッドに付属するワイヤーなどがあるため, 質点の真空中の運動というモデルでは正確に表現できない部分があり, とくに空気抵抗が大きくなるなどのためであろう．回転運動中の選手(体重 1079 N) をヘッド(のワイヤー) が引っ張る力は 3767 N であった．ヘッドに引っ張られて選手が飛んで行かない理由は, この力は選手の回転運動を実現する中心力(その反作用がヘッドの回転運動を実現する中心力)となり, 選手とヘッドが共通の質量中心のまわりを回転しているからである．これは, 月が地球に落ちてこないのと同じ理由である．

次は巨大な望遠鏡の反射鏡をつくるスピネクヤスティングの話題。巨大マゼラン望遠鏡 (GMT) の主鏡の中央部分の表面形状 (回転軸を含む断面の形) は $y = f(x) = \frac{2\pi^2\nu^2}{g}x^2$ で表されることを学んだ。1章C節では放物線 $x^2 = 4cy$ ($y = \frac{x^2}{4c}$) の焦点が点 $(0, c)$ $c > 0$ にあることを調べた。放物面鏡の軸と平行に入射する光は反射されて焦点を通過する。焦点の位置をスピネクヤスティングの回転数 ν で表すと、 $c = \frac{g}{8\pi^2\nu^2}$ となり、これが反射鏡の最下点 (原点) から焦点までの距離である。

問題 4.15 $g = 9.80 \frac{m}{\text{sec}^2}$, $\nu = \frac{1}{12} \frac{1}{\text{sec}}$ から、

$$c = \frac{(9.80)12^2}{8(3.14)^2} \approx 17.87 \text{ m}$$

であり、原点から約 18 m 上に焦点がある。放物線の式は

$$f(x) = \frac{1}{4c}x^2 \approx 0.014x^2.$$

鏡の外縁と中央の穴の縁の高低差は

$$f(4.2) - f(1.15) \approx 0.014 [(4.2)^2 - (1.15)^2] \approx 0.23 \text{ m}.$$

次の2つの設問では、均一な質量分布をもつ大きさのある物体と質点の間の重力について、逆2乗則からのずれが現れる例を計算する。

問題 4.16 円盤 D は半径 R で全質量 M が均一に分布しており、密度は $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ である。この円盤を半径 x 、幅 dx の同心リングに切り分ける。リングの面積は $2\pi x dx$ であるから、質量は $2\pi\rho x dx$ となる。4章H節 Part1 の結論を用いると、リングの中心を通る軸上で中心 O から c の距離にある質点 m に加わる重力の大きさは $\frac{Gm(2\pi\rho x dx)c}{(c^2+x^2)^{3/2}}$ である (向きはリングの中心に向かう)。半径が $x = 0$ から R までの無数のリングからの重力を重ね合わせると (すべて同じ方向だから単純な和)、リング全体からの力は定積分で表すことができ

$$F = \int_0^R \frac{Gm(2\pi\rho)x dx c}{(x^2+c^2)^{3/2}} = Gmc \int_0^R \frac{2\pi \left(\frac{M}{\pi R^2}\right) x dx}{(x^2+c^2)^{3/2}} = G \frac{mMc}{R^2} \int_0^R \frac{x dx}{(x^2+c^2)^{3/2}}.$$

$\int_0^R \frac{x dx}{(x^2+c^2)^{3/2}}$ の計算は、 $u = x^2 + c^2$ とおくと $du = 2x dx$ だから、

$$\int_0^R \frac{x dx}{(x^2+c^2)^{3/2}} = \int_{c^2}^{R^2+c^2} u^{-3/2} du = \left[-2u^{-1/2}\right]_{c^2}^{R^2+c^2} = 2 \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\right]$$

となる。よって、

$$F = G \frac{mM}{R^2} \left[2 - \frac{2c}{\sqrt{R^2+c^2}}\right]$$

である。以下に示すように、 $R \rightarrow 0$ の極限では、2質点間の万有引力の式になる。

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2}{R^2} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{R^2+c^2}}\right) &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2}{R^2} \left(\frac{\sqrt{R^2+c^2}-c}{\sqrt{R^2+c^2}}\right) \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2}{R^2} \left(\frac{(R^2+c^2)-c^2}{\sqrt{R^2+c^2}(\sqrt{R^2+c^2}+c)}\right) \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}(\sqrt{R^2+c^2}+c)}\right) = \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

となり

$$F = G \frac{mM}{R^2}$$

となる。極限は $0/0$ の形なので、ロピタルの法則を用いて計算してもよい。

問題 4.17 均一な物質で中が充填された円筒の密度は $\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$ である。この円筒を多数の厚み dx の薄い円盤に切り分ける (図 4.34)。円盤の体積は $\pi R^2 dx$ であり、質量は $\pi R^2 dx \cdot \rho$ となる。質量 m の質点が円筒の軸上、注目する円盤の中心から距離 $c-x$ の位置にある。問題 4.16 の結論を用い、円盤が質点に及ぼす重力の大きさは

$$\begin{aligned} G \frac{2m(\pi R^2 dx \cdot \rho)}{R^2} \left(1 - \frac{c-x}{\sqrt{R^2+(c-x)^2}}\right) \\ = G \cdot 2m\pi \left(\frac{M}{\pi R^2 h}\right) dx \left(1 - \frac{c-x}{(R^2+(c-x)^2)^{1/2}}\right) \\ = G \frac{2mM}{R^2 h} \left(1 - \frac{c-x}{(R^2+(c-x)^2)^{1/2}}\right) dx \end{aligned}$$

である。これを $x = 0$ から $x = h$ まで寄せ集めると、円筒から質点に加わる力が求まる。力の向きは軸方向の引力である。

定積分によりこの力の大きさを書くと

$$\begin{aligned} F &= \int_0^h G \frac{2mM}{R^2 h} \left(1 - \frac{(c-x)}{\sqrt{R^2+(c-x)^2}}\right) dx \\ &= G \frac{2mM}{R^2 h} \int_0^h \left(1 + \frac{x-c}{\sqrt{R^2+(c-x)^2}}\right) dx \end{aligned}$$

である。ここで

$$\int_0^h \left(1 + \frac{x-c}{\sqrt{R^2+(c-x)^2}}\right) dx = h + \int_0^h \frac{x-c}{\sqrt{R^2+(c-x)^2}} dx$$

であるから、残りは $\int_0^h \frac{x-c}{\sqrt{R^2+(c-x)^2}} dx$ の計算である。積分変数を $u = x - c$ に変え

ると, $du = dx$ だから,

$$\int_0^h \frac{x-c}{\sqrt{R^2+(c-x)^2}} dx = \int_{-c}^{h-c} \frac{u}{\sqrt{R^2+u^2}} du$$

となる. さらに $v = R^2 + u^2$ とすると, $dv = 2udu$ だから

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{h-c} \frac{u}{\sqrt{R^2+u^2}} du &= \int_{R^2+c^2}^{R^2+(h-c)^2} \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} dv = \left[v^{\frac{1}{2}} \right]_{R^2+c^2}^{R^2+(h-c)^2} \\ &= \left(R^2 + (h-c)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(R^2 + c^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

以上を総合すると, 力の大きさは

$$F = G \frac{2mM}{R^2 h} \left[h - \left(R^2 + c^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(R^2 + (h-c)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

である. $R = Ah$ とおき円筒の縦横比を一定に保ったまま質点に近づける. まず

$$F = G \frac{2mM}{A^2 h^3} \left[h - \left(A^2 h^2 + c^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(A^2 h^2 + (h-c)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

ここで $h \rightarrow 0$ の極限を求めるとき

$$\frac{\left[h - \left(A^2 h^2 + c^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(A^2 h^2 + (h-c)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{A^2 h^3}$$

が $0/0$ の不定形となるのでロピタルの法則を用い, 分母と分子をそれぞれ 3 回 h について微分すると, 分母は $6A^2$ となり, 分子は

$$\begin{aligned} &1 - \frac{A^2 c}{\sqrt{A^2 h^2 + c^2}} + \frac{h + A^2 h - c}{\sqrt{(1+A^2)h^2 - 2hc + c^2}} \\ &\rightarrow \frac{A^4 h^2}{(A^2 h^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{A^2}{(A^2 h^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(h + A^2 h - c)^2}{((1+A^2)h^2 - 2hc + c^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1+A^2}{((1+A^2)h^2 - 2hc + c^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\rightarrow -\frac{3A^6 h^3}{(A^2 h^2 + c^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3A^4 h}{(A^2 h^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(h + A^2 h - c)^3}{((1+A^2)h^2 - 2hc + c^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3(1+A^2)(h + A^2 h - c)}{((1+A^2)h^2 - 2hc + c^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となり, $h \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{3(-c)^3}{(c^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3(1+A^2)(-c)}{(c^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{c^2} + \frac{3(1+A^2)}{c^2} = \frac{3A^2}{c^2}$$

となるので

$$\frac{\left[h - \left(A^2 h^2 + c^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(A^2 h^2 + (h-c)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{A^2 h^3} \rightarrow \frac{\frac{3A^2}{c^2}}{6A^2} = \frac{1}{2c^2}.$$

したがって, 円筒が質点とみなせるほど小さいとき

$$F = G \frac{mM}{c^2}$$

となり, 2 質点間の万有引力の法則に帰着する.

問題 4.18 月の赤道半径と極半径がそれぞれ $a = 1738.1$ km と $b = 1736.0$ km であ

るから, 体積は

$$V = \frac{4\pi}{3} a^2 b = \frac{4\pi}{3} \left(1738.1 \times 10^3 \right)^2 \left(1736 \times 10^3 \right) = 2.19679 \times 10^{19} \approx 2.197 \times 10^{19} \text{ m}^3,$$

また月の赤道バルジは

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{4\pi}{3} (a^2 b - b^3) = \frac{4\pi}{3} b (a^2 - b^2) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(1736 \times 10^3 \right) \left(\left(1738.1 \times 10^3 \right)^2 - \left(1736 \times 10^3 \right)^2 \right) \\ &= 5.30518 \times 10^{16} \approx 5.305 \times 10^{16} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

となり, 月の全体積の 1% のさらに 1/4 程度である.

問題 4.19 月の質量の推定値 7.35×10^{22} kg と問題 4.18 の結論を用いると, 月の平均密度は

$$\rho = \frac{7.35 \times 10^{22}}{2.19679 \times 10^{19}} \approx 3.35 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

となる. 4 章 H 節には, 地球の平均密度が 5.51×10^3 kg/m³ であることを紹介した.

第5章

問題 5.1 図 5.16 に xy 軸を入れたのが図 S5.1 である.

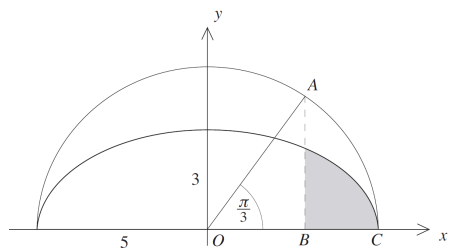


図 S5.1

半径 5 の扇型 OAC の中心角が $\frac{\pi}{3}$ であり、この部分の面積は $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} \cdot 5^2) = \frac{25\pi}{6}$ となる。点 B の x 座標は $x = 5 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{5}{2}$ 。この円は $x^2 + y^2 = 5^2$ で表されるので、円の上半分は

$$f(x) = \sqrt{5^2 - x^2}$$

のグラフである。

$$AB = f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{100 - 25}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

を用いると、半円の下側の区間 BC の面積は、扇型 OAC から $\triangle OAB$ を引き去った部分の面積に等しく

$$\frac{25\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 25 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

となる。定積分によりこの面積を表すと

$$\int_{\frac{5}{2}}^5 \sqrt{5^2 - x^2} dx = 25 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

である。楕円は $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ であり、楕円の上半分は $g(x) = \frac{3}{5} \sqrt{5^2 - x^2}$ のグラフである。したがって求める面積は

$$\int_{\frac{5}{2}}^5 \frac{3}{5} \sqrt{5^2 - x^2} dx = \frac{3}{5} 25 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = 15 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \approx 4.61.$$

問題 5.2

i) P_0 が円周上にありその y 座標が 4 だから x 座標 (点 X の x 座標と共通) は

$x^2 + 4^2 = 5^2$ から決まる。 $x^2 = 25 - 16 = 9$, $x = \pm 3$. P_0 が第 1 象限にあるとき, $x = 3$. $\beta = \sin^{-1} \frac{4}{5} \approx 0.9273 \approx 53.13^\circ$.

ii) 楕円の中心から焦点までの距離は $c = 2$ である。短軸は $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{21}$. 楕円の式は $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ となる。 P の x 座標が 3 だから, $\frac{3^2}{5^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{21})^2} = 1$ の正の

解は, $y = \sqrt{21} \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \sqrt{21}$.

iii) 扇型 OP_0Q の面積は $\frac{1}{2} \beta \cdot 5^2 = \frac{25}{2} \beta$. 問題 5.1 と同様に, 円弧の下側の図形 XP_0Q の面積は

$$\int_3^5 \sqrt{5^2 - x^2} dx = \frac{25}{2} \beta - \frac{1}{2} 3 \cdot 4 = \frac{25}{2} \beta - 6.$$

これに楕円の半長軸と短半軸の比を乗じると, 対応する楕円の部分 XPQ の面積

$$\frac{\sqrt{21}}{5} \int_3^5 \sqrt{5^2 - x^2} dx = \frac{\sqrt{21}}{5} \left(\frac{25}{2} \beta - 6 \right)$$

を得る。これに三角形 FXP の面積を加えると求める図形 FPQ の面積が求まる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (3 - 2) \cdot \left(\frac{4}{5} \sqrt{21} \right) + \frac{\sqrt{21}}{5} \left(\frac{25}{2} \beta - 6 \right) &= \sqrt{21} \left(\frac{4}{10} + \frac{5}{2} \beta - \frac{6}{5} \right) \\ &= \sqrt{21} \left(\frac{5}{2} \beta - \frac{4}{5} \right) \approx 6.96. \end{aligned}$$

問題 5.3 図 S5.2 は P の位置が第 1 と第 4 象限であることを除いて図 5.3 と同じであり, P の x 座標 $x(t)$ は正である。図には外接円の (P に対応する) 点 P_0 および角 $\beta(t)$ も描いた。5 章 B 節で扱った場合と同様に, 距離 OS は楕円の中心と焦点の距離, $c = \epsilon a$, $a^2 = b^2 + c^2$ である。

[$r(t)$ と $\beta(t)$ の関係] 第 1 象限に P があるとき $x(t) > 0$ を念頭に

$$r^2 = (a\epsilon - x)^2 + y^2 = (a\epsilon)^2 - 2a\epsilon x + x^2 + y^2 = (a\epsilon)^2 - 2a\epsilon x + x^2 + \frac{b^2}{a^2} y_0^2.$$

点 P_0 が半径 a の円周上にあり $x^2 + y_0^2 = a^2$ だから,

$$\begin{aligned} r^2 &= (a\epsilon)^2 - 2a\epsilon x + x^2 + \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) = (a\epsilon)^2 + b^2 - 2a\epsilon x + x^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \\ &= a^2 - 2a\epsilon x + x^2 - x^2 + \epsilon^2 x^2 \\ &= (a - \epsilon x)^2. \end{aligned}$$

$a \geq x \geq \epsilon x$ だから $a - \epsilon x > 0$, よって

$$r = a - \epsilon x.$$

これに $x = a \cos \beta$ を代入して

$$r = a(1 - \epsilon \cos \beta)$$

を得る。

第 4 象限に P があるとき, y と y_0 の符号が反転するが, 上の議論に変更はなく同じ

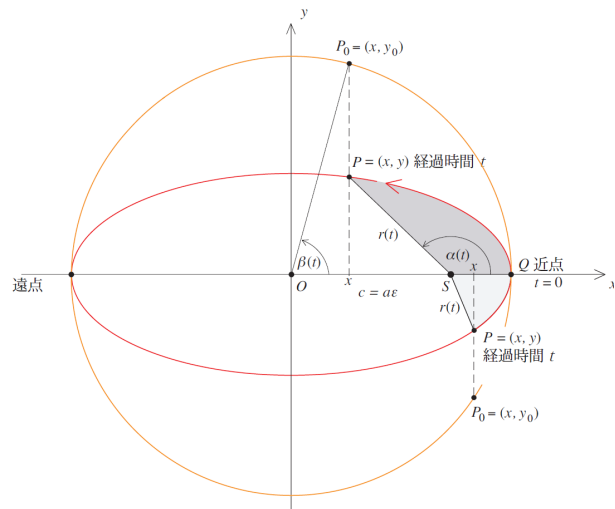


図 S5.2

$r = a(1 - \varepsilon \cos \beta)$ を得る.

[ガウスの式] 第1象限に P があるとき ($\cos \alpha$ が正の場合と負の場合があるが、いずれも)

$$\cos \alpha = \frac{x - a\varepsilon}{r} = \frac{x - a\varepsilon}{a(1 - \varepsilon \cos \beta)} = \frac{\cos \beta - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \beta}$$

となる.

第4象限に P があるときも全く同様の関係となる. ここから先の式変形は, 三角関数の恒等式

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

にだけ依存するので, 教科書の式導出がそのまま利用でき,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \tan \frac{\beta}{2}$$

を得る.

問題 5.4 図 5.18 を見ると, P が近日点 ($t = 0$) から遠日点 ($t = \frac{T}{2}$) への移動中は, $r(t)$ が増加する. 一方, 遠日点 ($t = \frac{T}{2}$) から次の近日点 ($t = T$) への移動中は減少する. $\frac{dr}{dt} = a\varepsilon(\sin \beta)\beta'$ において, P は反時計回りの運動なので, β は時間の増加関数であり $\beta' > 0$ だから, $\frac{dr}{dt}$ と $\sin \beta$ の符号が同じである. P が第1,2象限 ($0 \leq t \leq \frac{T}{2}$) にあるとき $\sin \beta \geq 0$ だから $\frac{dr}{dt} \geq 0$ であり $r(t)$ は単調に増加する. P が第3,4象限 ($\frac{T}{2} \leq t \leq T$) にあるとき $\sin \beta \leq 0$ だから $\frac{dr}{dt} \leq 0$ であり $r(t)$ は単調に減少する.

問題 5.5 $\cos \alpha = \frac{\cos \beta - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \beta}$ を $\cos \beta$ について解く.

$$\cos \beta - \varepsilon = \cos \alpha (1 - \varepsilon \cos \beta) = \cos \alpha - \cos \alpha (\varepsilon \cos \beta)$$

より,

$$\cos \beta (1 + \varepsilon \cos \alpha) = \varepsilon + \cos \alpha$$

となり,

$$\cos \beta = \frac{\varepsilon + \cos \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha}$$

を得る. これを $r = a(1 - \varepsilon \cos \beta)$ に代入すると

$$r = a \left(1 - \varepsilon \frac{\varepsilon + \cos \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \right) = a \frac{1 + \varepsilon \cos \alpha - \varepsilon^2 - \varepsilon \cos \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \alpha}.$$

よって,

$$r(\alpha) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \alpha}$$

を得る.

問題 5.6 $\varepsilon = 0$ のとき $a = b$ を半径とする円が P の軌道であり, 図 5.4 の円と楕円が一致し, 焦点 S は中心 O に一致する. その結果, $r(t) = a$, $\alpha(t) = \beta(t)$ となり, $\varepsilon = 0$ によりケプラー方程式は

$$\alpha(t) = \frac{2\pi}{T} t$$

となる.

$t = 0$ から t までの間に P が軌道上を移動する距離を $d(t)$ とする. この時間に掃く中心角はケプラー方程式から $\alpha(t) = \frac{2\pi}{T} t$, 軌道が円であるから (ラジアン の定義により) $\alpha(t) = \frac{d(t)}{a}$, したがって

$$d(t) = \frac{2\pi a}{T} t$$

となる. 円軌道だから距離 SP は常に一定であり, P の (瞬間の) 速さは平均の速さ

$$\frac{d(t)}{t} = \frac{2\pi a}{T}$$

と一致する. 5章D節の楕円軌道のときの速さの式 $v(t) = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{2a}{r(t)} - 1}$ に $r(t) = a$ を代入すると同じ結果になる.

問題 5.7 $\beta = 0$ と 2π が近日点, $\beta = \pi$ が遠点の位置である. これらの値をケプラー方程式に代入して対応する t を求めると, $t = 0$ と $t = T$ が近日点, $t = \frac{T}{2}$ が遠点である. 近日点から遠点へは $\frac{T}{2} - 0 = \frac{T}{2}$, 遠点から近日点へは $T - \frac{T}{2} = \frac{T}{2}$ となる.

問題 5.8

i) P が楕円軌道の「頂上 (y 軸上)」にあるとき (図 5.3 の記号を用いて)

$$A(t) = \frac{1}{4} ab\pi - \frac{1}{2} a\varepsilon b = \frac{1}{4} ab(\pi - 2\varepsilon)$$

である. 面積速度一定の法則から, $\kappa = \frac{A(t)}{t} = \frac{ab\pi}{T}$ となるので,

$$t = \frac{A(t)}{\kappa} = \frac{A(t)T}{ab\pi} = \frac{ab(\pi - 2\varepsilon)T}{4ab\pi} = \frac{T}{4} - \frac{T\varepsilon}{2\pi}$$

となる。図 5.4 から、 P が ($t = 0$ で近日点から出発し) 軌道を $1/4$ 周し $\beta(t) = \frac{\pi}{2}$ となる時刻において、ケプラー方程式は

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon = \frac{2\pi}{T}t$$

となるから

$$t = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{4} - \frac{T\varepsilon}{2\pi}$$

距離 PS は楕円の「頂上」と焦点の距離、すなわち長半径 a に等しい。

ii) 表 5.1 にある地球の軌道周期と離心率を用いて、

$$t = \left(\frac{T}{4} - \frac{\varepsilon T}{2\pi}\right) = \left(\frac{1.0000264}{4} - \frac{(1.0000264)(0.01671123)}{2\pi}\right) \approx 0.2473468 \text{ 年.}$$

あるいは $(0.2473468) \cdot 365.25 = 90.3434$ 日。ちなみに次の $1/4$ 周に要する時間は

$$\frac{T}{2} - \left(\frac{T}{4} - \frac{\varepsilon T}{2\pi}\right) = \frac{1.0000264}{2} - 0.2473468 = 0.2473468 \text{ 年.}$$

あるいは $(0.2526664) \cdot 365.25 \approx 92.2864$ 日。面積速度一定の法則から、太陽から離れているときのほうが動きは遅いことが分かるが、それと整合する結果である。

ハレー彗星については、表 5.1 のデータから

$$t = \left(\frac{T}{4} - \frac{\varepsilon T}{2\pi}\right) = \left(\frac{75.32}{4} - \frac{(75.32)(0.967)}{2\pi}\right) \approx 7.24 \text{ 年.}$$

iii)

$$\frac{\frac{T}{4} - \frac{T\varepsilon}{2\pi}}{\frac{T}{2}} = \left(\frac{T}{4} - \frac{T\varepsilon}{2\pi}\right) \left(\frac{2}{T}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\pi}$$

ε が 1 に近いとき (表 2.8 を見ると多くの有名な彗星が 1 に近い離心率を持つ)、

$$\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\pi} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \approx 0.18 \approx \frac{1}{5}$$

ハレー彗星に関する ii) の結果はこれと整合するかを確認せよ。

問題 5.9 表 5.1 より金星の軌道周期を $T = 0.615203$ 年 = 224.703 日、離心率を $\varepsilon = 0.00678$ とする。題意の角に対応する時間 (日数) を t_1, t_2, t_3 とすると、 $\alpha(t_1) = \frac{\pi}{6}$, $\alpha(t_2) = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha(t_3) = \pi$ である。図 5.18 をみると、ただちに $t_3 = \frac{T}{2} = \frac{224.703}{2} \approx 112.35$ 日である。

ガウスの式を $\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan \frac{\alpha}{2}$ と書き直し、 α の値を代入すると、

$$\tan \frac{\beta(t_1)}{2} = \sqrt{\frac{1-0.00678}{1+0.00678}} \tan \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{0.99322}{1.00678}} \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57345,$$

$$\tan \frac{\beta(t_2)}{2} = \sqrt{\frac{1-0.00678}{1+0.00678}} \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{0.99322}{1.00678}} \sqrt{3} = 1.72035.$$

関数電卓の \tan^{-1} ボタンを押して $\frac{\beta}{2}$ をもとめ 2 倍すると、

$$\beta(t_1) = 1.04134, \quad \beta(t_2) = 2.08851.$$

となり、これらをケプラー方程式に渡し

$$\frac{2\pi t_1}{T} = \beta(t_1) - \varepsilon \sin \beta(t_1) = 1.04134 - 0.00678 \sin 1.04134 = 1.03548,$$

$$\frac{2\pi t_2}{T} = \beta(t_2) - \varepsilon \sin \beta(t_2) = 2.08851 - 0.00678 \sin 2.08851 = 2.08262.$$

したがって

$$t_1 = \frac{(1.03548)(224.703)}{2\pi} = 37.0316 \approx 37.032 \text{ 日,}$$

$$t_2 = \frac{(2.08262)(224.703)}{2\pi} = 74.4799 \approx 74.480 \text{ 日.}$$

金星は最初の 60° を 37.032 日、次の 60° を $t_2 - t_1 = 37.4483 \approx 37.448$ 日、その次の 60° を $t_3 - t_2 = 37.8711 \approx 37.871$ 日かけて回転する。

問題 5.10 ハレー彗星の軌道と地球軌道が同一平面上にあると仮定している。両者の太陽をまわる公転の向きが互いに逆である。表 5.1 から、ハレー彗星の軌道長半径、離心率、周期がそれぞれ $a = 17.8341$ au, $\varepsilon = 0.967143$, $T = 75.32$ 年である。したがって $c = a\varepsilon = 17.2481$ au, 短半径 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4.534$ au, 近日点距離は $a - c = 0.586743$ au.

i) 地球軌道は、中心が $(c, 0)$ 、半径が 1 au の円だから $(x - c)^2 + y^2 = 1$ 。ハレー彗星の軌道の式は、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。2 式を連立して y を消去する。

$$\begin{aligned} 1 &= (x - c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \\ &= x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2 \\ &= \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 = (a - \varepsilon x)^2. \end{aligned}$$

$a > x > \varepsilon x$ なので $a - \varepsilon x > 0$ となり、 $a - \varepsilon x = 1$ を得る。すなわち

$$x = \frac{a-1}{\varepsilon}.$$

交点の y 座標は $(x - c)^2 + y^2 = 1$ を使い、 $y^2 = 1 - \left(\frac{a-1}{\varepsilon} - c\right)^2$ 。したがって

$$y = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a-1}{\varepsilon} - c\right)^2}.$$

数値を代入して計算すると、交点の座標は単位を au として $(17.4068, \pm 0.9875)$ となる。ハレー彗星の軌道の通径より近日点側になることに注意。

ii) ハレー彗星が H_1 を通過してから近日点通過までの時間を t とする。 H_1 は地球軌道上の点でもあるから、 S から H_1 までの距離は $r(t) = 1$ である。図 5.3 と図 5.19

の記号を用い、 $\sin(\pi - \alpha(t)) = \frac{0.9875}{1} = 0.9875$.

関数電卓のサインの逆関数を用いて計算すると $\pi - \alpha(t) = \sin^{-1} 0.9875 \approx 1.4125$ であり、 $\alpha = \pi - 1.4125 = 1.7291$.

ガウスの式により

$$\tan \frac{\beta(t)}{2} \approx \sqrt{\frac{1 - 0.967143}{1 + 0.967143}} \tan \frac{1.7291}{2} \approx 0.1514.$$

関数電卓を用いて $\beta(t) = 0.3007$. ケプラー方程式から

$$\frac{2\pi t}{T} = 0.3007 - 0.967143 \sin 0.3007 \approx 0.0142.$$

したがって

$$t = 0.0142 \frac{75.32}{2\pi} \approx 0.171 \text{ 年.}$$

あるいは 62.4 日である. 求める時間はその 2 倍, 約 125 日となる.

iii) i 番目の逐次近似における誤差は不等式 $|\beta(t) - \beta_i| < \epsilon^i$ から見積もられる. $\epsilon^i < 0.0002$ となる最小の i を求める. $\epsilon < 0.9672$ だから, $\epsilon^{28} = \epsilon^{256} \approx 0.00019$ ($\epsilon^{254} \approx 0.00020$), 256 回目まで目的の精度に達する.

iv) 火星, 木星, 土星, 天王星, 海王星の軌道長半径は au を単位として 1.52, 5.20, 9.54, 19.2, 30.1 である (表 5.1 からデータを変換). 天王星と海王星を図に描き込むには, 図 5.19 の左側にさらに 13 cm 以上スペースを確保する必要がある. 惑星軌道と有名な彗星軌道のシミュレーション (3D) を次のサイトで見ることができる.

<https://theskylive.com/3dsolarsystem?objs=halley&date=1910-09-08&h=00&m=50&>

問題 5.11

i) 表 5.1 から水星の離心率は $\epsilon = 0.20563593 < 0.20564$, $\epsilon^6 \approx 0.00007562$, $\epsilon^7 \approx 0.00001555$, $\epsilon^8 \approx 0.00000320$. β_i の計算値の「小数点以下 5 桁目を四捨五入で丸めた数値の 4 桁目が真の数値と一致する」ためには,

$$|\beta - \beta_i| < 0.5 \times 10^{-5}$$

となる必要があるので $i = 7$ である. このときの β_7 と 8 回目の近似で得た β_8 の差は

$$\begin{aligned} |\beta_8 - \beta_7| &= |(\beta_8 - \beta) - (\beta_7 - \beta)| = |(\beta_8 - \beta) + (\beta - \beta_7)| \\ &\leq |\beta_8 - \beta| + |\beta - \beta_7| < \epsilon^7 + \epsilon^8 \approx 0.00001875 < 0.00002 \end{aligned}$$

となり, 小数点以下 4 桁のところでは値の変動はない.

ii) β の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めるが, β の 1 の位が 0 でない可能性があるので, β は有効数字 5 桁で計算する必要がある, そのためには入力するデータは (引き算による桁落ちがない限り) 有効数字 6 桁を要求される. $\epsilon = 0.205636$, $T = 0.240849$ 年 $= (0.240849)(365.25) = 87.9701$ 日. (6 桁の精度があるとして) $t=20$ 日についてケプラー方程式を逐次近似で解く.

$$\beta_1 = \frac{2\pi t}{T} = 1.42844, \quad \beta_2 = \frac{2\pi t}{T} + (0.240849) \sin(1.42844) = 1.63200,$$

$$\beta_3 = 1.63369, \quad \beta_4 = 1.63367, \quad \beta_5 = 1.63367, \dots$$

したがって $\beta(20 \text{ 日}) = 1.63367 \approx 1.6337$ を得る (約 93.60°).

問題 5.8 の結果を用いると, 水星が近日点から出発して軌道を $1/4$ 周する日数は

$$t = \frac{T}{4} - \frac{T\epsilon}{2\pi} = \frac{87.9701}{4} - \frac{(87.9701)(0.205636)}{2\pi} = 19.1134 \text{ 日} \approx 19.113 \text{ 日}$$

であるから, 20 日の時点では $1/4$ 周よりわずかに先に進んでいる.

iii) 5 章 B 節の式 $r(t) = a(1 - \epsilon \cos \beta(t))$ にデータを代入すると,

$$r(20 \text{ 日}) = (5.7909 \times 10^7)(1 - (0.205636) \cos(1.63367)) = 5.8658 \times 10^7 \text{ km.}$$

α を近日点通過後の最初の周回中として ($n_t = 0$ とおいて)

$$\alpha(t) = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan \frac{\beta(t)}{2} \right)$$

を用いると

$$\alpha(t) = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+0.205636}{1-0.205636}} \tan \frac{1.63367}{2} \right) = 1.83905 \approx 1.8391 \approx 105.4^\circ.$$

問題 5.12 脚注の「国立天文台/暦計算/暦象年表/天象データベース」から, たとえば 2021 年の近日点および遠日点通過はそれぞれ 2021/01/02, 22:51, 2021/07/06, 07:27 (日本標準時). 経過時間を計算するには, たとえば

<https://keisan.casio.jp/exec/system/1356066502>

などを利用できる.

1) 経過時間の計算. 現在時刻をたとえば 2021/04/25, 18:05 とする. 近日点通過から現在までの経過時間は, $t = 112 \text{ 日 } 19 \text{ 時間 } 14 \text{ 分} = 112.8014 \text{ 日}$.

2) $r(t) = a(1 - \epsilon \cos \beta(t))$ は近日点距離と遠日点距離の間で変化しその相対的な変化は数%しかない ($2\epsilon \approx 3\%$). そこで, さらに小さな変動に注目しよう. すなわち $r(t)$ を有効数字 5 桁で求めることにする. そのため, β を有効数字 5 桁で収束させ $\beta(t) = 1.9559$, 軌道長半径を $a = 1.49598262 \times 10^8 \approx 1.49598 \times 10^8 \text{ km}$, 離心率を $\epsilon = 0.01671123 \approx 0.0167$ と近似して用いる.

$$\begin{aligned} r(t) &= a(1 - \epsilon \cos \beta(t)) = 1.49598 \times 10^8 (1 - 0.0167 \cos 1.9559) \\ &= 1.5054 \times 10^8 \text{ km.} \end{aligned}$$

ガウスの式から

$$\alpha(t) = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{\beta(t)}{2} = 1.940.$$

また

$$v(t) = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{2a}{r(t)} - 1} \approx 29.60 \text{ km/sec}$$

および

$$\gamma(t) = \pi - \sin^{-1} \left(\frac{a\sqrt{1-\epsilon^2}}{\sqrt{r(t)(2a-r(t))}} \right) \approx 1.59.$$

問題 5.13 楕円軌道を運動する天体のケプラー方程式 $\beta(t) - \epsilon \sin \beta(t) = \frac{2\pi t}{T}$ を考える ($\epsilon < 1$). ただし t は近日点通過後の時間である. 注目する時刻 t における平均近点離角 $\beta_1 = \frac{2\pi}{T}$ を初期値として逐次近似によりケプラー方程式を解く. すなわち $\beta_{i+1} = \beta_1 + \epsilon \sin \beta_i$ により逐次計算される数列 $\{\beta_i\}$ は真の解に収束し, β_i の誤差の程度は $|\beta(t) - \beta_i| \leq \epsilon^i$ で見積もられる.

この議論は数学的帰納法により保証されている. それは「正の整数 i を使った命題 S_i があり, S_1 が正しいことを証明し, さらに S_i が正しいければ S_{i+1} が正しいことを証明できれば, 任意の i に対して S_i は正しい」という論法である. すなわち, まず $|\beta(t) - \beta_1| \leq \epsilon$ を示し, つぎに $|\beta(t) - \beta_i| \leq \epsilon^i$ を仮定すると $|\beta(t) - \beta_{i+1}| \leq \epsilon^{i+1}$ が成り立つことを言えばよい.

その実行に移る.

$$|\beta(t) - \beta_1| = \left| \left(\frac{2\pi t}{T} + \epsilon \sin \beta(t) \right) - \frac{2\pi t}{T} \right| = |\epsilon \sin \beta(t)| \leq \epsilon$$

であるから, 証明の第一段階が完成. つぎに

$$\begin{aligned} |\beta(t) - \beta_{i+1}| &= \left| \left(\frac{2\pi t}{T} + \epsilon \sin \beta(t) \right) - (\beta_1 + \epsilon \sin \beta_i) \right| = |\epsilon \sin \beta(t) - \epsilon \sin \beta_i| \\ &= \epsilon |\sin \beta(t) - \sin \beta_i| \end{aligned}$$

となるので,

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

が正しいなら

$$|\beta(t) - \beta_{i+1}| = \epsilon |\sin \beta(t) - \sin \beta_i| \leq \epsilon |\beta - \beta_i| \leq \epsilon \cdot \epsilon^i = \epsilon^{i+1}.$$

最後の不等号に数学的帰納法の仮定を用いた. こうして,

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

を証明すれば, 任意の i について

$$|\beta(t) - \beta_i| \leq \epsilon^i$$

が証明される.

$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$ の証明には, 平均値の定理を用いるとよい. $\sin x$ は微分可能だから

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} = \left[\frac{d}{dx} \sin x \right]_{x_3} = \cos x_3$$

となる ($x_1 < x_3 < x_2$) が存在する. この式の両辺の絶対値をとると, $|\cos x_3| \leq 1$ だから $\left| \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} \right| \leq 1$, よって

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

が証明された.

問題 5.14 ケプラー方程式 $\beta(t) - \epsilon \sin \beta(t) = \frac{2\pi t}{T}$ を, t, ϵ, T を定数として $\beta(t)$ について解きたい (ただし $0 \leq \epsilon < 1$). 言い換えると, 関数 $f(x) = x - \epsilon \sin x - \frac{2\pi t}{T}$ について $f(x_0) = 0$ となる x_0 を求めたい. $f'(x) = 1 - \epsilon \cos x > 0$ だから $f(x)$ は増加関数であり, $f(x_0) = 0$ となる x_0 は必ず 1 個あり, 1 個しかないので, x_0 を見つけたら, それがケプラー方程式の解 $\beta(t)$ である. ケプラー方程式をニュートン-ラフソン法で解くときは, 逐次近似の漸化式

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \frac{f(\beta_i)}{f'(\beta_i)} = \beta_i - \frac{(\beta_i - \epsilon \sin \beta_i) - \frac{2\pi t}{T}}{1 - \epsilon \cos \beta_i}$$

に従い, 適宜与えた初期値から数列 β_i を発生する. この方法は関数のグラフに $x = \beta_1$ で接線を引きその接線と x 軸の交点を β_2 とし, 今度は $x = \beta_2$ で接線を引きその接線と x 軸の交点を β_3 とし... という作業を続けている.

具体例として $\epsilon = \frac{1}{2}$ の場合の

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{2\pi t}{T}$$

のグラフを描く. 図 (a) と (b) では $t = 1.1T$ すなわち $f(x) = x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{11}{5}\pi$ である (他の t ならばこのグラフを上下にシフトすればよい).

逐次近似

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \frac{(\beta_i - \frac{1}{2} \sin \beta_i) - \frac{11}{5}\pi}{1 - \frac{1}{2} \cos \beta_i}$$

を進める. (a) は単調に (b) は振動して収束する. これは接線を引く位置で関数の凹凸 (2 次微分の符号), 接線の傾き, 関数値等の条件による. 図 (c) と (d) は定数項の値が異なる場合である. (c) では極めて速やかに収束するが, (d) は収束しない場合である. これらの例では, 関数の定数項の値と初期値が連動しているが, そうする必要はなく, 概略のグラフから収束がより速いと推定する初期値を選べばよい.

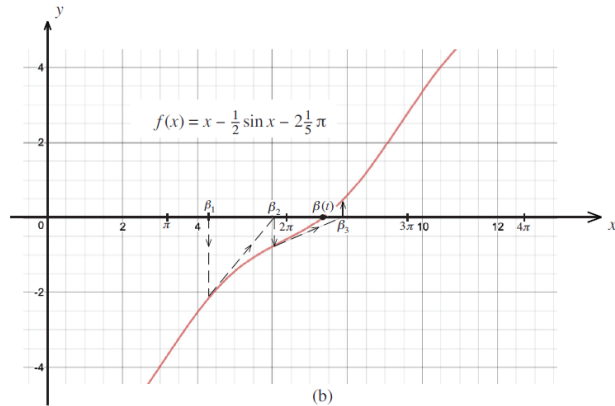
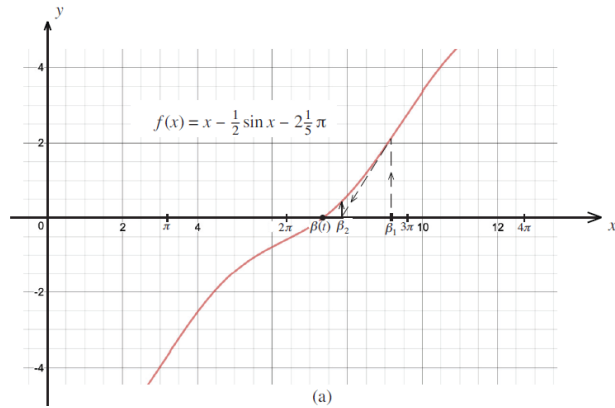
問題 5.15 地球軌道の離心率は $\epsilon = 0.016711$, $t = 170.000046$ 日 に対して

$$\beta_1 = \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi(170.000046)}{365.259636} = 2.924336$$

を初期推定値として, ニュートン-ラフソン法により

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \beta_1 - \frac{f(\beta_1)}{f'(\beta_1)} = \beta_1 - \frac{\beta_1 - \epsilon \sin \beta_1 - \frac{2\pi t}{T}}{1 - \epsilon \cos \beta_1} \\ &= 2.924336 - \frac{2.924336 - (0.016711) \sin(2.924336) - 2.924336}{1 - (0.016711) \cos(2.924336)} \\ &= 2.9278799. \end{aligned}$$

最終桁を丸めて $\beta_2 = 2.927880$. 1 回の計算で求める値に到達している.



問題 5.16 先にヒントの内容を確認する. 不定積分 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ は $x = a \sin \theta$ により置換積分. $dx = a \cos \theta d\theta$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a \int \sqrt{1 - \sin^2 \theta} a \cos \theta d\theta = a^2 \int \cos^2 \theta d\theta.$$

したがって

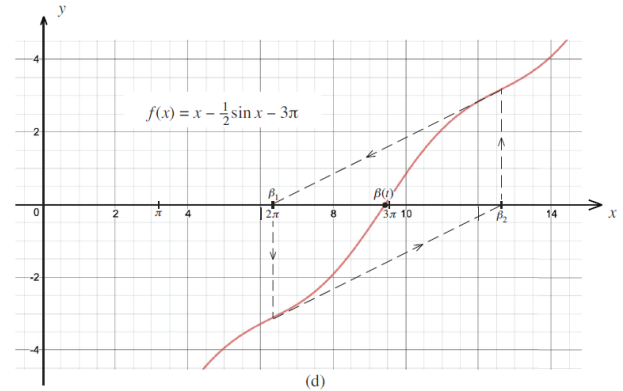
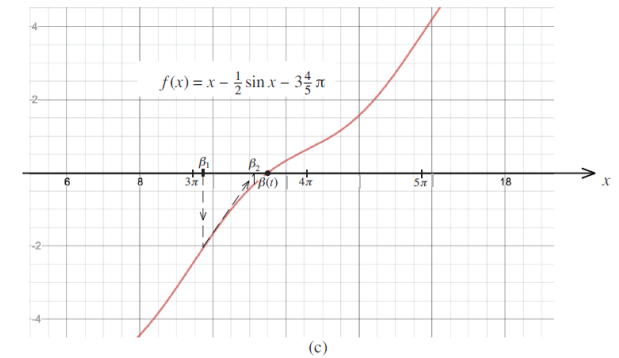
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{a^2}{2} (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) + C.$$

これを x の式に戻すには $\theta = \sin^{-1} \frac{x}{a}$, また $\cos \theta = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ より

$$\frac{1}{2} \sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta = \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \left(\sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$



題意の定積分は、この不定積分に与えられた上端と下端を代入し

$$\begin{aligned} \int_{x(t)}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left[\frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \right]_{x(t)}^a \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{x(t)}{a} \right) \right) - \frac{x(t)}{2} \sqrt{a^2 - x(t)^2} \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta(t) \right) \right) - \frac{x(t)}{2} \sqrt{a^2 - x(t)^2} \\ &= \frac{1}{2} a^2 \beta(t) - \frac{1}{2} x(t) y_0(t). \end{aligned}$$

問題 5.17 5章D節の式, $\sin \gamma(t) = \frac{a\sqrt{1-\epsilon^2}}{\sqrt{r(t)(2a-r(t))}}$ から, $r(t_1) = r(t_2)$ のとき

$$\sin \gamma(t_1) = \sin \gamma(t_2).$$

また $r(t_1) + r(t_2) = 2a$ のとき,

$$\sin \gamma(t_1) = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{r(t_1)(2a-r(t_1))}} = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{r(t_2)(2a-r(t_2))}} = \sin \gamma(t_2)$$

となつて、やはり $\sin \gamma(t_1) = \sin \gamma(t_2)$.

逆に $\sin \gamma(t_1) = \sin \gamma(t_2)$ のとき、 $r(t_1)(2a-r(t_1)) = r(t_2)(2a-r(t_2))$ となる。この式の両辺から a^2 を引くと

$$(a-r(t_1))^2 = (a-r(t_2))^2$$

となるので、

$$r(t_1) = r(t_2) \quad \text{または} \quad r(t_1) + r(t_2) = 2a$$

を得る。

[P が近点あるいは遠点を通過するとき] $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi$.

[P が近点と遠点のいずれにもないとき] サイン関数のグラフを見ると、 $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \pi$ のとき、 $\sin \gamma_1 = \sin \gamma_2$ ならば $\gamma_1 = \gamma_2$ あるいは $\frac{\pi}{2} - \gamma_1 = \gamma_2 - \frac{\pi}{2}$ (すなわち $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi$) である。

t_1 と t_2 の両方で P が楕円軌道の上半分 ($\gamma > \frac{\pi}{2}$) にあるなら、 $\gamma_1 = \gamma_2$ となる可能性があるが、(2つの γ がともに $\pi/2$ より大きいので) $\gamma_1 + \gamma_2 \neq \pi$.

t_1 が楕円軌道の上半分 ($\gamma > \frac{\pi}{2}$)、 t_2 が下半分 ($\gamma < \frac{\pi}{2}$) にあるとき、 $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi$ となる可能性があるが $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

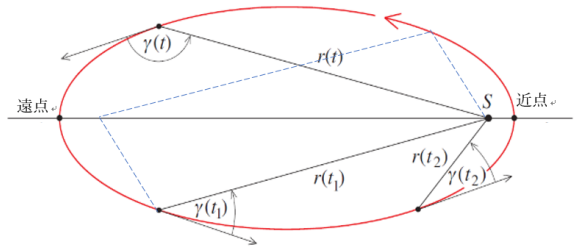


図 S5.3

楕円の幾何学的性質を知っていると、式を用いなくても状況を理解できる。2焦点から楕円上の任意の点までの距離の和が常に $2a$ である。そこで楕円に内接する平行四辺形を考察する。平行四辺形の一方の対角線の両端を2つの焦点とし、他方の対角線が楕円の中心を通るとき、平行四辺形の隣り合う辺が題意を満たす r_1 および r_2 となる。なぜなら、図形の対称性から題意の諸性質が分かる。

問題 5.18 関数 $f(r) = \frac{b}{\sqrt{r(2a-r)}}$ は、数学の関数として(変数 r が楕円軌道上の天体と焦点にある太陽の距離という意味から生じる制限を無視して)、平方根の中が正かつ分母が0とならぬよう、定義域は $0 < r < 2a$ とするのが自然である。しかし、距

離 r の最小値は近日点距離 $a(1-\varepsilon)$ 、最大値は遠日点距離 $a(1+\varepsilon)$ であるから、 γ の計算に現れる関数 $f(r)$ の定義域は $0 < a(1-\varepsilon) \leq r \leq a(1+\varepsilon) < 2a$ である(両脇の0と $2a$ の不等号は単なるメモ)。

関数の微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} b(r(2a-r))^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2} b(r(2a-r))^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dr} (r(2a-r)) \\ &= -\frac{b}{2} (r(2a-r))^{-\frac{3}{2}} (2a-2r) = \frac{-b(a-r)}{(r(2a-r))^{\frac{3}{2}}} . \end{aligned}$$

となる。 $f'(r)$ の分母は常に正だから、 $a(1-\varepsilon) \leq r < a$ において $f'(r) < 0$ すなわち減少関数となり、 $a < r \leq a(1+\varepsilon)$ において $f'(r) > 0$ すなわち増加関数となる。したがって

$$f(a) = \frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

が最小値である。区間の端の値

$$f(a-a\varepsilon) = \frac{b}{\sqrt{(a-a\varepsilon)(a+a\varepsilon)}} = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1$$

と

$$f(a+a\varepsilon) = \frac{b}{\sqrt{(a+a\varepsilon)(a-a\varepsilon)}} = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1$$

すなわち1が最大値となる。したがって、

$$0 < \sqrt{1-\varepsilon^2} \leq f(r) \leq 1$$

となる。

i) $\sin^{-1} x$ の定義域は、サイン関数の値域となり、閉区間 $[-1, 1]$ である。 $\gamma = \sin^{-1} f(r)$ において $0 < f(r) \leq 1$ であることに注意。サイン関数が単調に増加する(原点を含む)区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を $\sin^{-1} x$ の主値として採用すると、 $\sin^{-1} x$ も単調増加関数である。

ii) $\gamma = \sin^{-1} f(r)$ の「 r を変数とする」増加減少は($f(r)$ が単調増加関数だから) $f(r)$ の増加減少と同期する。 $\gamma = \sin^{-1} f(r)$ は図 5.6 の楕円の下側を、 P の進行方向とは逆に、 r を近日点 $a(1-\varepsilon)$ から遠日点 $a(1+\varepsilon)$ まで増加させる場合の γ である。関数値の最大・最小は変数の変化の向きに依存しない。区間の両端で関数値は1となり $\gamma = \frac{\pi}{2}$ で最大。最小値は $r = a$ すなわち $\beta = \frac{3\pi}{2}$ の位置であり、角の最小値が $\gamma = \sin^{-1} \sqrt{1-\varepsilon^2}$ になる。楕円の上側を近日点から遠日点まで移動するとき、 $\gamma = \pi - \sin^{-1} f(r)$ であり、区間の両端で関数値は1となり $\gamma = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ で最小。最大値は $r = a$ すなわち $\beta = \frac{\pi}{2}$ の位置であり、角の最大値が $\gamma = \pi - \sin^{-1} \sqrt{1-\varepsilon^2}$ になる。

問題 5.19 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ のグラフの上半分を表す関数は $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ である。直交座標系で曲線の長さを表す定積分を用い楕円の全周は $4 \int_0^a \sqrt{1+f'(x)^2} dx$ となる(楕円の対称性を用いた)。

$$f'(x) = -\frac{b}{a}x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{と} \quad a^2 - b^2 = c^2 = \varepsilon^2 a^2$$

から,

$$\begin{aligned} 1 + f'(x)^2 &= 1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)} \\ &= \frac{a^2 - a^2 \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

となる.

変数変換 $x = a \sin \theta$ により積分変数を θ に置換すると $dx = a \cos \theta d\theta$, また x の区間 $[0, a]$ を θ の区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ にあてると,

$$\begin{aligned} 4 \int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

問題 5.20 ケプラー方程式 $\beta(t) - \varepsilon \sin \beta(t) = \frac{2\pi t}{T}$ を t で微分すると

$$\beta'(t) - \varepsilon \cos \beta(t) \beta'(t) = \beta'(t)(1 - \varepsilon \cos \beta) = \frac{2\pi}{T}$$

となる. これに $r(t) = a(1 - \varepsilon \cos \beta(t))$ を代入すると

$$\beta'(t) \left(\frac{r(t)}{a} \right) = \frac{2\pi}{T}$$

となり, $\frac{1}{r(t)}$ について解くと

$$\frac{1}{r(t)} = \frac{T}{2a\pi} \beta'(t)$$

を得る. よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} r(t)^{-1} dt &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{T}{2a\pi} \beta'(t) dt = \frac{1}{a\pi} \int_0^{T/2} \beta'(t) dt \\ &= \frac{1}{a\pi} [\beta(t)]_0^{T/2} = \frac{1}{a\pi} \cdot \pi = a^{-1} \end{aligned}$$

問題 5.21 時刻が $t = 0$ から $t = \frac{2\pi}{\sqrt{C}}$ まで経過する間の $\frac{p(t)}{s}$ の平均は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi/\sqrt{C}} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{C}}} \frac{p(t)}{s} dt &= \frac{1}{2\pi/\sqrt{C}} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{C}}} \frac{q-s}{s} \cos \sqrt{C}t dt \\ &= \frac{1}{2\pi/\sqrt{C}} \left(\frac{q-s}{s} \right) \frac{1}{\sqrt{C}} [\sin \sqrt{C}t]_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{C}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{q-s}{s} \right) [\sin 2\pi - \sin 0] = 0. \end{aligned}$$

問題 5.22 $g(x) = \frac{1+2x}{1+x} = 2 - \frac{1}{1+x} = -(1+x)^{-1}$ を微分すると $g'(x) = -(-1)(1+x)^{-2}$ となるので, 証明すべき式

$$g^{(i)}(x) = (-1)^{i+1} i! (1+x)^{-(i+1)}$$

は $i = 1$ のとき成立している. この式を微分すると

$$g^{(i+1)}(x) = (-1)^{i+1} i! [(-i-1)(1+x)^{-(i+2)}] = (-1)^{i+2} (i+1)! (1+x)^{-(i+2)}$$

となり, i を $i+1$ に置き換えた式が成立する. したがって数学的帰納法により, 任意の自然数 i について与えられた一般式が成立する.

なお, $\frac{1+2x}{1+x}$ は

$$\frac{1+2x}{1+x} = \frac{2+2x-1}{1+x} = 2 - \frac{1}{1+x} = 2 - (1-x+x^2-x^3+\dots)$$

のように変形できるから, $\frac{1}{1+x}$ の級数展開から求めることもできる. このことから分かるように

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

が成立する範囲と

$$\frac{1+2x}{1+x} = 1 + x - x^2 + x^3 - \dots$$

が成立する範囲は一致し, ともに $|x| < 1$ である.

5章K節に戻り, 水星の κ_1 と a_1 を用いて

$$\frac{a_1 \Phi'(a_1)}{\Phi(a_1)} = -2 \frac{1 + 2 \frac{12\kappa_1^2}{c^2 a_1^2}}{1 + \frac{12\kappa_1^2}{c^2 a_1^2}} \quad \text{と} \quad -2 \left(1 + \frac{12\kappa_1^2}{c^2 a_1^2} \right)$$

を比較する. すでに $\delta = \frac{12\kappa_1^2}{c^2 a_1^2} = 0.000000073261132$ の計算は済んでいる.

$$\frac{a_1 \Phi'(a_1)}{\Phi(a_1)} = -2 \frac{1+\delta}{1+\delta} = -2.00000014652225 \quad \text{と} \quad -2(1+\delta) = -2.00000014652226$$

は極めてよく一致する.

第6章

問題 6.1 $d_1 = 101$ km, $q_1 = 99$ km. 6章D節の式を用いると

$$1 - \varepsilon_1 = \frac{2q_1}{d_1 + q_1} = \frac{2 \cdot 99}{200} = 0.990.$$

つぎに $GM = 4.4621 \times 10^{-4}$ km³/sec² であるから

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{d_1}} \sqrt{1 - \varepsilon_1} = \sqrt{\frac{4.4621 \times 10^{-4}}{101}} \sqrt{0.990} = 0.00209 \text{ km/sec.}$$

つぎに, $d_2 = d_1$, $q_2 = 50$ km. 上と同様に

$$1 - \varepsilon_2 = \frac{2q_2}{d_2 + q_2} = \frac{2 \cdot 50}{151} = 0.662$$

だから

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{d_2}} \sqrt{1 - \varepsilon_2} = 0.00171 \text{ km/sec}$$

を得る.

問題 6.2 前問と同様の計算である. 諸条件は, $d_1 = 101$ km, $q_1 = 50$ km, $d_2 = 52$ km, $q_2 = q_1$ である. これより

$$1 + \varepsilon_1 = \frac{2d_1}{d_1 + q_1} = 1.34, \quad \text{および} \quad 1 + \varepsilon_2 = \frac{2d_2}{d_2 + q_2} = 1.02$$

を得るので

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{q_1}} \sqrt{1 + \varepsilon_1} = 0.00346 \text{ km/sec} \quad \text{および} \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM}{q_2}} \sqrt{1 + \varepsilon_2} = 0.00302 \text{ km/sec}$$

となる.

問題 6.3 前問と同様の計算である. $d_1 = 51$, $q_1 = 35$, $d_2 = 39$, $q_2 = q_1$ を用い,

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{q_1}} \sqrt{1 + \varepsilon_1} = 0.00389 \text{ km/sec} \quad \text{および} \quad v_2 = 0.00367 \text{ km/sec}$$

を得る.

問題 6.4 前問と同様の計算である. $d_2 = 193$, $q_2 = 34$, $d_3 = 38$, $q_3 = q_2$ を用い,

$$v_2 = 0.00472 \text{ km/sec} \quad \text{および} \quad v_3 = 0.00372 \text{ km/sec}$$

を得る.

問題 6.5 遷移軌道の式を近日点距離 $q = a(1 - \varepsilon) = a_E$ を用いて表すと

$$r(t) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \alpha(t)} = \frac{q(1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos \alpha(t)}.$$

ランデブー地点の $\alpha(t)$ と $r(t)$ が既知, 離心率 ε が未知である. この式を ε についてとき,

$$\varepsilon = \frac{\frac{r}{q} - 1}{1 - \frac{r}{q} \cos \alpha(t)}.$$

これに $\cos \alpha(t_2) = \cos\left(\frac{\pi}{1.8}\right) = -0.17365$ および $\frac{r}{q} = \frac{r(t_2)}{a_E} = \frac{2.2235 \times 10^8}{1.496 \times 10^8} = 1.4863$ を代入すると,

$$\varepsilon_2 = \frac{\frac{r(t_2)}{a_E} - 1}{1 - \frac{r(t_2)}{a_E} \cos \alpha(t_2)} = 0.38653.$$

したがって, さらに

$$a_2 = \frac{a_E}{1 - \varepsilon_2} = 2.4386 \times 10^8 \text{ km}$$

を得る. これらをもとにして, $v_2 = 35.07$ km/sec, $\beta(t_2) = 1.3406$, $t_2 = 1.0079 \times 10^7$ sec = 116.7 日.

問題 6.6 太陽-火星系の作用圏とヒル球の各半径は, 太陽の重力定数 $GM = 1.32712 \times 10^{11}$ km³/sec², 火星の重力定数 $Gm = 4.28284 \times 10^4$ km³/sec², および軌道長半径 $a = 2.27944 \times 10^8$ km を用いて,

$$R_L = a \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{5}} = 2.27944 \times 10^8 \left(\frac{4.28284 \times 10^4}{1.32712 \times 10^{11}}\right)^{\frac{2}{5}} = 5.77241 \times 10^5 \text{ km.}$$

および

$$R_H = a \left(\frac{m}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} = 2.27944 \times 10^8 \left(\frac{4.28284 \times 10^4}{3 \times 1.32712 \times 10^{11}}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.084080 \times 10^6 \text{ km.}$$

問題 6.7 図 S6.1 に示す.

問題 6.8 離心率の定義から

$$\varepsilon_i = \frac{c_i}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b_i^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b_i^2}{a^2}}$$

となり, a を固定して b_i を大きくすると ε_i が大きくなる. $b_3 = a$ のとき $\varepsilon_3 = \sqrt{2}$. $\varepsilon \rightarrow 1$ のとき $b_i \rightarrow 0$ だから, 図 1.11 を見ると分かるように, 2本の漸近線が焦点軸である x 軸に接近し双曲線の開きが狭まってくる. $a = \varepsilon c$ だから, 原点 O から双曲線の頂点までの距離 a と焦点までの距離 c が等しくなってくる.

偏向角

$$\delta = 2 \sin^{-1} \frac{1}{\varepsilon}$$

に注目すると $\varepsilon \rightarrow 1$ のとき $\delta \rightarrow \pi$ となる ($\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$). この角は2つのベクトル v_{in} と v_{out} のなす角であり互いに反平行のとき角が π であるから, 双曲線の2つの漸近線のなす角が0に近づき双曲線は絞られる.

近点における速さ (速さの最大値)

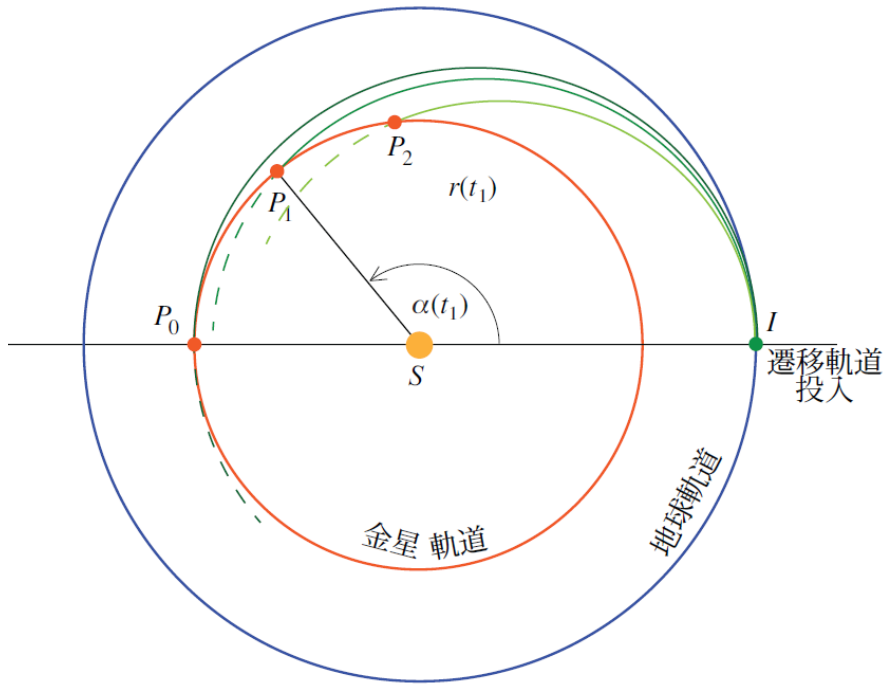


図 S6.1

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1}} = \sqrt{\frac{GM}{q}} (\epsilon + 1)$$

の両辺を2乗して $\frac{m}{q(\epsilon+1)}$ をかけると、

$$m \frac{v_{\max}^2}{q(\epsilon + 1)} = G \frac{mM}{q^2}$$

を得る。右辺は近点において物体に加わる重力の大きさ、左辺は半径 $q(\epsilon + 1)$ の円軌道を v_{\max} の速さで運動するときの遠心力である。言い換えると、重力が向心力となって「円」運動をする様子が見える。

面積速度 κ は一定に保たれる。近点における諸量でその大きさを表すと

$$\kappa = \frac{1}{2} q v_{\max}^2$$

である。この関係から、 $\kappa \neq 0$ が有限の値のまま $q \rightarrow 0$ となるときは $v_{\max} \rightarrow \infty$ (逆も真) となることが分かる。

また

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1}}$$

であるから、 $v_{\max} \rightarrow \infty$ は $\epsilon \rightarrow 1$ と等価である。

[離心率の計算]

$$\epsilon_1 = \sqrt{1 + \frac{b_1^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{29}}{5} \approx 1.0770,$$

$$\epsilon_2 = \sqrt{1 + \frac{b_2^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{34}}{5} \approx 1.1662,$$

$$\epsilon_3 = \sqrt{1 + \frac{b_3^2}{a^2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142,$$

$$\epsilon_4 = \sqrt{1 + \frac{b_4^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{61}}{5} \approx 1.5620.$$

[焦点間距離の計算]

$$\pm c_1 = \pm \epsilon_1 a = \pm (1.0770) \cdot 5 \approx \pm 5.3850,$$

$$\pm c_2 = \pm \epsilon_2 a = \pm (1.1662) \cdot 5 \approx \pm 5.8310,$$

$$\pm c_3 = \pm \epsilon_3 a = \pm (1.4142) \cdot 5 \approx \pm 7.0710,$$

$$\pm c_4 = \pm \epsilon_4 a = \pm (1.5620) \cdot 5 \approx \pm 7.8100.$$

双曲線の通径は $2 \frac{b^2}{a}$ となる (3章D節, C). 漸近線の傾きは $\pm \frac{b_i}{a}$ であり、その式は $y = \pm \frac{b_i}{a} x$.

問題 6.9 図 6.29 の状況における v_{in} と v_{out} の式を証明する。速度ベクトルの記号は6章J節と同じ。惑星 P の太陽を基準とした速度を v_P とする (ベクトルの向きは惑星軌道の接線方向、大きさは速さ)。図にはベクトル v_P 、およびこのベクトルとベクトル v_∞ (宇宙機が惑星の SOI に入ったときの速度ベクトル、惑星を基準とする) のなす角 θ_P を記した。 v_P が一定という仮定はこれまでと変わらない。図には SOI を出るときの速度ベクトル v_∞ も記した。2つのベクトル v_∞ のそれぞれとベクトル v_P の和 (平行四辺形の法則) が図のベクトル v_{in} (青) と v_{out} (緑) である。ベクトル v_{in} は SOI に入った宇宙機 C の太陽を基準とした速度、 v_{out} は SOI を出るときの速さである。ベクトル v_{in} と v_{out} の大きさ (速さ) は基本的な三角法を用いて導くことができる。

以下、速度ベクトルの記号はその速さも表すとする。 v_P と v_{in} でつくる三角形に余弦定理を適用すると $v_{in}^2 = v_\infty^2 + v_P^2 - 2v_\infty v_P \cos \theta_P$ となるので

$$v_{in} = \sqrt{v_\infty^2 + v_P^2 - 2v_\infty v_P \cos \theta_P}$$

である。

v_P と v_{out} でつくる三角形に余弦定理を適用すると $v_{out}^2 = v_\infty^2 + v_P^2 - 2v_\infty v_P \cos (\theta_P + \delta)$, ただし $\delta = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$ は偏向角。したがって

$$v_{in} = \sqrt{v_\infty^2 + v_P^2 - 2v_\infty v_P \cos \theta_P + \delta}$$

である。

問題 6.10 図 6.30 の状況では、 φ_2 が負なので、宇宙機の太陽を基準にした速度ベクトルの変化の角が $\varphi_1 + \varphi_2$ となる。それぞれの角は正弦定理

$$\frac{\sin \varphi_1}{v_\infty} = \frac{\sin \theta_P}{v_{in}} \text{ および } \frac{\sin(-\varphi_2)}{v_\infty} = \frac{\sin(\theta_P + \delta)}{v_{out}}$$

により求まる。したがって

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \sin^{-1} \left(\frac{v_\infty}{v_{in}} \sin \theta_P \right) - \sin^{-1} \left(\frac{v_\infty}{v_{out}} \sin(\theta_P + \delta) \right).$$

ここで $v_\infty = \sqrt{\frac{GM_P}{a}}$, v_{in} と v_{out} の大きさは問題 6.9 から計算できる。これらの公式は 6 章 J 節で扱ったものと全く同じ式である。

問題 6.11

[Voyager 2 の土星フライバイ]

P を土星としその質量を M_P , 重力定数を $GM_P = 37940585 \text{ km}^3/\text{sec}^2$ とする (表 6.6)。この宇宙機の航行についてのデータは表 6.6 から入手する。土星フライバイのとき、太陽を基準とする土星の速さは 9.59 km/sec (表 6.6)。宇宙機の速度と土星の軌道運動の速度のなす角 (図 6.17) は $\theta_P = 98.2^\circ = 1.71391$ 。双曲線フライバイの軌道長半径 a を表 6.5 から入手し

$$v_\infty = \sqrt{\frac{GM_P}{a}} = \sqrt{\frac{37,940,585}{332,965}} \approx 10.67 \text{ km/sec}.$$

また宇宙機が軌道の近点を通過するとき、土星中心からの距離は $a(\varepsilon - 1) = 332,965(1.482601 - 1) = 160,689 \text{ km}$ 。

偏向角は

$$\delta = 2 \sin^{-1} \frac{1}{\varepsilon} = 84.83^\circ.$$

これらのデータを用い (最終桁が四捨五入により丸められたとして誤差を考えると)

$$v_{in} = \sqrt{v_\infty^2 + v_P^2 - 2v_\infty v_P \cos \theta_P} \approx \sqrt{10.67^2 + 9.59^2 - 2(10.67)(9.59) \cos(98.2^\circ)} \\ \approx 15.33 \approx 15.3 \text{ km/sec}$$

および

$$v_{out} = \sqrt{v_\infty^2 + v_P^2 - 2v_\infty v_P \cos(\theta_P + \delta)} \\ \approx \sqrt{10.67^2 + 9.59^2 - 2(10.67)(9.59) \cos(98.2^\circ + 84.8^\circ)} \approx 20.25 \\ \approx 20.3 \text{ km/sec}$$

を得る。

土星フライバイによる Voyager 2 の速度の向きの変化は

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \sin^{-1} \left(\frac{v_\infty}{v_{in}} \sin \theta_P \right) - \sin^{-1} \left(\frac{v_\infty}{v_{out}} \sin(\theta_P + \delta) \right) \\ \approx \sin^{-1} \left(\frac{10.67}{15.33} \sin 98.2^\circ \right) - \sin^{-1} \left(\frac{10.67}{20.25} \sin(98.2^\circ + 84.8^\circ) \right) \approx 45^\circ$$

と計算される。

[天王星フライバイ] 省略

問題 6.12 6 章 M 節の冒頭で調べた木星への Voyager 2 の航行を復習する。表 6.5 を見ると、Voyager 2 は離心率 $\varepsilon = 0.724429$, 長半径 $a = 544,470,000 \text{ km}$ の太陽をまわる楕円軌道にまず投入された。この軌道投入の位置は近日点の手前 $540,760 \text{ sec}$ であった。すなわち $t_1 = -5.40745 \times 10^5 \text{ sec} (= -6.25862 \text{ 日} = -0.0171352 \text{ 年})$ 。一方、この軌道の周期は $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \frac{2\pi(544470000)}{\sqrt{1.3271244 \times 10^{11}}} = 2.19121 \times 10^8 \text{ sec} (= 2536.13 \text{ 日} = 6.94354 \text{ 年})$ である。

表 6.5 は、Voyager 2 が 1977 年 8 月 23 日に木星への遷移軌道に投入され、1979 年 7 月 9 日に木星とランデブーしたことを示している。また表 5 の日時データから、軌道投入からランデブーまでの時間が $685.459 \text{ 日} (1.8767 \text{ 年})$ 。遷移軌道の近日点から木星ランデブーまでの移動時間は、 $t_2 = 1.8767 + t_1 = 1.8596 \text{ 年}$ である。

木星とのランデブーのとき Voyager 2 の太陽からの距離 $r(t_2)$ を求めるには、楕円軌道のケプラー方程式

$$\beta(t_2) - \varepsilon \sin \beta(t_2) = \frac{2\pi t_2}{T}$$

の解 $\beta(t_2)$ を計算する。5 章 E 節に戻り、逐次近似の初期推定値を

$$\beta_1 = \frac{2\pi t_2}{T} = \frac{2\pi(1.8596)}{6.94354} = 1.6827$$

とおくと 18 回目で $\beta(t_2) = 2.2475$ に収束する。

つぎに 5 章 B および D 節で調べた距離 $r(t_2)$ を β で表す式を用いると

$$r(t_2) = a(1 - \varepsilon \cos \beta(t_2)) = 7.9147 \times 10^8 \text{ km}.$$

さらに、速さは

$$v(t_2) = \sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{r(t_2)} - \frac{1}{a}} \approx 9.57 \text{ km/sec}.$$

また速度の向きは

$$\gamma(t_2) = 2.2572(129.3^\circ)$$

と計算される。

問題 6.13 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を y について解くと $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ であり、グラフの上半分を表す関数は

$$y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

である。図 6.12 の面積 $B(t)$ は、 O を頂点とする直角三角形から双曲線の下側を差

し引いた部分の面積である。直角三角形の面積は、 x 座標が負であることを考慮し、

$$-x(t)y(t) = a \cosh \beta(t) b \sinh \beta(t)$$

である。双曲線の下側の面積は、双曲線が y 軸に対称なので、 x 軸が正の対応する部分について積分しても求めることができる。すなわち

$$\int_{-a \cosh \beta(t)}^{-a} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx = \int_a^{a \cosh \beta(t)} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx.$$

したがって、題意の $B(t)$ の式は

$$B(t) = a \cosh \beta(t) b \sinh \beta(t) - \int_a^{a \cosh \beta(t)} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

となる。

不定積分

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

は次のように計算される。まず被積分関数を

$$\sqrt{x^2 - a^2} = 1 \cdot \sqrt{x^2 - a^2} = (x)' \sqrt{x^2 - a^2}$$

として部分積分を行うと $((\sqrt{x^2 - a^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ だから、

$$\int 1 \cdot \sqrt{x^2 - a^2} dx = x \sqrt{x^2 - a^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx.$$

つぎに、この第 2 項について

$$\int x \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

と変形すると、

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

となり

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

である。右辺第 2 項の積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

は $x = a \cosh t$ とおくと、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{1}{a \sinh t} a \sinh t dt = \int dt = t + C = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C.$$

したがって

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

これより

$$\begin{aligned} \int_a^{a \cosh \beta(t)} \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \left[\cosh^{-1} \frac{x}{a} \right]_a^{a \cosh \beta(t)} \right] \\ &= \frac{a \cosh \beta(t)}{2} \sqrt{a^2 \cosh^2 \beta(t) - a^2} - \frac{a^2}{2} (\beta(t) - \cosh^{-1} 1) \\ &= \frac{a^2 \cosh \beta(t) \sinh \beta(t)}{2} - \frac{a^2}{2} \beta(t) \end{aligned}$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned} B(t) &= -\frac{1}{2} x(t)y(t) - \frac{b}{a} \int_a^{a \cosh \beta(t)} \sqrt{x^2 - a^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} (-a \cosh \beta) (b \sinh \beta) - \frac{ab \cosh \beta(t) \sinh \beta(t)}{2} + \frac{ab}{2} \beta(t) = \frac{ab}{2} \beta(t) \end{aligned}$$

となる。

問題 6.14 図 S6.2 は、双曲線軌道 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を近点 $Q(-a, 0)$ に向かって進む質点 C の、時刻 t における位置は点 $(x(t), y(t))$ を示す。本文に示した約束により $t \leq 0$ 、真近点離角 $\alpha(t)$ 、 $A(t)$ 、 $B(t)$ も負である。また $y(t) = b \sinh \beta(t) < 0$ だから $\beta(t) < 0$ である (図 6.10)。

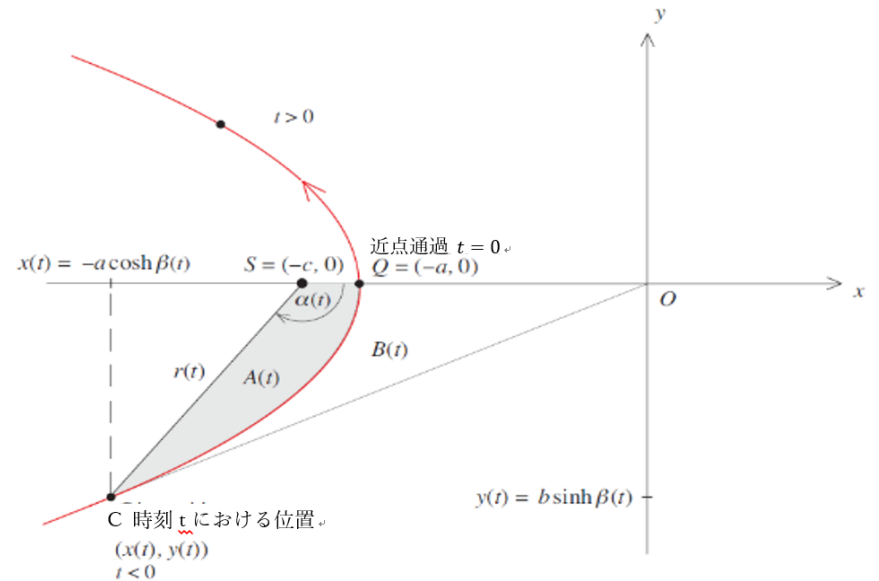


図 S6.2

$x(t) < 0, y(t) < 0$ と図形の面積が正 (しかし $B(t) < 0$) であることを考慮すると

$$-B(t) = \frac{1}{2}(-x(t)y(t)) - \int_{-a \cosh \beta(t)}^{-a} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

となる. 6章 G 節にならって $\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ の不定積分を $D(x)$ とすると

$$-B(t) = \frac{1}{2}(a \cosh \beta(t) b \sinh \beta(t)) - (D(-a) - D(-a \cosh \beta(t)))$$

だから, 両辺を t で微分して

$$-B'(t) = -\frac{1}{2} ab \beta'(t)$$

を得る. $t = 0$ において $B(0) = 0$ および $\beta(0) = 0$ だから, 上式の微分する前の形は

$$-B(t) = -\frac{1}{2} ab \beta(t).$$

一方, 図の直角三角形の面積 (に負号をつけたもの) は, $A(t) + B(t) = \frac{1}{2} cb \sinh \beta(t)$ であり, これより

$$A(t) = \frac{1}{2} cb \sinh \beta(t) - B(t) = \frac{1}{2} ab \epsilon \sinh \beta(t) - \frac{1}{2} ab \beta(t) = \frac{1}{2} ab (\epsilon \sinh \beta(t) - \beta(t)).$$

面積速度 κ を用いると $A(t) = \kappa t$ ($t < 0, A(t) < 0$) だから, 上式は

$$\epsilon \sinh \beta(t) - \beta(t) = \frac{2\kappa}{ab}$$

となり, 双曲線軌道のケプラー方程式を得る.

問題 6.15 原点を中心とする半径 a の円周上で, x 軸から反時計まわりに角 β の位置にある点の直交座標が $P(a \cos \beta, a \sin \beta)$ となるのは三角関数の定義でもある. 3章 C 節で述べたやりかたに従って図 6.31 の直交座標に極座標を重ねる. この円をグラフにもつ極座標の式は $r = f(\theta) = a$ であり, 極座標による面積の式を用いると $B = \int_0^\beta \frac{1}{2} a^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \beta$ である.

問題 6.16 図 6.32 の双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の右半分の上側に注目すると, グラフのこの部分は $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ で表される. この分岐の上の任意の点の x 座標は $\frac{x}{a} \geq 1$ を満たすから $\cosh \beta = \frac{x}{a}$ を満たす β が必ず存在する. そこで $x = a \cosh \beta$ とする. そうすると, $y = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 \beta - a^2} = a \sqrt{\cosh^2 \beta - 1} = a \sinh \beta$ である ($\beta \geq 0$ なので $\sinh \beta \geq 0$ を用いた). 問題 6.13 の式において $b = a$ とおき

$$B = \frac{1}{2} (a \cosh \beta) (a \sinh \beta) - \int_a^{a \cosh \beta} \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} a^2 \beta.$$

問題 6.17 $f(x) = \epsilon \sinh x - x - c$, $f'(x) = \epsilon \cosh x - 1$, $f''(x) = \epsilon \sinh x$.

$\epsilon > 1$ だから ($\cosh x \geq 1$ なので) $f'(x) > 0$. したがって $f(x)$ は x の全領域で増加関数である. $x > 0$ のとき $f''(x) > 0$ となり下に凸, $x < 0$ のとき $f''(x) < 0$ となり上に凸. これより, $f(x) = 0$ は必ず解を持ち, 解は 1 つしかない. ただちに言えることは, $c = 0$ ならば $f(0) = 0$ であり $x_0 = 0$ が解となる. c が正 (負) のとき ($f(x)$

が増加関数なので) 解は正 (負) である.

ニュートン-ラフソン法は「推定値 $x = x_i$ におけるグラフの接線の x 切片を次の近似解 $x = x_{i+1}$ とする」プロセスを繰り返す. すなわち

$$y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i) = 0$$

から

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

を求める.

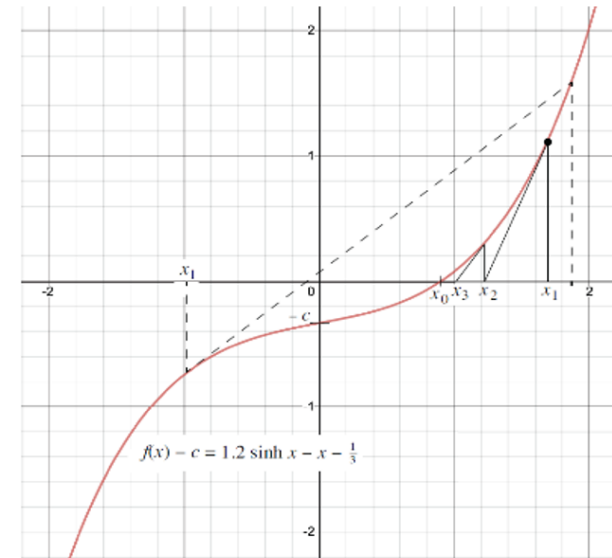


図 S6.3

双曲線軌道のケプラー方程式については

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \frac{\epsilon \sinh \beta_i - \beta_i - c}{\epsilon \cosh \beta_i - 1}, \text{ ただし } c = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} t$$

となる.

図 S6.3 は $\epsilon = 1.2$, $c = \frac{1}{3}$ のとしたときの $y = f(x)$ のグラフであり, $x_1 = 1.7$ あるいは $x_1 = -1.0$ からこの方法による逐次近似を開始した例である. 発生する数列は

$$1.7, 1.2232, 0.9717, 0.9062, 0.9021, 0.9021, \dots$$

あるいは

$$-1, -0.1269, 1.5858, 1.5326, 0.9468, 0.9037, 0.9021, 0.9021, \dots$$

となる。

問題 6.18 省略

問題 6.19 逆関数の定義から $\sinh^{-1} \sinh(x) = x$ となる。

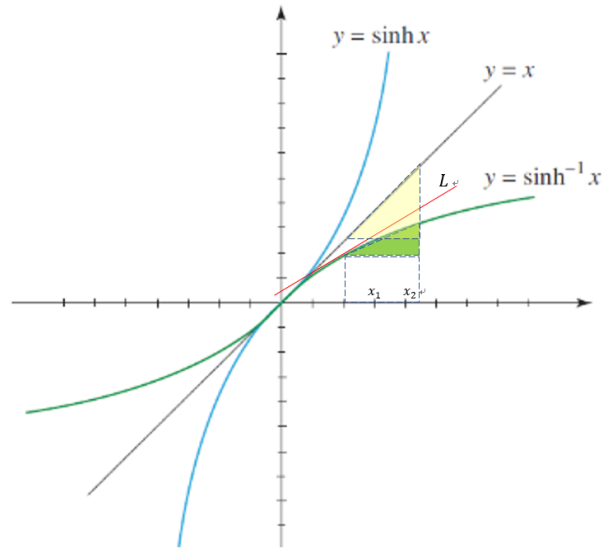


図 S6.4

両辺を微分すると

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1}(\sinh x) = \frac{d}{dx} x = 1.$$

合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1}(\sinh x) = \left[\frac{d}{du} \sinh^{-1}(u) \right]_{u=\sinh x} \frac{d \sinh x}{dx} = 1.$$

これらを総合して、

$$\left[\frac{d}{du} \sinh^{-1}(u) \right]_{u=\sinh x} = \frac{1}{\frac{d \sinh x}{dx}} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \right]_{u=\sinh x}$$

すなわち

$$\frac{d}{du} \sinh^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

さらに両辺を微分して

$$\frac{d^2}{du^2} \sinh^{-1}(u) = \frac{d}{du} (1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} = -u (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

以上をまとめ、

$$f(x) = \sinh^{-1} x, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad \text{および} \quad f''(x) = -\frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

x の値によらず $f'(x) > 0$. $f''(x)$ と x は逆符号。したがって $f(x)$ は単調増加, $x > 0$ で上に凸。図 S6.4 は $y = \sinh x$ と $y = \sinh^{-1} x$ のグラフを示す。両者は、互いに逆関数の関係にあるので $y = x$ のグラフ (傾き 45 度の直線) に対して対称である。

グラフ上の点 $(x_1, \sinh^{-1} x_1)$ における接線 L を表す式は

$$y = \frac{(x - x_1)}{\sqrt{1 + x_1^2}} + \sinh^{-1} x_1.$$

問題 6.20-22 HORIZONS システムの出力データは、速さの単位は HORIZONS-Web-Interface のページから Table Settings の output units により選択できる。離角は 0 度から 360 度の範囲で出力される。

問題 6.23 点 (x, y) の点 $(d, 0)$ からの距離は $\sqrt{(x - d)^2 + y^2}$, 直線 $x = -d$ からの距離は $x + d$. 両者が等しいとき点 (x, y) が放物線上にあるので, $\sqrt{(x - d)^2 + y^2} = x + d$ が成り立つ。両辺を 2 乗して整理すると、

$$y^2 = 4xd$$

を得る。面積 B は、放物線の下側 $(0, 0)$ から (x, y) まで (ただし $y = 2\sqrt{d}x^{\frac{1}{2}}$, $y > 0$) の面積から対応する三角形の面積を引いたもの。

$$B = \int_0^x y dx - \frac{1}{2}xy = \frac{2\sqrt{d}}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} - \frac{1}{2}x \cdot 2\sqrt{d}\sqrt{x} = \frac{4}{3}\sqrt{d}x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{d}x^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{d}}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

問題 6.24 $r(t) = q(\beta(t)^2 + 1)$ に $\beta(t) = \tan \frac{\alpha(t)}{2}$ を代入すると

$$r(t) = q \left(\tan^2 \frac{\alpha(t)}{2} + 1 \right).$$

三角関数の恒等式 $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ および $\cos \theta = \cos 2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 =$ を用いると

$$r(t) = q \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha(t)}{2}} \right) = \frac{2q}{1 + \cos^2 \alpha(t)}$$

となる。

問題 6.25 省略

問題 6.26 問題 2.15 では、楕円軌道の近点における速さ

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1}} = \sqrt{GM} \sqrt{\frac{\epsilon + 1}{q}}$$

を、 $\epsilon \rightarrow 1$ として

$$v_{\max} \approx \sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{q}}$$

により近似した。本問では放物線軌道の近点における速さ

$$v_{\max} = \sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{q}}$$

を用いている。楕円軌道で $\varepsilon \rightarrow 1$ とすると放物線軌道に近づくので、最大の速さが同じ式になるのは当然である。

問題 6.27 C/2011 W3 の近日点通過後 7 日目の状況を調べる。 $t = 7$ 日 = $7(86,400) = 6.04800 \times 10^5$ sec. 軌道を放物線で近似してよいことが分かっているので、

$$\begin{aligned} \beta(t) + \frac{1}{3}\beta(t)^3 &= \sqrt{\frac{GM}{2q^3}} t = \sqrt{\frac{1.3271244 \times 10^{11}}{2(8.3083815 \times 10^5)^3}} (6.04800 \times 10^5) \\ &= 205.7206826 \approx 205.721 \end{aligned}$$

から $\beta(t)$ を求め、

$$r(t) = q(\beta(t)^2 + 1)$$

と

$$v(t) = \sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{r(t)}}$$

および

$$\gamma(t) = \pi - \sin^{-1} \frac{\sqrt{GMq(1+\varepsilon)}}{r(t)v(t)} = \pi - \sin^{-1} \frac{\sqrt{(1+\varepsilon)}}{\sqrt{2(\beta^2(t)+1)}}$$

を計算する。

本文に示した代数的方法により $\beta(t)$ を求めてもよいが、ニュートン-ラフソン法により答えを得てもよい (初期値として $\beta_1 \approx (200 \times 3)^{\frac{1}{3}} \approx 8$ を採用すれば 3 回の逐次近似により有効数字 10 桁まで収束する)。

問題 6.28 中心天体 (重力定数 GM) からの距離 $r(t)$ とその位置での速さ $v(t)$ との関係は、楕円軌道、放物線軌道、双曲線軌道のそれぞれについて

$$\sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{r(t)} - \frac{1}{a}}, \quad \sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{r(t)}}, \quad \sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{r(t)} + \frac{1}{a}}$$

となる (a は軌道長半径, 正)。

測定値 $r(t)$ から $\sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{r(t)}}$ を計算した値が $v(t)$ の測定値より大きいなら、 $\sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{r(t)} + \frac{1}{a}}$ の式により計算すべきであったことが分かる。すなわち双曲線軌道である。そうすると

$$v(t) = \sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{r(t)} + \frac{1}{a}}$$

より

$$a = \frac{1}{\frac{v(t)^2}{GM} - \frac{2}{r(t)}} = \frac{1}{\frac{41.7^2}{1.327 \times 10^{11}} - \frac{2}{4.20 \times 10^8}} \approx 1.199 \times 10^8 \approx 1.20 \times 10^8 \text{ km/sec}$$

軌道長半径 a を用いると双曲線軌道の近日点距離は $q = a(\varepsilon - 1)$ と書けるから

$$\varepsilon = \frac{q}{a} + 1 = \frac{3.00 \times 10^8}{1.20 \times 10^8} + 1 = 2.5 + 1 = 3.5.$$

問題 6.29 $f(x) = \sqrt{x}$ が単調増加なので、 $f(x_1) < f(x_2)$ ならば $x_1 < x_2$ となり、逆も真。正の r と $D (< \frac{2}{r})$ について、

$$\frac{2}{r} - D < \frac{2}{r} < \frac{2}{r} + D \iff \sqrt{\frac{2}{r} - D} < \sqrt{\frac{2}{r}} < \sqrt{\frac{2}{r} + D}$$

となる。したがって、

$$v(t_0) = \sqrt{\frac{2}{r} + z}$$

とにおいて

$$v(t_0) = \sqrt{\frac{2}{r} + z} < \sqrt{\frac{2}{r}}$$

ならば $z = -D < 0$ とすることができる。