工学のための物理数学　問・練習問題略解

第 1 章

練習問題 1.1

1. 解析的であることを示すには，コーシー–リーマンの方程式が成立することを示す．$f'(z) = u_x + iv_x = -e^{-y}\sin x + ie^{-y}\cos x$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$

3. $z = (\pi/4 + 2n\pi) - i\ln\sqrt{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

4. $z = 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

5. $\ln 4 = 2\ln|2| + i\,\mathrm{arg}4 = 1.3862 \pm 2n\pi i$

$\ln(-3i) = \ln|-3i| + i\arg(-3i) = 1.0986 - \left(\dfrac{\pi}{2}\right)i \pm 2n\pi i$

$\ln(4-3i) = \ln|4-3i| + i\arg(4-3i) = \ln|5| + i\arg(4-3i) = 1.6094 - i(0.6435 \pm 2n\pi)$

6. $i^i = e^{i\ln i} = \exp(i\ln i) = \exp\left\{i\left(\dfrac{\pi}{2}i \pm 2n\pi i\right)\right\} = \exp\left\{\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \mp 2n\pi\right\}$ より，主値 $(n = 0)$ は $e^{-\pi/2}$ である．

練習問題 1.2

1. i) $f(z) = \overline{z}, \quad C_1 :\ 1 - i/3, \quad C_2\ :\ 1 + i$

ii) $f(z) = z^2, \quad C_1,\ C_2 :\ \dfrac{-2+2i}{3}$

2. 略

3. 略

4. $-\pi/2$

練習問題 1.3

1. $\mathrm{Ln}(1-z)/(1+z)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Ln}(1-z) - \mathrm{Ln}(1+z)\\
&= -\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) - \left(z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)\\
&= -2\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

2. $f(z) = e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$

3.
$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$
$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

4.
$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{5!z^5} + \cdots\right)\\
&= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \cdots
\end{aligned}
$$

5. (i)
$$
\begin{aligned}
f(x) = -3\Bigg\{&\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots\right)\\
&+\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

(ii)
$$f(z) = -3\left\{\frac{1}{z-1} + 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots + (z-1)^n + \cdots\right\}$$

(iii)
$$
\begin{aligned}
f(z) = 3\Bigg\{&\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3}\\
&+ \frac{1}{(z-2)^4} - \frac{1}{(z-2)^5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(z-2)^n} + \cdots\Bigg\}
\end{aligned}
$$

6. πi

7. 0

8. $\pi/3$

第 2 章

2.1 節問略解

問 1　略

問 2　$\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\pi^2}{2}-\pi\right)+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nt+\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(1+\pi)(-1)^n}{n}\sin nt$

問 3　$\dfrac{1}{2}\cos 2t+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1,\ n\neq 2}^{\infty}\dfrac{n}{4-n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\cos nt$

問 4　$\dfrac{\pi^3}{4}+\dfrac{6}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\pi^2(-1)^n}{n^2}-\dfrac{2\{(-1)^n-1\}}{n^4}\right]\cos nt$

問 5　$\dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos 2nt-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin 2nt$

偶関数への拡張：$\dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^n}{n^2}\cos nt$

奇関数への拡張：$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\dfrac{\pi^2(-1)^n}{n}+\dfrac{2\{(-1)^n-1\}}{n^3}\right]\sin nt$

問 6　略

問 7　略

問 8　例題 1：$c_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2n\pi i}\quad(n\neq 0),\quad c_0=\dfrac{1}{2}$

例題 2：$c_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{ni}\quad(n\neq 0),\quad c_0=0$

例題 3：$c_n=-\dfrac{1}{2n^2\pi^2}\quad(n\neq 0),\quad c_0=\dfrac{1}{6}$

例題 4：$c_n=\dfrac{(-1)^{n+1}-1}{2\pi(n^2-1)}\quad(n\geq 2),\quad c_1=\dfrac{1}{4i}$：$c_{-1}=\dfrac{i}{4}$：$c_0=\dfrac{1}{\pi}$

練習問題 2.1

1.　1)　$-2\pi^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin nt+12\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\sin nt$

2)　$\dfrac{\pi^5}{5}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\dfrac{2\pi^2}{n^2}-\dfrac{3}{n^4}\right)\cos 2nt+\left(-\dfrac{\pi^3}{n}+\dfrac{3\pi}{n^3}\right)\sin 2nt\right\}$

3)　$\dfrac{2}{\pi}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\cos nt$　　4)　$\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2mx}{1-4m^2}-\dfrac{1}{2}\sin t$

5)　$\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(1-\cos\dfrac{4n\pi}{3}\right)\cos 2n\pi t+\dfrac{3}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{4n\pi}{3}\sin 2n\pi t$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(3\sin\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{3n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi t}{4}$

7) $\displaystyle\sinh 1+2\sinh 1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi t$

8) $\displaystyle 2\pi\sinh 1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2\pi^2}\sin n\pi t$

2. 1) $\displaystyle\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$ 2) $\displaystyle\frac{l}{8}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-\cos(n\pi/2)}{n^2}\cos\frac{n\pi}{l}t$

3) $\displaystyle\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos\frac{n\pi}{l}t$ 4) $\displaystyle\frac{2}{3\pi}-\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}\cos\frac{2n\pi}{l}t$

3. 1) $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{6}\sin\frac{(2n-1)t}{2}$

2) $\displaystyle\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{nt}{4}$

3) $\displaystyle 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left\{1-(-1)^n e^l\right\}}{n^2\pi^2+l^2}\sin\frac{n\pi}{l}t$

4) $\displaystyle-\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nt+\frac{\pi}{2}\sin t$

4. フーリエ余弦級数：$\displaystyle\left\langle f(t)^2\right\rangle=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$

フーリエ正弦級数：$\displaystyle\left\langle f(t)^2\right\rangle=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$

5. 1) $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nt$

偶関数へ拡張： $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2}\cos nt$

奇関数へ拡張： $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\{1-(-1)^n\}}{\pi n^3}\sin nt$

2) $\displaystyle\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nt$

偶関数へ拡張： $\displaystyle\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nt$，奇関数へ拡張： $\displaystyle\sin\frac{t}{2}$

6. 1) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)} e^{int}$ 2) $\displaystyle\frac{e^{4\pi}-1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2-in} e^{int}$

3) $\displaystyle\frac{\pi}{4} + \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty} \left\{ \frac{i(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2} \right\} e^{int}$

4) $\displaystyle -\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} e^{i(2n\pi/l)t}$

7. 略

8. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+2n\pi)$ を周期 2π の周期関数として 複素フーリエ級数に展開し, 得られた複素フーリエ級数で $t=0$ とおく.

9. 1) $c_n = \dfrac{1}{2} a^{|n|}$ $(n \neq 0)$, $c_0 = 1$

2) $c_n = \dfrac{1}{2i} \operatorname{sgn}(n)\, a^{|n|}$ $(n \neq 0)$, $c_0 = 0$

10. 複素フーリエ級数の結果に $t=0$ を代入し, 両辺の実部を比較する.

11. t^3 のフーリエ級数は $\displaystyle t^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{12(-1)^n}{n^3} - \frac{2\pi^2(-1)^n}{n} \right\} \sin nt$, t^2 のフーリエ級数を $t=0$ で 0 とおいて積分すると $\displaystyle t^3 = \pi^2 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3} \sin nt$ で一見異なるが, $\pi^2 t$ をさらにフーリエ級数に展開すると両者は一致する.

12. 1)〜3) 略

4) $t = \cos\theta$ であるから $f(t) = F(\theta)$ としたとき $t=-1$ で $\theta = \pi$, $t=1$ で $\theta = 0$ となり $F(\theta)$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ で定義された関数である. つぎに $F(\theta)$ を偶関数に拡張してフーリエ余弦級数に展開すれば, $\displaystyle f(t) = F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos n\theta$, すなわち $\displaystyle f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n T_n(t)$ と展開される.

13. 略

2.2 節問略解

問 1 $\displaystyle f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega} d\omega$

問 2 $\displaystyle \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\omega} (2\sin\omega - \sin 2\omega)$

問 3 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{4}(1+i\omega)^2}$

問 4 例題 1： $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2 a\omega}{\omega^2}$ 例題 2： $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{(1-\cos a\omega)^2}{\omega^2}$ 例題 3： $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{a^2}{(a^2+\omega^2)^2}$

例題 4： $\dfrac{1}{2a}e^{-\omega^2/2a}$

問 5 明らか.

問 6 $f * f = \left(\dfrac{1}{a}+|t|\right)e^{-a|t|}$

問 7 $f * g = \dfrac{2}{b^2-a^2}(be^{-a|t|}-ae^{-b|t|})$ となることを利用せよ.

練習問題 2.2

1. 1) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}e^{i\omega t}d\omega$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i(c-\omega)}\left[e^{i(c-\omega)b}-e^{i(c-\omega)a}\right]e^{i\omega t}d\omega$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\omega}{\pi i(1+\omega^2)^2}e^{i\omega t}d\omega$ 4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi\omega}{\pi i(1-\omega^2)}e^{i\omega t}d\omega$

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi\omega^2}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}-\cos\omega\right)e^{i\omega t}d\omega$ 6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(\pi\omega/2)}{\omega(4-\omega^2)}e^{i\omega t}d\omega$

7) $f(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)d\omega,\quad \widehat{f}(\omega)=-\frac{i}{2}e^{-\omega}\ (\omega>0),\quad \frac{i}{2}e^{-\omega}\ \ (\omega<0)$

8) $-\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega}{4a\sqrt{\pi a}}e^{-\omega^2/(4a)}e^{i\omega t}d\omega$

2. $\widehat{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\exp\left\{i\left(\dfrac{\omega^2}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

実部より $\mathcal{F}\left\{\cos x^2\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

虚部より $\mathcal{F}\left\{\sin x^2\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

3. 1) フーリエ余弦変換： $\widehat{f}(\omega)=\dfrac{2\sqrt{2\pi}}{\pi\omega}\sin\omega(1-\cos\omega)$

フーリエ正弦変換： $\widehat{g}(\omega)=-\dfrac{2\sqrt{2\pi}}{\pi\omega}\cos\omega(1-\cos\omega)$

2) フーリエ余弦変換： $\widehat{f}(\omega)=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\pi(1-\omega^2)}\cos\dfrac{\pi\omega}{2}$

フーリエ正弦変換： $\widehat{g}(\omega)=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\pi(1-\omega^2)}\left(\sin\dfrac{\pi\omega}{2}-\omega\right)$

3) フーリエ余弦変換： $\widehat{f}(\omega) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\pi(1-\omega^2)}(1+\cos\pi\omega)$

フーリエ正弦変換： $\widehat{g}(\omega) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\pi(1-\omega^2)}\sin\pi\omega$

4) フーリエ余弦変換： $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$

フーリエ正弦変換： $\widehat{g}(\omega) = \dfrac{2\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\pi}(1+\omega^2)^2}$

4. 例題 1 の $f(t)$ に $\pi/2$ をかけたもののフーリエ変換を計算してフーリエ逆変換の形に表し，その実部をとる．

5. フレネル積分において $t^2 = \omega u$ とおき，積分変数を u に変換すると，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\cos\omega u\,du = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\sin\omega u\,du = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ が得られる．これらの式で $\omega = 1$ とおくと問題の式が得られる．フレネル積分からの変形は $t^2 = v$ として，積分変数を t から v へ変換する．

6. 1) $e^{-|t|}$ のフーリエ変換を計算する．

2) e^{-t} のフーリエ変換を計算する．

3) 例題 2 の関数に対するパーセバルの等式を利用する．

4) 例題 1 の関数に対するパーセバルの等式を利用する．

5) 例題 3 の関数で $a = 1$ とおいたものに対するパーセバルの等式を利用する．

6) 式 (2.84) の両辺を t で微分すると $\displaystyle\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega e^{i\omega t}}{a^2+\omega^2}d\omega = -ae^{-at}$ $(t > 0)$, ae^{at} $(t < 0)$ が得られる．このフーリエ変換に対するパーセバルの等式を計算して，$a = 1$ とおく．

7. 1) $\sqrt{2\pi}f(t) = -2\pi t,\ 0 \le t < 1,\ -2\pi(2-t),\ 1 \le t \le 2,\ 0,$ それ以外．関数 $g(t) = 1,\ 0 \le t \le 1,\ 0,$ それ以外　のフーリエ変換を計算しそれを問 5 の結果に当てはめる．

2) $\sqrt{2\pi}f(t) = (t+2a)/(2\pi),\ -2a \le t < 0,\ (2a-t)/(2\pi),\ 0 \le t \le 2a,\ 0,$ それ以外．例題 1 の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を問 5 の結果に当てはめる．

8. フーリエ余弦変換，フーリエ正弦変換の定義式 (2.61)，(2.62) に $f''(t)$ を代入し，部分積分を繰り返す．

9. 略

10. フーリエ変換 (2.55) の積分で $e^t = u$ と変数変換する．つぎに複素 u 平面上で偏角が 0 で $u = 0$ から $u = \infty$ へと向かう経路 C_1，偏角が 0 から 2π まで無限に大きな半径の円周上を回る経路 C_2，偏角が 2π で $u = \infty$ から $u = 0$ まで進む経路 C_3 の一周積分を行い，その中に含まれる極が $u = \pm i$ であることを利用して留数定理を用いる．

2.3 節問略解

問 1 1. 指数位数，4 2. 指数位数，3

問 2 $\dfrac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$

問 3 $\dfrac{1}{6}(e^{2t} - e^{-4t})$

問 4 $\dfrac{1}{2}e^{t+1}(t+1)^2 U(t+1)$

問 5 1. $\dfrac{4(3s^2 - 4)}{(s^2 + 4)^3}$ 2. $\dfrac{1}{16}(1 - \cos 4t)$

問 6 1. $\dfrac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \dfrac{1}{2}e^{-3t}$ 2. $\dfrac{3}{4}e^{-t} - \dfrac{1}{2}te^{-t} - \dfrac{3}{4}e^{-3t}$

練習問題 2.3

1. 1) 可，1 2) 可，0 3) 不可 4) 可，0 5) 不可 6) 不可

2. $\displaystyle\lim_{s\to\infty} s^2 \log \frac{s^2 + b}{s^2 + a} = b - a \neq 0$ となり，式 (2.101) の条件に反するので不可能．

3. $s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(+0) - Je^{-st_0}$

4. 略

5. 指数位数でラプラス変換可能な関数については，式 (2.105) が成り立つ．

6. 式 (2.122) を利用せよ．

7. 1) $(s\cosh b + a\sinh b)/(s^2 - a^2)$ 2) $(s\sin b + a\cos b)/(s^2 + a^2)$
3) $(s^2+2)/[s(s^2+4)]$ 4) $6/s^4 + 6/s^3 + 3/s^2 + 1/s$ 5) $2/[s(s^2-4)]$

8. 1) $(7 - s)/(s^2 - 2s + 5)$ 2) $(1 - 5s)/(s^2 + 2s - 8)$
3) $\dfrac{4(3s^2 + 12s + 25)}{s^2(s^2 + 6s + 25)^2}$ 4) $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{s}{a}\right)$ 5) $\dfrac{e^{-(s+3)a} - e^{-(s+3)b}}{s+3}$
6) $[(2+s)e^{-2s} - (2-s)e^{-s}]/s^3$ 7) $4(s^3 + 3s^2 - 12s - 4)/(s^2+4)^3$
8) $\log(\sqrt{s^2 - 1}/s)$

9. 公式 [10] を繰り返し利用する．

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{t}} e^{-st} dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-a\sqrt{s}}$ の両辺を a で微分せよ．

11. 1) $(1-e^{-s})/[s(1+e^{-s})]$ 　2) $(1+e^{-\pi s})/[(s^2+1)(1-e^{-\pi s})]$

12. 1) $t^4 e^{-2t}/4!$ 　2) $[1-(1+2t+2t^2)e^{-2t}]/8$ 　3) $t\sin at/(2a)$

4) $te^{-4t}\sin 3t/6.$ 　5) $-e^{-(t-s)}(3\cos 3t + 2\sin 3t)U(t-\pi)/3.$

6) $2(1-\cos t)/t$ 　7) $(\sinh at - \sin at)/(2a^3)$

8) $\cos t + (\sin t - \cos t)U(t-\pi)$

9) $$\begin{aligned} &t\{1-U(t-a)\} + (t-2a)\{U(t-2a) - U(t-3a)\} \\ &+ (t-4a)\{U(t-4a) - U(t-ta)\} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (t-2na)[U(t-2na) - U(t-(2n+1)a)] \end{aligned}$$

13. 1) $\dfrac{1}{8}[3e^t + (\sin 2t - 3\cos 2t)e^{-t}]$ 　2) $\dfrac{1}{5}e^t - \dfrac{1}{5}e^{-t} + \dfrac{3}{10}\sin 2t$

3) $t - 3 + e^{-t}(3 + 2t + t^2/2)$

4) $\dfrac{2}{45}e^{2t} + \dfrac{e^{-t}}{18}(1+3t) - \dfrac{1}{10}(\cos t + 2\sin t)$

5) $\dfrac{1}{3a}\left[e^{at/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}at + \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}at\right) - e^{-at}\right]$

6) $e^{-t}(1 - \cos t + 2\sin t)$

14. 略

15. 略

16. 式 (2.114) より $\Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^\infty (1+z)^n e^{-nz} dz$ ここで $t = n(1+z)$ さらに $(1+z)e^{-z} = e^{-u^2/2}$ ($z \geq 0$ で $u \geq 0$, $-1 \leq z < 0$ で $u < 0$) により変数 u を導入すると，$z = 0$ のとき $u = 0$, $|z|, |u| \ll 1$ では $z \approx u$ となる．これから $n \gg 1$ のとき $\Gamma(n+1) \approx n^{n+1}e^{-n}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-nu^2/2} du = \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$ となる．

17. $S = \Gamma(p)\Gamma(q) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}dy$ とおく．新しい積分変数 u, v を $u = x+y$, $v = x/(x+y)$ と導入すると，2 重積分の変換公式により $S = \displaystyle\int_0^\infty du \int_0^1 dv\, e^{-u}(uv)^{p-1}(u-uv)^{q-1}u = \int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv = \Gamma(p+q)B(p,q)$ が得られる．

2.4 節問略解

問 1 $y(t) = e^{-3t} + 5te^{-3t} + \dfrac{1}{6}t^3e^{-3t}$

問 2 $y = e^{2t}\sin 2t, \quad z = e^{2t}\cos 2t$

問 3 e^{-4at}

練習問題 2.4

1. 1) $(2\sinh t - \sin 2t)/10$ 　 2) $5/18 - t/3 - 2e^{-t} + e^{-3t}/45 + 11e^{2t}/30$

3) $(-9e^t + 6te^t + 3e^{-t} + 6\sin t)/8$

4) $-e^t + 7e^{4t}/10 + e^t(3\cos t - \sin t)/10$

5) $\cos(t-2)U(t-2) - \cos(t-1)U(t-1) + U(t-1) - U(t-2)$

6) $\dfrac{e^{-t}}{4} + \dfrac{e^{t/2}}{4}\left(3\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}t - \dfrac{1}{\sqrt{7}}\sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}t\right)$

2. 1) $(1-\pi/2+t)e^t\sin t$ 　 2) $e^{2t} - 2\sin t$

3) $\dfrac{1}{2}[1 - e^{-t}(\cos t + \sin t)]$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left\{(1 - e^{-(t-k\pi)}[\cos(t-k\pi) + \sin(t-k\pi)]\right\}U(t-k\pi)$$

4) $k = n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ のとき，$y = C\sin kt$，ただし C は任意定数．$k \neq n\pi$のとき，$y = 0$

3. 1) $x = -1 + e^t/5 + 14\cos 2t/5 - \sin 2t/10$, $y = 4e^t + \cos 2t/5 + 28\sin 2t/5$

2) $x = -2 + (-4t + 4e^t + 2\cos t + \sin t)/3$, $y = -2 + (-2t + 5e^t + \cos t - \sin t)/3$

3) $y = 8e^{2t}/45 + 2e^{-t}/9 + 2te^{-t}/3 - 2\cos t/5 + \sin t/5$, $z = -2e^{2t}/45 + 4e^{-t}/9 + 4te^{-t}/3 - 2\cos t/5 + \sin t/5$

4) $x = -1 + 2e^t$, $y = 1 + e^t + 2te^t$, $z = 1 - e^t + 2te^t$

4. $A(t) = 1 - e^{t/m} + (t/m)e^{t/m}$, $0 < t \leq 1$ のとき $y(t) = 1 + (t/m-1)e^{t/m}$, $t > 1$ のとき $y(t) = (t/m-1)e^{t/m} + (m-t+1)e^{(t-1)/m}/m$

5. $y(x)|_{a\to0} = \dfrac{W_0}{6EI}\left\{(l-x_0)(2lx_0 - x_0^2)x - (l-x_0)x^3 + l(x-x_0)^3U(x-x_0)\right\}$

6. $I(t) = \dfrac{E_0}{L\omega}e^{-R/(2L)t}\sin\omega t$，ただし $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$

7. 極は $s=ae^{\pm\pi/4i}$, $ae^{\pm 3\pi/4i}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{2}a^3}\left(\cosh\frac{a}{\sqrt{2}}t\cdot\sin\frac{a}{\sqrt{2}}t-\sinh\frac{a}{\sqrt{2}}t\cdot\sin\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)$$

8. $t<0$ なら $\mathrm{Re}\,s>0$ のとき $\mathrm{Re}\,st<0$ となり，逆変換積分 (2.168) において積分経路の半円部分を図 2.27 とは反対側の右側の，被積分関数が特異点をもたない領域にとることができるため積分値がゼロとなる．

9. $s=0$ が分岐点だから，$\sigma=0$ とおき，積分形路を偏角 $-\pi i$ で $-\infty$ からゼロまで動く C_1 と 偏角 πi でゼロから $-\infty$ まで動く C_2 に変形する．C_1 では $s=ue^{-\pi i}$, C_2 では $s=ue^{\pi i}$ とおくと $\displaystyle\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}e^{-a\sqrt{s}}e^{st}ds=\int_{\infty}^{0}\exp\left(-a\sqrt{u}\,e^{-\pi i/2}-ut\right)(-du)+\int_{0}^{\infty}\exp\left(-a\sqrt{u}\,e^{\pi i/2}-ut\right)(-du)$ $\displaystyle=2i\int_{0}^{\infty}e^{-ut}\sin a\sqrt{u}\quad du$ となる．$u=q^2/a^2$ とおくと，積分 $\displaystyle=\frac{4i}{a^2}\int_0^{\infty}q\sin q\;e^{-q^2t/a^2}dq=\frac{4i}{2t}\int_0^{\infty}\cos q\;e^{-q^2t/a^2}dq=\frac{a\sqrt{\pi}i}{t^{3/2}}e^{-a^2/(4t)}$ が得られる．

10. 逆変換積分 (2.168) によって式 (2.155) の $y(t)$ を計算する．図 2.28 の積分経路をとると，$\displaystyle y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}F(s)Z(s)ds=e^{st}F(s)Z(s)$ の各極における留数の和 となる．仮定より極の位置は s 平面の右半平面 $\mathrm{Re}\,s>0$ には存在しないことから証明される．

11. 左側の回路に流れる電流を $I(t)$，コンデンサに蓄えられる電荷を $C(t)$ とする．$\mathcal{L}\{E_{in}\}=(R+1/(sC))\,\mathcal{L}\{I\}$, $\mathcal{L}\{E_{out}\}=\mathcal{L}\{Q\}/C=\mathcal{L}\{I\}/(sC)$ より，$\mathcal{L}\{E_{out}\}=(1+sRC)^{-1}\,\mathcal{L}\{E_{in}\}$ これから $Z(s)=(1+sRC)^{-1}$ なお，周波数を ω とすると，$s=i\omega$.

第 3 章

3.1 節問略解

問 1　略

練習問題 3.1

1. $3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{B}+9\boldsymbol{C}$

2. $\boldsymbol{A} = \frac{1}{4}(5\boldsymbol{X} - 7\boldsymbol{Y} + 3\boldsymbol{Z})$, $\boldsymbol{B} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z})$, $\boldsymbol{C} = \frac{1}{4}(3\boldsymbol{X} - 5\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z})$
3. $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_r \cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta \sin\theta$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_r \sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta$
4. $\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{e}_r \sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta)\cos\phi - \boldsymbol{e}_\phi \sin\phi$, $\boldsymbol{j} = (\boldsymbol{e}_r \sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta)\sin\phi + \boldsymbol{e}_\phi \cos\phi$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_r \cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta \sin\theta$

3.2 節問略解

問 1 略

練習問題 3.2

1. $\cos\theta = -\frac{1}{14}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{195}}{14}$
2. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0$ だから $\boldsymbol{A}//\boldsymbol{B}$，また $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ により $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$．これを同時に満たすベクトル $\boldsymbol{B}$ はゼロベクトル以外にありえない．
3. $\pm\frac{1}{\sqrt{227}}(11\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k})$
4. $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}$ とおき，$A \cdot \boldsymbol{i}$, $[\boldsymbol{A}\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}]$ などを計算せよ．
5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\right)\boldsymbol{k}$ (複号同順)
6. 式 (3.34) および (3.37) により $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$ を示して，この関係を使えばよい．
7. 平面上の 2 つのベクトル $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$ と $(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B})$ が $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}$ に垂直であることを示せばよい．
8. 三角錐の相隣る 2 辺を表すベクトルのベクトル積は，それらを含む面の面積の 2 倍で，向きは面に垂直である．四角錐に対しては，これを 2 つに分けて考えよ．
9. $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ へ代入せよ．
10. まず，$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| > |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}|$ を示せ．
11. 7
12. $\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A'}_2 = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A'}_3 = \boldsymbol{A'}_2 \cdot \boldsymbol{A'}_3 = 0$ を示せ．
13. $\boldsymbol{A'}_2 = \frac{2}{7}(5\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{A'}_3 = \frac{1}{35}(-20\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 54\boldsymbol{k})$
14. $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j}$ として証明する．

3.3 節問略解

問 1 $s = a\theta$

問 2 $\boldsymbol{t} = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}\boldsymbol{n} = -\cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}$

練習問題 3.3

1. a を定数，$\alpha(t)$ を t の関数とすると $\boldsymbol{a} = a(\cos\alpha(t)\cdot\boldsymbol{i} + \sin\alpha(t)\cdot\boldsymbol{j})$ と書ける．

2. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = 0$ の両辺を t で微分せよ．

3. $\boldsymbol{A}//\boldsymbol{A}'$ なら，$\boldsymbol{A}' = \lambda(t)\boldsymbol{A}$ と書ける．

4. $d\boldsymbol{A}/dt\cdot(\boldsymbol{A}\times d^3\boldsymbol{A}/dt^3)$

5. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\cos\sqrt{2}t + \boldsymbol{B}\sin\sqrt{2}t$，だたし，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は任意定ベクトル．また，$\boldsymbol{Y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{A}\sin\sqrt{2}t - \boldsymbol{B}\cos\sqrt{2}t)$

6. A, B, C は任意定数として $\boldsymbol{R} = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\boldsymbol{i} + (-A\sin\Omega t + B\cos\Omega t)\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$

7. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{34}}(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$

8. s を曲線の長さとすると $ds = \sqrt{{f_1}'^2 + {f_2}'^2 + {f_3}'^2}dt$ である．

9. $\pm(-a\sin\theta\boldsymbol{i} + b\cos\theta\boldsymbol{j})/\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$

10. $t = n\pi$，$\theta = (-1)^{n+1}2n\pi$，n は正整数．

11. 微分して代入せよ．

12. $\dfrac{d\boldsymbol{R}}{d\theta} = a(1-\cos\theta)\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j}$，$\quad \dfrac{d^2\boldsymbol{R}}{d\theta^2} = a\sin\theta\boldsymbol{i} + a\cos\theta\boldsymbol{j}$，
$\boldsymbol{n} = \cos\dfrac{\theta}{2}\boldsymbol{i} - \sin\dfrac{\theta}{2}$，$\quad \theta = \pi$

13. $4a\Big(1 - \cos\dfrac{\theta}{2}\Big)$

14. 両者は一般には一致しない．

15. 略

16. $\boldsymbol{t} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}(-R\sin u, R\cos u, h)$，$\quad \kappa = \dfrac{R}{R^2+h^2}$，$\quad \boldsymbol{n} = (-\cos u, \sin u, 0)$，
$\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}(h\sin u, -h\cos u, R)$

3.4 節問略解

問 1　$2x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$

問 2　0

問 3　0

練習問題 3.4

1.　$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 2(x+y+z)$,　$\nabla \times \boldsymbol{A} = -3(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

2.　$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = 2xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) + yz(y+z)\boldsymbol{i} + zx(z+x)\boldsymbol{j} + xy(x+y)\boldsymbol{k}$, $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3 = 0$,　$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = -3\{yz(y+z)\boldsymbol{i} + xz(x+z)\boldsymbol{j} + xy(x+y)\boldsymbol{k}\}$

3.　$\nabla f = -r^{-3}e^{\kappa r}(\kappa r + 1)\boldsymbol{R}$,　$\nabla^2 f = r^{-1}\kappa^2 e^{\kappa r} = \kappa^2 f$

4.～7.　略

8.　式 (3.76) において $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ とおけ.

9.　前問の結果を利用せよ.

10.　$\Delta \boldsymbol{A} = \Delta A_x \boldsymbol{i} + \Delta A_y \boldsymbol{j} + \Delta A_z \boldsymbol{k}$. $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = (\partial_x^2 A_x + \partial_x\partial_y A_y + \partial_x\partial_z A_z)\boldsymbol{i} + (\partial_y\partial_x A_x + \partial_y^2 A_y + \partial_y\partial_z A_z)\boldsymbol{j} + (\partial_z\partial_x A_x + \partial_z\partial_y A_y + \partial_z^2 A_z)\boldsymbol{k}$.　ただし，$\partial x^2 A_x$ などは，$\partial^2 A_x/\partial x^2$ などを意味する.

11.　$\boldsymbol{A} = (cx+e)\boldsymbol{i} + (dy+f)\boldsymbol{j} + \{-(c+d)z + g\}\boldsymbol{k}$.　ただし，$c, d, e, f, g$ は任意定数.

12.　$\boldsymbol{A} = c_1\boldsymbol{i} + (-2z + c_2)\boldsymbol{j} + (3x + c_3)\boldsymbol{k}$.　ただし，$c_1, c_2, c_3$ は任意定数.

13.　$\boldsymbol{n} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{21}}(-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})$,　$x + 2y - 4z = -1$

14.　$\cos\theta = 3(1+\sqrt{6})\sqrt{7}/28$

15.　2 つの座標系において，

$$\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} = \boldsymbol{i}'\frac{\partial}{\partial x'} + \boldsymbol{j}'\frac{\partial}{\partial y'} + \boldsymbol{k}'\frac{\partial}{\partial z'}$$

および，次式を示せばよい.

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = \frac{\partial V_1{}'}{\partial x'} + \frac{\partial V_2{}'}{\partial y'} + \frac{\partial V_3{}'}{\partial z'}$$

16.　t をも含む (t, x, y, z) 空間で考えるとよい.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

3.5 節問略解

問 1　略

問 2　略

練習問題 3.5

1. (a)　x による積分 I：27，II：9，III：，IV：II - I $= -18$，V：$\frac{36}{5}$
　y による積分 I：8，II：14，III：6，IV：II - I $= 6$，V：$\frac{37}{5}$
(b)　I：29，II：11，III：11，IV：-18，：$\frac{46}{5}$
(c)　I：35，II：23，III：$3\sqrt{13}$，IV：35

2. $\boldsymbol{V}//d\boldsymbol{R}$ である．

3. 0

4. $\dfrac{1}{3}$

5. 球座標を使う．
$$\iiint_V \boldsymbol{f}dV = \frac{4\pi}{15}\boldsymbol{j},\quad \iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dS = 0,\quad \iint_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f})dS = -\pi\boldsymbol{i}$$

6. $\dfrac{171}{32}\pi$

7. $-\displaystyle\iint_S p\boldsymbol{n}\cdot dS = \frac{2\pi a^3\rho_0 g}{3}\boldsymbol{k}$　($\boldsymbol{k}$ は z 方向の単位ベクトル)

8. $S = \displaystyle\int_C rds,\quad V = 2\pi\iint_{S_0} rdS$

9. $S = 4\pi^2 ah,\quad V = 2\pi^2 ha^2$

10. $\displaystyle\iint_S x^2y^2z^2dS = \frac{\pi h^2a^6}{12} + \frac{\pi h^3a^5}{6},\quad \iiint_V x^2y^2z^2dV = \frac{\pi h^3a^6}{36}$

11. 略

12. $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$ とおけ．

13. $\dfrac{3}{2}\pi a^2$

14. 略

15. 式 (3.104) で $\boldsymbol{\nabla} = \phi\boldsymbol{A}$ ととれ，$\boldsymbol{A}$ は定ベクトルである．

16. 式 (3.104) で $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ ととる．

17. 式 (3.104) で $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{A}$ ととる．

18. $\boldsymbol{f}$ の各成分に対して，式 (3.106) を使う．

19. $\boldsymbol{g}$ の各成分に対して，式 (3.104) を使う．

20. ガウスの発散定理において，$\boldsymbol{f} = \phi\boldsymbol{\nabla}\varphi$ ととった式を使う．