工学のための物理数学 1 章練習問題　詳解

練習問題 1.1

1. 関数 $f(z)=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$，$(z=x+iy)$ は，平面全体で解析的であることを示し，その導関数を求めよ．

$f(z)=u+iv$ とおくと，$u=e^{-y}\cos x$，$v=e^{-y}\sin x$ である．このとき，$u_x=-e^{-y}\sin x$，$u_y=-e^{-y}\cos x$ であり，$v_x=e^{-y}\cos x$，$v_y=-e^{-y}\sin x$ となることから，コーシー-リーマンの方程式 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ が成り立ち，$f(z)$ は平面全体で解析的である．

よって，導関数は，

$$f'(z)=u_x+iv_x=-e^{-y}\sin x+ie^{-y}\cos x$$

2. 複素関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ に関して，コーシー-リーマンの方程式を，極形式 $z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を用いて記述せよ．

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ より，

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta)$$

同様に，

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta)$$

ここで，コーシー・リーマンの方程式から，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

したがって，

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta=-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta\right)=-\frac{\partial v}{\partial r}$$

同様に，

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta=\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta=\frac{\partial u}{\partial r}$$

よって，

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

となり，極形式を用いたコーシー・リーマンの方程式が導出された．

3. 方程式 $e^{iz} = 1 + i$ を解け．

$z = x + iy$ とおくと, $e^{iz} = e^{ix-y} = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ より, $e^{-y} = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $x = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi$ (n は整数), $y = -\ln\sqrt{2}$ なので,

$$z = \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) - i\ln\sqrt{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

4. 方程式 $\cos z = 1$ を解け．

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1$ より,

$$e^{2iz} - 2e^{iz} + 1 = 0$$

これは，e^{iz} についての 2 次式であり，かつ重解を持つので,

$$e^{iz} = e^{-y+ix} = 1$$

したがって，$e^{-y} = |1| = 1$，$e^{ix} = 1$ であり，$x = \pm 2n\pi$，$y = 0$ となり，$z = 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

5. 自然対数，$\ln 4$，$\ln(-3i)$，$\ln(4-3i)$ の主値を求めよ．ただし，$\ln|2| = 0.6931$，$\ln|3| = 1.0986$，$\ln|5| = 1.6094$，$\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = -0.6435$ とする．

$\ln 4 = 2\ln|2| + i\arg 4 = 1.3862 \pm 2n\pi i$

$\ln(-3i) = \ln|-3i| + i\arg(-3i) = 1.0986 - \dfrac{\pi}{2}i \pm 2n\pi i$

$\ln(4-3i) = \ln|4-3i| + i\arg(4-3i) = \ln|5| + i\arg(4-3i) = 1.6094 - i\,(0.6435 \pm 2n\pi)$

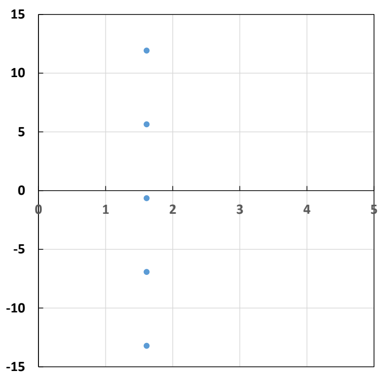

図 **A1-1**　$\ln(4-3i)$ に対応するいくつかの値

6. ベキ関数 i^i の主値を求めよ．

$i=e^{i\left(\frac{\pi}{2}\pm 2n\pi\right)}$ なので，$\ln i=i\left(\frac{\pi}{2}\pm 2n\pi\right)$ である．

したがって，

$i^i=e^{i\ln i}=\exp\,(i\ln i)=\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2}i\pm 2n\pi i\right)\right\}=\exp\left\{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\mp 2n\pi\right\}$ より，主値（$n=0$）は $e^{-\frac{\pi}{2}}$ である．

練習問題 1.2

1. 図 A1-2 に示すように，0 から $1+i$ に至る，経路 C_1 と C_2 に沿って，次の関数を積分せよ．ただし，曲線 C_1 は，$x=y^2$ の一部とする．

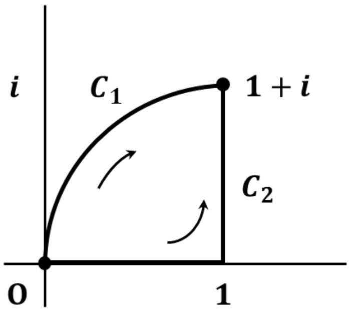

図 **A1-2**　経路 C_1，C_2 に沿う線積分

i)　$f(z)=\bar{z}$

経路 C_1 について考える. $y=t$，$x=t^2$ とおくと, 曲線 C_1 は, $z=x+iy=t^2+it$ $(0\le t\le 1)$ より，$dz=(2t+i)\,dt$ であり，$\bar{z}=t^2-it$ となる．

したがって，

$$\int_{C_1}\bar{z}\,dz=\int_0^1(t^2-it)\,(2t+i)\,dt=\int_0^1(2t^3+t)\,dt-i\int_0^1 t^2\,dt=1-\frac{i}{3}$$

となる．

次に経路 C_2 を $x=1$ で経路 I と II に分割して考える．このとき，

経路 I は，$z=s$ $(0\le s\le 1)$，$dz=ds$

経路 II は，$z=1+it$ $(0\le t\le 1)$，$dz=idt$

したがって，

$$\int_{C_2}\bar{z}\,dz=\int_0^1 s\,ds+\int_0^1(1-it)\,idt=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^1+i\left[t-i\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=1+i$$

となる．

ii)　　$f(z) = z^2$

$z = x + iy$，$f(z) = u + iv$ とおくと，$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = u + iv$ となる．ここで，$u_x = v_y$，$u_y = -v_x$ より，コーシー-リーマンの方程式が成立するので，$f(z)$ は領域内で解析的であり，この積分は経路に依存しない．よって，

$$\int_{C_1} z^2\ dz = \int_{C_2} z^2\ dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{-2+2i}{3}$$

である．

2. 円 $C : |z| = 3$ に対して，次式の成立することを示せ．

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-1)}\,dz = 0$$

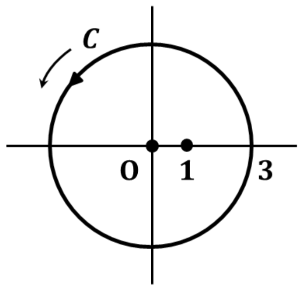

図 **A1-3**　積分経路 C

まず，被積分項は，

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$$

であり，円 C は，$x = 0, 1$ の各点を囲む．このとき，被積分項は，点 $x = 0, 1$ において正則ではないが，これらの点を中心として，円 C と交わらないように，十分に小さい半径 r の円周を描くことができる．ここで，例題 2 より，

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases}$$

であることから，

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z-1)}\,dz = \oint_C \frac{1}{z-1}\,dz + \oint_C \frac{1}{z}\,dz + \oint_C \frac{1}{z^2}\,dz = 2\pi i - 2\pi i - 0 = 0$$

となる．

3. 円 $C : |z-1| = 1$ に対して，次式の成立することを示せ．

$$\oint_C \frac{1}{z^2-4z+3}\,dz = -\pi i$$

先ほどと同様に考えると，被積分項は，

$$\frac{1}{z^2-4z+3} = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}\right)$$

であり，円 C は，$x=1$ を囲む．また，$x=3$ は円周の外部にあるので，コーシーの積分定理より，

$$\oint_C \frac{1}{z^2-4z+3}\,dz = \frac{1}{2}\left(\oint_C \frac{1}{z-3}\,dz - \oint_C \frac{1}{z-1}\,dz\right) = \frac{1}{2}\,(0-2\pi i) = -\pi i$$

となる．

4. 円 $C : |z| = 1$ に対して，次の積分の値を求めよ．

$$\oint_C \frac{z^3+1}{z^2-4iz}\,dz$$

被積分項を，

$$\frac{z^3+1}{z^2-4iz} = \frac{z^3+1}{z(z-4i)} = \frac{f(z)}{z}$$

とおくと，コーシーの積分公式から，

$$\oint_C \frac{z^3+1}{z^2-4iz}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i\,f(0) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4i}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

である．

練習問題 1.3

1. 対数 $\mathrm{Ln}\,\frac{1-z}{1+z}$ を $|z|<1$ として，$z=0$ のまわりで級数展開せよ．

例題 1 の解答より，関数 $f(z)$ のテイラー級数は，$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ として，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

と表される．

ここで，$z_0 = 0$ とすると，$f^{(0)}(0) = \mathrm{Ln}\,1 = 0$，$f^{(1)}(0) = \frac{1}{1+0} = 1$，$f^{(2)}(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$，$\cdots$ であることから，

$$\mathrm{Ln}\,(1+z) = a_0 0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

z を $-z$ で置換すると，

$$\mathrm{Ln}\,(1-z) = -\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)$$

よって，

$$\mathrm{Ln}\,\frac{1-z}{1+z} = \mathrm{Ln}\,(1-z) - \mathrm{Ln}\,(1+z) = -\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right) - \left(z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$= -2\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)$$

である．

2. 指数関数 $f(z) = e^z$ を $z_0 = 0$ として，級数展開せよ．

$(e^z)' = (e^z)^{(n)} = e^z$ であることから，$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ として，

$$a_0 = \tfrac{1}{0!},\ \ a_1 = \tfrac{1}{1!},\ \ a_2 = \tfrac{1}{2!},\ \ \cdots$$

よって，

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

のマクローリン級数が得られる．

ここで，$z = iy$ とおくと，

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!} = 1+iy+\frac{(-y^2)}{2!}+i\frac{(-y^3)}{3!}+\frac{y^4}{4!}+i\frac{y^5}{5!}+\frac{(-y^6)}{6!}+\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i\sin y$$

となる．これは，1.1.7 項で示したオイラーの公式そのものである．

3. 三角関数 $\cos z$，$\sin z$ をマクローリン展開せよ．

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i\sin z$$

であることから，

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

となる．

4.　関数 $f(z) = z^3 e^{1/z}$ を $z = 0$ を中心として，ローラン展開せよ．

2.の解答より，e^z のマクローリン展開は，

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

と表される．ここで，z を $\frac{1}{z}$ で置換すると，

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \frac{1}{5!\,z^5} + \cdots$$

よって，

$$f(z) = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \frac{1}{5!\,z^5} + \cdots\right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!\,z} + \frac{1}{5!\,z^2} + \cdots$$

ただし，$|z| > 0$ である．

5.　関数 $f(z) = \frac{3}{(z-1)(z-2)}$ を次の円環領域でローラン展開せよ．

i)　$1 < |z| < 2$

ii)　$0 < |z-1| < 1$

iii)　$|z-2| > 1$

例題 3 の解答より，$|z| < 1$ のとき，関数 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ のローラン展開は，

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

と表される．

i)　$1 < |z| < 2$ であることから，$|1/z| < 1$，$|z/2| < 1$ なので，

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-1/z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2(1-z/2)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots\right)$$

ここで，

$$f(z) = \frac{3}{(z-1)(z-2)} = -\frac{3}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$= -3\left\{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots\right)\right\}$$

ii)　$z = 1 + w$ とおくと，$0 < |w| < 1$ となるので，

$$f(z)=\frac{3}{(z-1)(z-2)}=\frac{3}{w(w-1)}=-\frac{3}{w(1-w)}=-\frac{3}{w}\sum_{n=0}^{\infty}w^n=-\frac{3}{w}(1+w+w^2+\cdots+w^{n+1}+\cdots)$$

$$=-3\left(\frac{1}{w}+1+w+w^2+\cdots+w^n+\cdots\right)=-3\left\{\frac{1}{z-1}+1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots+(z-1)^n+\cdots\right\}$$

iii) $z=2+w$ とおくと，$|w|>1$ となるので，

$$f(z)=\frac{3}{(z-1)(z-2)}=\frac{3}{(w+1)w}=\frac{3}{w^2(1+1/w)}$$

$$=\frac{3}{w^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{w}\right)^n=\frac{3}{w^2}\left\{1-\frac{1}{w}+\frac{1}{w^2}-\frac{1}{w^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{w^{n-2}}+\cdots\right\}$$

$$=3\left\{\frac{1}{w^2}-\frac{1}{w^3}+\frac{1}{w^4}-\frac{1}{w^5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{w^n}+\cdots\right\}$$

$$=3\left\{\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{1}{(z-2)^5}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}+\cdots\right\}$$

と表される．

6. 関数 $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$ を，単位円 $C:|z|=1$ のまわりに反時計方向に積分せよ．

練習問題 2 の解答より，$\cos z$ のマクローリン級数が，

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots$$

であることから，$|z|>0$ に対して収束する $f(z)$ のローラン級数は，

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!\,z}+\frac{z}{4!}-\frac{z^3}{6!}+\cdots$$

となる．このとき，留数は $\frac{1}{2!}$ なので，

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint_C\frac{\cos z}{z^3}\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)=\pi i$$

が得られる．

7. 関数 $f(z)=\frac{z+3}{z(z-1)(z-2)}$ を，単位円 $C:|z|=3$ のまわりに反時計方向に積分せよ．

$z=0$，1，2 における 1 位の極は，閉曲線 C の内部に存在する．

$z=0$ における留数は，

$$\operatorname{Res}f(z)=\operatorname{Res}\frac{z+3}{z(z-1)(z-2)}=\lim_{z\to 0}z\left\{\frac{(z+3)}{z(z-1)(z-2)}\right\}=\frac{3}{2}$$

$z=1$ における留数は，

$$\operatorname{Res} f(z) = \operatorname{Res} \frac{z+3}{z(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to1} (z-1)\left\{\frac{(z+3)}{z(z-1)(z-2)}\right\} = -4$$

$z = 2$ における留数は,

$$\operatorname{Res} f(z) = \operatorname{Res} \frac{z+3}{z(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to2} (z-2)\left\{\frac{(z+3)}{z(z-1)(z-2)}\right\} = \frac{5}{2}$$

留数定理より,

$$\oint_C \frac{z+3}{z(z-1)(z-2)}\, dz = 2\pi i \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{5}{2}\right) = 0$$

である.

8. 関数 $f(z) = \frac{z^2}{z^6+1}$ として，次の積分値 I を求めよ.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\ dx$$

方程式 $z^6 + 1 = 0$ の根は，$z^6 = -1 = e^{i\pi + 2k\pi}$ より,

$$z = e^{i(1+2k)\pi/6},\ (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

この中で上半平面にあるのは，$k = 0, 1, 2$ に対応する $z = e^{i\pi/6}$，$e^{i\pi/2}$，$e^{i5\pi/6}$ である.

$z = e^{i\pi/6}$ における留数は,

$$\operatorname{Res} f(z) = \left[\frac{z^2}{6z^5}\right]_{z=e^{i\pi/6}} = \frac{1}{6}e^{-i\pi/2} = \frac{1}{6}(-i)$$

$z = e^{i\pi/2}$ における留数は,

$$\operatorname{Res} f(z) = \left[\frac{z^2}{6z^5}\right]_{z=e^{i\pi/2}} = \frac{1}{6}e^{-i3\pi/2} = \frac{1}{6}i$$

$z = e^{i5\pi/6}$ における留数は,

$$\operatorname{Res} f(z) = \left[\frac{z^2}{6z^5}\right]_{z=e^{i5\pi/6}} = \frac{1}{6}e^{-i\pi/2} = \frac{1}{6}(-i)$$

ここで，半円 C と実軸（$-r \le x \le r$）をつなぎ合わせた閉曲線を Γ とすると，留数定理によって,

$$\int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_C f(z)\, dz = \oint_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i\left(-\frac{i}{6} + \frac{i}{6} - \frac{i}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

さて，半円 C 上の点 z に対して，$|z| = r$，$|z^6 + 1| \ge |z^6| - 1$ なので,

$$|f(z)| = \left|\frac{z^2}{z^6+1}\right| \le \frac{z^2}{|z^6| - 1} = \frac{r^2}{r^6 - 1}$$

一方，半円 C の弧長は πr であることから,

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \le \frac{r^2}{r^6-1}\ \pi r = \frac{\pi r^3}{r^6 - 1}$$

となる．さらに,

$$\lim_{r\to\infty}\left(\int_C f(z)\,dz\right) \le \lim_{r\to\infty}\frac{\pi r^3}{r^6-1} = 0$$

すなわち，式(1.125) で示したように，$0 \le \arg z \le \pi$ のとき，$z \to \infty$ に対して，$|zf(z)|$ は 0 に収束する．

したがって，

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \frac{\pi}{3}$$

である．

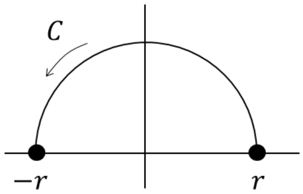

図 **A1-4**　半円 C と実軸（$-r \le x \le r$）をつなぎ合わせた閉曲線 Γ