

演習問題解答・解説

1 波動伝送工学とその基礎事項

1.1 出力端の座標が $z = p$ であった場合、 z 座標は図のようになる。したがって、式 (1.26), (1.27) は改めて以下のように求められる。まず、式 (1.7), (1.8) に関し、出力端では $V(p)/I(p) = X_L$ だから、 $z = p$ を代入して辺々除算すると次式を得る。

$$Z_L = \frac{V_i e^{-j\beta p} + V_r e^{j\beta p}}{V_i e^{-j\beta p} - V_r e^{j\beta p}} Z_c \quad (1.26)$$

ここで、 $\Gamma_0 = V_r e^{j\beta p} / (V_i e^{-j\beta p})$ とおけば、

$$\frac{Z_L}{Z_c} = \frac{V_i e^{-j\beta p} + V_r e^{j\beta p}}{V_i e^{-j\beta p} - V_r e^{j\beta p}} = \frac{1 + V_r e^{j\beta p} / (V_i e^{-j\beta p})}{1 - V_r e^{j\beta p} / (V_i e^{-j\beta p})} = \frac{1 + \Gamma_0}{1 - \Gamma_0} \quad (1.27)$$

となり、式 (1.27) が得られる。なお、出力端から入力側へ l [m] の所 ($z = p - l$ の所) の入射波と反射波はそれぞれ図 1.6 のようになり、式 (1.30)~(1.33) も同様に成り立つ。

1.2 式 (1.52) の両辺の逆数をとると、 $r + jx\hat{z} = 1/\hat{y}$, $\hat{y} = g + jb$ だから、左辺は $g + jb$ となる。したがって、

$$g + jb = \frac{1 - u - jv}{1 + u + jv} \quad (A1.1)$$

となる。右辺の分母を実数化して分母を払うと

$$(g + jb)(u^2 + v^2 + 2u + 1) = 1 - u^2 - v^2 - j2v \quad (A1.2)$$

となる。両辺の実部および虚部がそれぞれ等しいので、移項して整理すると

$$(g + 1)(u^2 + v^2) + 2gu + g - 1 = 0 \quad (A1.3)$$

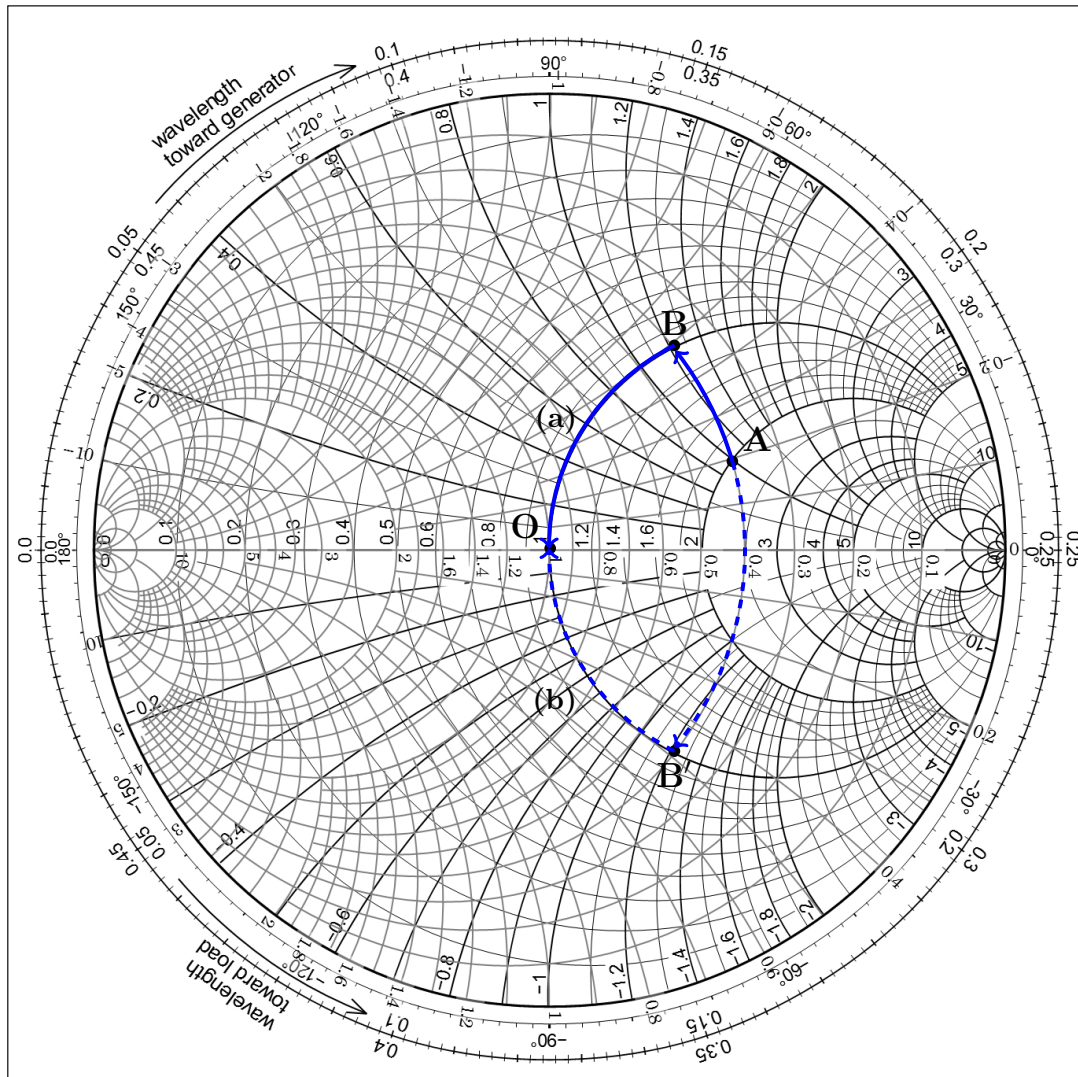
$$b(u^2 + 2u + 1) + bv^2 + 2v = 0 \quad (A1.4)$$

となる。よって、以下の式を得る。

$$\left(u + \frac{g}{g+1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{g+1}\right)^2 \quad (A1.5)$$

$$(u+1)^2 + \left(v + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{b}\right)^2 \quad (A1.6)$$

1.3 まず、負荷インピーダンスを $z_c = 50 [\Omega]$ で規格化し、 \hat{z}_A をイミタンスチャート上にプロットし、A 点とする。一般に、集中定数によるインピーダンス変換は、シリーズの素子によりリアクタンスを加算し、またはシャントの素子によりサセプタンスを加算することで行われる。



したがって、イミタンスチャート上ではそれぞれ、定抵抗円上または定コンダクタンス円上を移動して、整合点 O（規格化インピーダンス $\hat{z}_O = 1 + j0$ ）に変換するため、集中定数 2 素子で設計すると、(a) 説明図の実線矢印の $A \rightarrow B \rightarrow O$ の経路と、(b) 破線矢印の $A \rightarrow B' \rightarrow O$ の経路、の 2 通りの設計が可能である。

まず、 $A \rightarrow B$ （または $A \rightarrow B'$ ）が定コンダクタンス円上の移動だから、まずサセプタンス素子（=リアクタンス素子、つまり L や C）を負荷に並列（シャント）に接続する。次に $B \rightarrow O$ （または $B' \rightarrow O$ ）の移動が定抵抗円だから、リアクタンス素子を、上記負荷とサセプタンス素子の並列回路に直列（シリーズに）接続することになる。つまり、図 1.17(b) の回路構成で設計できる。

まず (a) の場合は、A 点の正規化アドミタンス、B 点の正規化アドミタンス、B 点の正規化インピーダンスをそれぞれチャートから読むと、

$$\hat{y}_A = 0.4 - j0.2, \quad \hat{y}_B = 0.4 - j0.49, \quad \hat{z}_B = 1 + j1.22 \quad (\text{A1.7})$$

である。ゆえに、 $A \rightarrow B$ のシャントのサセプタンス B_{b1} については

$$jB_{b1} = \frac{\hat{y}_B - \hat{y}_A}{Z_c} = -j\frac{0.28}{50} [\text{S}] \quad (\text{A1.8})$$

で、リアクタンスに直すと、

$$jX_{b1} = \frac{1}{jB_{b1}} = j\frac{50}{0.28} = j179 [\Omega] \quad (\text{A1.9})$$

となる。また、 $B \rightarrow O$ のシリーズのリアクタンス X_{b2} については、

$$jX_{b2} = Z_c(\hat{z}_O - \hat{z}_B) = 50(-j1.22) = -j61 [\Omega] \quad (\text{A1.10})$$

を得る。これらの正、負のリアクタンスはそれぞれ L, C で実現できるので、 $jB_{b1} = j2\pi fL$ より、

$$L = \frac{X_{b1}}{2\pi f} = \frac{179}{2\pi 150 \times 10^6} = 1.89 \times 10^{-7} = 189 [\text{nH}] \quad (\text{A1.11})$$

をシャントに、さらに、 $jX_{b2} = 1/(j2\pi fC)$ より、

$$C = -\frac{1}{2\pi fX_{b2}} = \frac{1}{2\pi 150 \times 10^6 \times 62} = 1.7 \times 10^{-11} = 17 [\text{pF}] \quad (\text{A1.12})$$

を得る。

また、(b) の場合も同様に、まず B' 点の正規化インピーダンスが $\hat{y}_{B'} = 0.4 + j0.48$ だから、 $A \rightarrow B'$ のシャントのサセプタンス B_{b1} については、

$$jB_{b1} = \frac{\hat{y}_{B'} - \hat{y}_A}{Z_c} = j\frac{0.68}{50} [\text{S}] \quad (\text{A1.13})$$

であり、 $B' \rightarrow O$ のシリーズのリアクタンス X_{b2} については、図の対称性より、

$$jX_{b2} = -j61 [\Omega] \quad (\text{A1.14})$$

を得る。正のサセプタンスおよび正のリアクタンスはそれぞれ C, L で実現できるので、

$$C = \frac{B_{b1}}{2\pi f} = \frac{0.68/50}{2\pi 150 \times 10^6} = 1.4 \times 10^{-11} = 14 [\text{pF}] \quad (\text{A1.15})$$

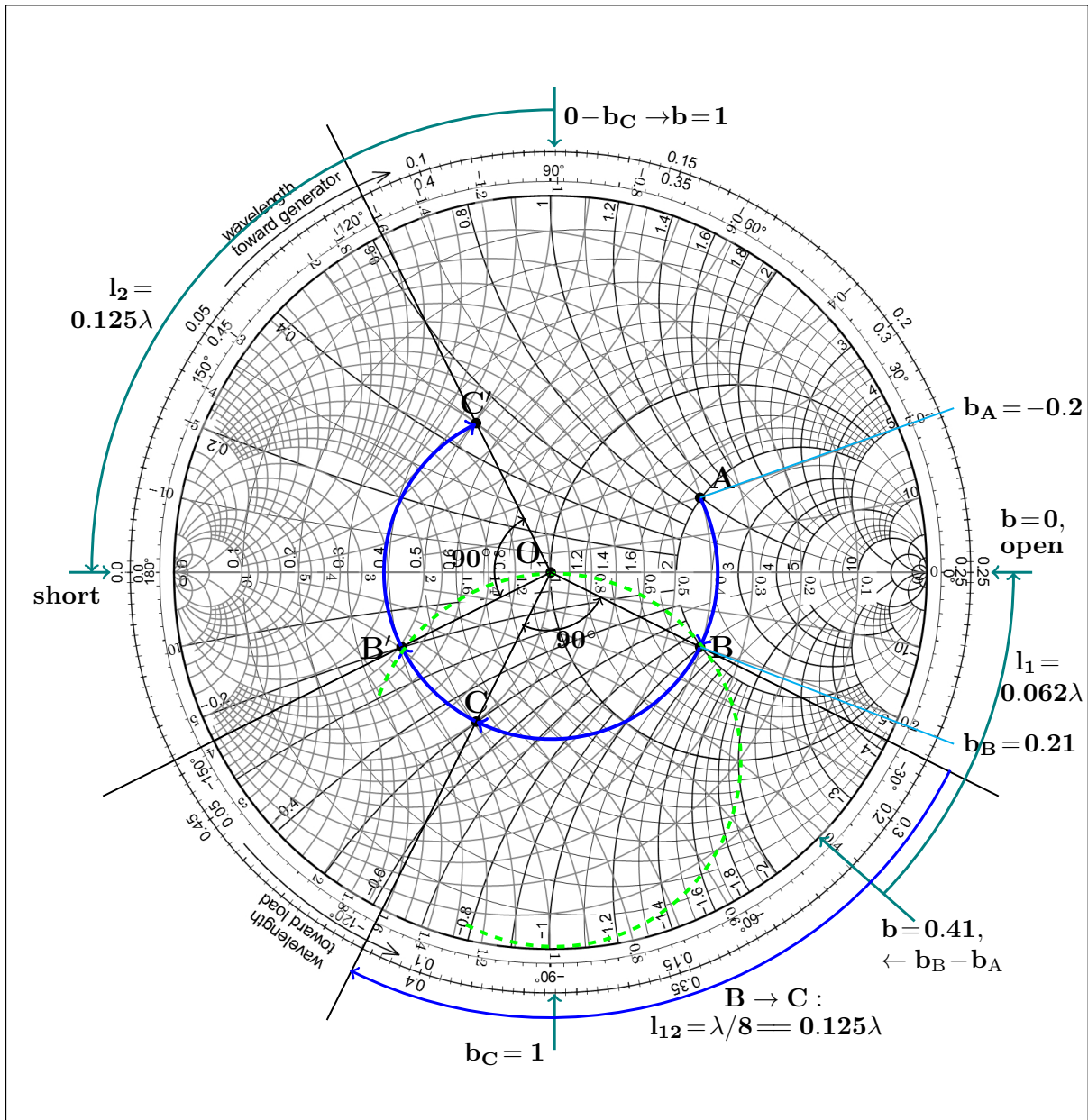
をシャントに、さらに、 $jX_{b2} = j2\pi fL$ より

$$L = \frac{X_{b2}}{2\pi f} = \frac{61}{2\pi 150 \times 10^6} = 6.5 \times 10^{-8} = 65 [\text{mH}] \quad (\text{A1.16})$$

をシリーズに入れば整合がとれる（本書の演習問題略解は一部に誤りあり。正誤表参照のこと）。

1.4 まず、負荷インピーダンスを $z_c = 50 [\Omega]$ で規格化し、 $\hat{z}_A = 2 + j1$ をイミタンススミスチャート上にプロットし、A 点とする。この点の規格化アドミタンスは $\hat{y}_A = 0.4 - j0.2$ である。

さて、図 1.20(b) の 2 スタブ整合では、まず負荷にスタブ 1 によるシャントのサセプタンスを加え、チャート上の O を中心とした円（等 VSWR 円）上を $l_{12} = \lambda/8$ 、つまり 90° だけ時計回り



(wavelength toward generator) に移動し、スタブ 2 で $g = 1$ の定コンダクタンス円上を移動して整合点 O に至る。したがって、スタブ 1 による移動先は、 $g = 1$ の定コンダクタンス円を、点 O を中心に反時計方向に 90° 回転させた円（説明図中破線で示した円）上にある必要がある。そこで、説明図のように A を通る定コンダクタンス円 ($g = 0.4$) 上を A から時計回りに $\lambda/8$, すなわち 90° 移動すると、 B 点に至る。これを O を中心に時計回りに 90° 回転して C 点に至り、スタブ 2 によるサセプタンスで $g = 1$ の定コンダクタンス円上を上方向に移動して O に至る。

A 点の正規化サセプタンスは $b_A = -0.2$, B 点の正規化サセプタンスは $b_B = 0.21$ だから、スタブ 1 では $b_B - b_A = 0.41$ だけサセプタンスを加えることになる。この値を実現するスタブ長を求めるため、 $b = 0.41$ の点をチャートの円周上 ($g = 0$) にプロットする。この点から反時計回り

(wavelength toward load) にチャート右端のオープン点 ($\Gamma = 1, \hat{y} = 0$) に至るまでの波長目盛の差を読むと 0.062λ である。この値がオープンスタブとした場合のスタブ長が l_1 である。

ショートスタブとする場合は、チャート左端のショート点 ($\Gamma = -1, \hat{z} = 0$) に至るまでの目盛差となるので、 $0.025\lambda + 0.062\lambda = 0.312\lambda$ となって長くなる。同様にスタブ2は、C点の正規化サセプタンスは $b_C = 1$ 、O点の正規化サセプタンスは0なので、 $0 - b_C = -1$ だけサセプタンスを加えることになる。この値を実現するスタブ長を求めるため、 $b = -1$ の点をチャートの円周上 ($g = 0$) にプロットする。この点から反時計回りにショート点に至るまでの波長目盛の差を読むと 0.125λ である。この値がショートスタブでのスタブ長 l_2 である。

オープンスタブとする場合は、オープン点に至るまでの波長目盛差 $0.25\lambda + 0.125\lambda = 0.375\lambda$ がスタブ長となるが、長くなるのと理想的な $\hat{y} = 0$ のオープンスタブの形成は困難な問題（本書1.4.2参照）がある。最後に波長短縮率 0.65 を算入し、 $\lambda = 0.65c/f, f = 3 \times 10^9 [\text{Hz}], c = 3 \times 10^8 [\text{m/s}]$ を代入して得られる長さが各スタブ長およびスタブ間隔の長さの設計数値である。

上記のほか、 $A \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow O$ の経路による設計も考えられる。この場合はスタブ1。スタブ2ともC性で所要正規化サセプタンスはそれぞれ $1.2, 1$ となるので、オープンスタブで $l_1 = 0.14\lambda, l_2 = 0.125\lambda$ となる（本書の演習問題略解は一部に誤りあり。正誤表参照）。ただし、スタブ1が長くなるのと、上記オープンスタブの問題点がある。

2 マイクロ波伝送線路

2.1 $\varepsilon_r = 2.2, W/h = 2$ を式 (2.18) に代入することで、実効比誘電率 ε_e が 1.72 と求まる。さらに、この実効比誘電率 ε_e を式 (2.20), (2.21) に代入することで、特性インピーダンス Z_c と 30 GHz における基板内波長 λ_g が、それぞれ $68 [\Omega], 7.6 [\text{mm}]$ と求まる。

2.2 TM_{mn} モードは磁界に伝搬方向成分を持たないので $H_z = 0$ であり、 z 方向の変化が $\exp(-\gamma z)$ であるため、その偏微分をとると $-\gamma$ が掛かることに注意する。マクスウェルの方程式の成分の式は下記の通りとなる。

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (\text{A2.1})$$

$$-\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (\text{A2.2})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{A2.3})$$

$$\gamma H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (\text{A2.4})$$

$$-\gamma H_x = j\omega\varepsilon E_y \quad (\text{A2.5})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \quad (\text{A2.6})$$

ただし、 γ は伝搬定数であり、位相定数 β と減衰定数 α を用いて $\gamma = \alpha + j\beta$ と表される。これらを

整理して電磁界分布を E_z で表すと下記の通りとなる.

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (\text{A2.7})$$

$$H_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (\text{A2.8})$$

$$E_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (\text{A2.9})$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (\text{A2.10})$$

これらはヘルムホルツの方程式を満たすので, その z 成分の式は下記となる.

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0 \quad (\text{A2.11})$$

ただし,

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2 \quad (\text{A2.12})$$

である. この微分方程式を, 図 2.14 に示す導波管の導体壁面における次の境界条件の下で解く.

$$E_x(y=0, b) = 0, \quad E_y(x=0, a) = 0, \quad E_z(x=0, a, y=0, b) = 0 \quad (\text{A2.13})$$

E_z が x の関数と y の関数で変数分離できるとすると, 次式で表される.

$$E_z = X(x)Y(y) \quad (\text{A2.14})$$

これを式 (A2.11) に代入すると,

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_c^2 XY = 0 \quad (\text{A2.15})$$

となり, 両辺を XY で割ると,

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_c^2 = 0 \quad (\text{A2.16})$$

となる. この式は X, Y についての恒等式だから, 次の 2 つの式に分けることができる.

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 \quad (\text{A2.17})$$

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 \quad (\text{A2.18})$$

ただし, $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$ である. こうして x, y それぞれ 1 変数の微分方程式に分けられたので, これを解くと次の 2 式が得られる.

$$X = A \sin k_x x + B \cos k_x x \quad (\text{A2.19})$$

$$Y = C \sin k_y y + D \cos k_y y \quad (\text{A2.20})$$

それゆえ, E_z は

$$E_z = (A \sin k_x x + B \cos k_x x)(C \sin k_y y + D \cos k_y y) \quad (\text{A2.21})$$

ただし, A, B, C, D は積分定数である. これらの積分定数と k_x, k_y を, 導波管の金属壁面における境界条件 (A2.13) 式を用いて求める. TE モードの場合には, E_z が常にゼロなので E_x と E_y を求めてこれらに境界条件を適用する必要があったが, TM モードでは E_z の式に境界条件を適用すればよく, 式 (A2.9), (A2.10) で求めた E_x, E_y に境界条件を適用するのと同値となる. そこで $E_z(x=0, a, y=0, b)$ に境界条件を適用する.

まず, 境界条件 $E_z(y=0) = 0$ を適用すると,

$$D = 0 \quad (\text{A2.22})$$

を得る. 同じく, 境界条件 $E_z(y=b) = 0$ を適用すると,

$$C \sin k_y b = 0 \quad (\text{A2.23})$$

となり, n を整数として, 下記の式となる.

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (\text{A2.24})$$

さらに, 境界条件 $E_z(x=0) = 0$ を適用すると,

$$B = 0 \quad (\text{A2.25})$$

となる. 同じく, 境界条件 $E_z(x=a) = 0$ を適用すると,

$$B \sin k_x a = 0 \quad (\text{A2.26})$$

となり, m を整数として, 下記の式となる.

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (\text{A2.27})$$

以上より, $AC = E_{mn}$ として E_z が求まり, これを式 (A2.7) から式 (A2.10) に代入することにより, すべての成分が求まる. すなわち,

$$E_z = E_{mn} \sin k_x x \sin k_y y \quad (\text{A2.28})$$

$$E_x = -\frac{\gamma k_x}{k_c^2} E_{mn} \cos k_x x \sin k_y y \quad (\text{A2.29})$$

$$E_y = -\frac{\gamma k_y}{k_c^2} E_{mn} \sin k_x x \cos k_y y \quad (\text{A2.30})$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon k_y}{k_c^2} E_{mn} \sin k_x x \cos k_y y \quad (\text{A2.31})$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon k_x}{k_c^2} E_{mn} \cos k_x x \sin k_y y \quad (\text{A2.32})$$

$$H_z \equiv 0 \quad (\text{A2.33})$$

を得る.

2.3 方形導波管 WR-34 (広壁幅 $a = 8.6$ mm, 狭壁幅 $b = 4.3$ mm) の TE₁₀, TE₂₀, TE₀₁ モードの遮断周波数 $f_{c10}, f_{c20}, f_{c01}$ は, 式 (2.66) より, それぞれ

$$f_{c10} = \frac{c}{2a} = 17.4 \text{ GHz} \quad (\text{A2.34})$$

$$f_{c20} = \frac{c}{a} = 34.9 \text{ GHz} \quad (\text{A2.35})$$

$$f_{c01} = \frac{c}{2b} = 34.9 \text{ GHz} \quad (\text{A2.36})$$

である. TE₁₀ モードと次に高い遮断周波数を有するモードとの間の周波数で基本モードだけが伝搬するため, その周波数帯域は, 17.4 GHz から 34.9 GHz となる.

2.4 30 GHz における自由空間波長 λ_0 は 10.0 mm であるため, 方形導波管 WR-34 (広壁幅 $a = 8.6$ mm, 狭壁幅 $b = 4.3$ mm) の, TE₁₀ モードの管内波長は, 式 (2.80) より,

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{1 - \left(\frac{10}{2 \cdot 8.6}\right)^2}} = 12.3 \text{ mm} \quad (\text{A2.37})$$

を得る. また, 式 (2.70) より, 誘電体が充填されているときの管内波長が 10 mm となるためには

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{10}{2 \cdot 8.6}\right)^2}} = 10.0 \text{ mm} \quad (\text{A2.38})$$

が成り立ち, これより比誘電率 ε_r を求めると, $\varepsilon_r = 1.34$ となる.

2.5 導波管の管内波長は,

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \quad (\text{A2.39})$$

であることから,

$$k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{2\pi c}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2} \quad (\text{A2.40})$$

となる. これを角周波数 ω で偏微分すると,

$$\frac{\partial k_g}{\partial \omega} = \frac{2\omega}{2c} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2}} = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{2\pi f a}\right)^2}} = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} = \frac{\lambda_g}{c\lambda_0} \quad (\text{A2.41})$$

この逆数が群速度であるので,

$$v_g = \frac{1}{\frac{\partial k_g}{\partial \omega}} = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad (\text{A2.42})$$

を得る.

3 回路素子

3.1 整合がとれている 3 端子回路の散乱行列は以下のように表される.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A3.1})$$

可逆性より, 相反性が成り立つことから, $S_{ij} = S_{ji}$ となる. また, 3.3.1 節で述べたように, 無損失回路の散乱行列はユニタリ性を有することから, $S^\dagger S = I$ が成り立つ. ただし, I は単位行列である.

$$\begin{aligned} S^\dagger S &= \begin{pmatrix} 0 & S_{21}^* & S_{31}^* \\ S_{12}^* & 0 & S_{32}^* \\ S_{13}^* & S_{23}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 & S_{31}^* S_{32} & S_{21}^* S_{23} \\ S_{32}^* S_{31} & |S_{12}|^2 + |S_{32}|^2 & S_{12}^* S_{13} \\ S_{23}^* S_{21} & S_{13}^* S_{12} & |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

ここで, † は随伴行列 (複素共役転置) を, * は複素共役を表す. ところが, 非対角項がゼロとなるためには, S_{31}, S_{21}, S_{32} のうちのいずれか 2 つがゼロになる必要があるが, そのとき, 対角項の少なくともいずれか 1 つ以上がゼロとなるため, これが単位行列にはなりえず, 散乱行列はユニタリ性を満たさないことになる. 以上より, 3 端子回路の無損失整合回路は実現できないことが分かる.

3.2 $1/4$ 波長インピーダンス変成器により, 負荷インピーダンス Z_L は次式のインピーダンスに変換できる.

$$Z\left(\frac{\lambda_g}{4}\right) = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (\text{A3.3})$$

これにより, 端子 A から出力ポート①, ②側を見たインピーダンス Z_{A1}, Z_{A2} は, それぞれ,

$$Z_{A1} = \frac{Z_{01}^2}{Z_0} = \frac{Z_{01}^2}{50} \quad (\text{A3.4})$$

$$Z_{A2} = \frac{Z_{02}^2}{Z_0} = \frac{Z_{02}^2}{50} \quad (\text{A3.5})$$

ポート 1 と 2 への出力電力を 2 : 3 に分配するため, 並列接続であることから, インピーダンスとは反比例し, $Z_{A1} : Z_{A2} = 3 : 2$ となり, 次式が成り立つ.

$$2Z_{A1} = 3Z_{A2} \quad (\text{A3.6})$$

Z_{A1} と Z_{A2} の並列接続からなる合成インピーダンスが, 入力ポートの特性インピーダンスと整合されることから,

$$\frac{1}{Z_{A1}} + \frac{1}{Z_{A2}} = \frac{1}{50} \quad (\text{A3.7})$$

が成り立つ. これに式 (A3.6) を代入すると,

$$\frac{2}{3Z_{A2}} + \frac{1}{Z_{A2}} = \frac{5}{3Z_{A2}} = \frac{1}{50} \quad (\text{A3.8})$$

となり,

$$Z_{A2} = 83 \Omega, \quad Z_{A1} = 125 \Omega \quad (\text{A3.9})$$

が得られる. 式 (A3.4), (A3.5) より,

$$Z_{01} = 64 \Omega, \quad Z_{02} = 79 \Omega \quad (\text{A3.10})$$

となる.