

『楽しく学ぶ材料力学』の演習問題解答, 誤植訂正

成田史成・森本卓也・村澤 剛

2025年10月20日

2017年3月27日作成

2017年4月21日図2.13—2.16追加

2017年5月23日第3章の解答掲載

2017年6月1日演習問題3.8の誤植を修正

2017年9月28日第4章の解答掲載

2017年11月2日第5章の解答掲載, 第6章の解答一部掲載, 第3章までの誤植訂正更新

2017年12月6日第6章の解答掲載

2017年12月18日第7章の解答掲載(演習問題7.8は一部除く), 第7章までの誤植訂正更新

2018年9月28日p.68について再修正, p.70について修正追加

2018年10月12日演習問題3.4の解答を修正

2018年12月7日演習問題4.5の解答を修正

2025年10月20日演習問題4.2の解答を修正

第1章の演習問題解答

1.1

【解答】

応力は式(1.4)より

$$\sigma = \frac{-Q}{A} = \frac{-P}{A} = \frac{-2 \times 10^3}{\pi \left(\frac{10 \times 10^{-3}}{2} \right)^2} = -25.5 \times 10^6 \text{ Pa} = -25.5 \text{ MPa}$$

1.2

【解答】

応力は式(1.4)より^a

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{P}{A} = \frac{75 \times 9.81}{\pi \left(\frac{5 \times 10^{-3}}{2} \right)^2} = 37.5 \times 10^6 \text{ Pa} = 37.5 \text{ MPa}$$

^a 75 kg は質量ですので、単位を kgf にする必要がありますよ。脚注 12 を参照して下さい。

1.3

【解答】

せん断応力は式(1.5)より

$$\tau = \frac{1 \times 10^3}{(10 \times 10^{-3}) \times (8 \times 10^{-3})} = 12.5 \times 10^6 \text{ GPa}$$

また、せん断ひずみは式(1.22)より

$$\gamma = \frac{12.5 \times 10^6}{0.88 \times 10^9} = 14.2 \times 10^{-3}$$

したがって、式(1.10)の γ に上式の値を、 l に 1 mm を代入すると、それは

$$\lambda_s = 14.2 \times 10^{-3} \times 1 = 14.2 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

1.4

【解答】

変形前後の角柱の高さを l および l' とすると、縦ひずみ ε は垂直ひずみの定義式(1.7)より

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l} = \frac{\lambda}{l}$$

であるから、角柱の高さの減少量（縮み量） λ は

$$\begin{aligned}\lambda &= \varepsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{Pl}{AE} = \frac{(-4 \times 10^6) \times 0.2}{(0.1 \times 0.1) \times (206 \times 10^9)} \\ &= -0.388 \times 10^{-3} \text{ m} = -0.388 \text{ mm}\end{aligned}\quad (\text{a})$$

一方、変形前後の角柱の一辺の幅を w および w' とすると、横ひずみ ε' は式(1.8)を参照して^a

$$\varepsilon' = \frac{w' - w}{w} = \frac{\delta}{w} \quad (\text{b})$$

したがって、断面の一辺の増加量 δ はポアソン比の定義式(1.9)を用いて

$$\begin{aligned}\delta &= \varepsilon' w = -\varepsilon \nu w = -\frac{\lambda}{l} \nu w \\ &= -\frac{-0.388 \times 10^{-3}}{0.2} \times 0.30 \times 0.1 = -58.2 \times 10^{-6} \text{ m} = -0.0582 \text{ mm}\end{aligned}\quad (\text{c})$$

^a 式(1.8)は図1.10に示した丸棒を対象に定義されています。角柱の変形前後の図を描いて考えてみましょう。

1.5

【解答】

引張応力 σ は式(1.4)より

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{8 \times 10^3}{(20 \times 10^{-3})(2 \times 10^{-3})} = 200 \times 10^6 \text{ Pa} = 200 \text{ MPa}$$

垂直ひずみ（縦ひずみ） ε は式(1.7)より

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{0.12 \times 10^{-3}}{150 \times 10^{-3}} = 0.8 \times 10^{-3}$$

であるから、ヤング率はフックの法則(1.21)より

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{200 \times 10^6}{0.8 \times 10^{-3}} = 250 \times 10^9 \text{ Pa} = 250 \text{ GPa}$$

横ひずみ ε' は式(1.8)を参照して^a

$$\varepsilon' = \frac{\delta}{w} = \frac{-0.006 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}} = -0.3 \times 10^{-3}$$

であるから、ポアソン比 ν は式(1.9)より

$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\frac{-0.3 \times 10^{-3}}{0.8 \times 10^{-3}} = 0.375$$

^a 脚注19を見てね!

1.6

【解答】

使用するロープを n 本とする。すべてのロープに一様な応力 σ が生じていると考えれば、応力は

$$\sigma = \frac{50 \times 10^3 \times 9.81}{n(\pi \times 0.02^2/4)} = \frac{1.561 \times 10^9}{n} \quad (a)$$

となり、式 (1.23) を考慮すると、次式を満たさなければならない。

$$\sigma \leq \frac{\sigma_B}{3} \quad (b)$$

したがって、式 (a) を式 (b) に代入して整理すると

$$n \geq \frac{1.561 \times 10^9 \times 3}{578 \times 10^6} = 8.102$$

ワイヤは最低 9 本必要となる。

【教科書の訂正】

p.15, 下から 6 行目: また、降伏点は永久変形を起こさない応力の最大値である。→ また、軟鋼の場合、実用上降伏点は永久変形を起こさない応力の最大値と考えてよい。

p.23, 下から 4 行目: 割ろうとしたすぐ → 割ろうとしたらすぐ

p.23, 下から 6 行目: ロープ → ワイヤ

【講義中に出た学生からの質問とその回答】

(随時、更新予定)

第2章の演習問題解答

2.1

【解答】

部材 AB と CB に生じる引張の内力をそれぞれ Q_A , Q_C とすると, x 方向と y 方向の力のつり合いの式は,

$$-Q_A \sin \theta + Q_C \sin \theta = 0, \quad Q_A \cos \theta + Q_C \cos \theta - P = 0$$

これらを連立して解くと

$$Q_A = Q_C = \frac{P}{2 \cos \theta}$$

したがって, 各部材に生じる応力は

$$\sigma = \frac{Q_A}{A} = \frac{Q_C}{A} = \frac{P}{2A \cos \theta}$$

また, 部材の伸び λ は, 式 (1.7) よりひずみ ε を用いて

$$\lambda = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{Pl}{2AE \cos \theta} \quad (a)$$

垂直変位 δ を求めるため, δ と部材の伸び λ との関係について考える. 図 2.13(b) より, $\angle BB'C$ は θ にほぼ等しい^aので, 次の関係が成り立つ.

$$\delta \cos \theta = \lambda \quad (b)$$

式 (a) を式 (b) に代入すると, 垂直変位 δ は

$$\delta = \frac{\lambda}{\cos \theta} = \frac{Pl}{2AE \cos^2 \theta}$$

2 つ以上の直線棒状の部材 (member) を連結して組立てられた骨組構造は, 橋や塔などの建築物に広く利用されている. ヒンジのような自由に回転できる節点 B を滑節 (pin joint; hinged joint), リベットやボルトまたは溶接などで固定されて回転できない節点を剛節 (rigid joint) という. 骨組構造のすべての節点が滑節だから組み立てられたトラスの場合, 節点に荷重が作用したときに各部材は引張あるいは圧縮だけを受け, 曲がることはない. 一方, 節点の一部にでも剛節が含まれる骨組み構造はラーメン (Rahmen) と呼ばれ, 曲げを受ける部材を含む.

^a 理由は分かりますか? 材料力学では, 微小変形を仮定しているので, このような近似は暗黙の了解として使います.

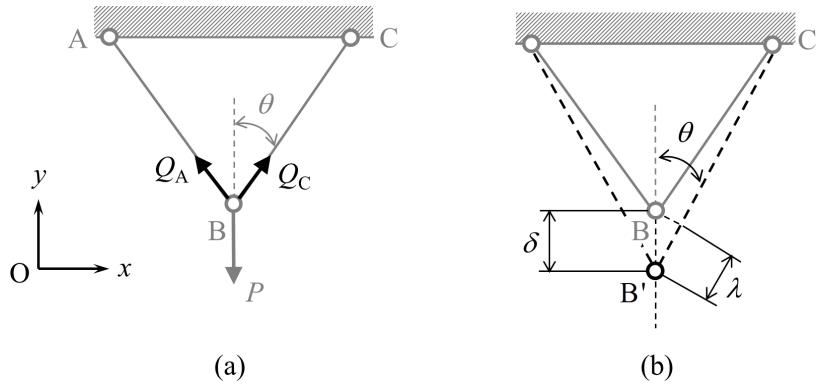


図 2.13

2.2

【解答】

丸棒および円筒に生じる内力、伸びをそれぞれ Q_1, λ_1 および Q_2, λ_2 とすると、 $Q_1 + Q_2 = P$ (式 (2.6) 参照) と式 (2.7) を満足する。したがって、応力は

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{PE_1}{A_1E_1 + A_2E_2}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{PE_2}{A_1E_1 + A_2E_2}$$

また、伸びは

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{Pl}{A_1E_1 + A_2E_2}$$

2.3

【解答】

はじめ鋼材には引張荷重 P が作用しているから、これによる応力は

$$\sigma'_1 = \frac{P}{A_1}$$

P を除去することは圧縮荷重 $-P$ を負荷することと等価である。したがって、演習問題 2.2 の解より、鋼材およびコンクリートに生ずる応力を σ''_1, σ''_2 とすると

$$\sigma''_1 = \frac{E_1}{A_1E_1 + A_2E_2}(-P), \quad \sigma''_2 = \frac{E_2}{A_1E_1 + A_2E_2}(-P)$$

重ね合わせて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma'_1 + \sigma''_1 = \frac{A_2E_2}{A_1(A_1E_1 + A_2E_2)}P \\ \sigma_2 &= \sigma''_2 = -\frac{E_2}{A_1E_1 + A_2E_2}P \end{aligned} \right\}$$

コンクリートは引張りに対して極めて弱い。このため、図のように鋼材をあらかじめ荷重 P で引っ張っておき、この状態でコンクリートを流し込んで、固まった後荷重 P を除去する作製

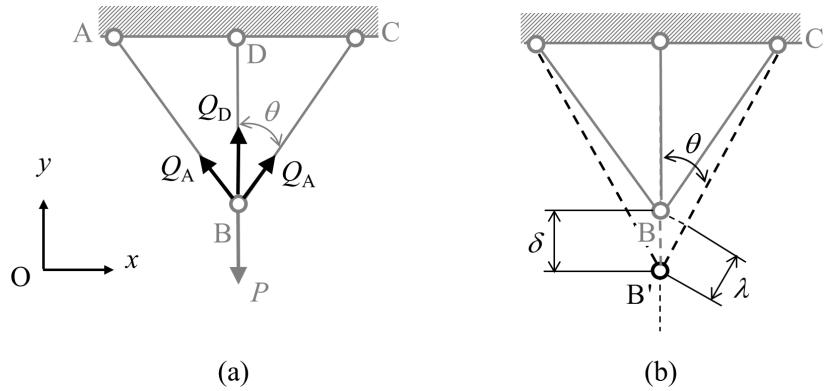


図 2.14

方法がある。これにより、コンクリートには圧縮応力が生じ、その分だけ引張荷重に対して強いことになる^a。

^a 荷重を受けてもコンクリートに引張応力が発生しません。

2.4

【解答】

部材 AB, DB に生じる内力（引張）をそれぞれ Q_A , Q_D とすると^a、 y 方向の力のつり合いの式は

$$Q_D + 2Q_A \cos \theta - P = 0, \quad \therefore Q_D + 2Q_A \cos \theta = P \quad (a)$$

求めたい未知の内力 (Q_A, Q_D) が 2 つあるのに対して、方程式は 1 つしかなく、力のつりあいの式だけでは内力が決定できないので、この問題は不静定問題である。

そこで、各部材の変形について考える。図 2.14(b) より部材 DB の伸びは $\lambda_2 = \delta$ 、部材 AB と CB の伸びは $\lambda_1 = \lambda$ となる。変形が微小で $\angle BB'C$ は θ にほぼ等しいので、次式の関係がなりたつ。

$$\lambda_1 = \lambda = \delta \cos \theta = \lambda_2 \cos \theta \quad (b)$$

一方、フックの法則 (1.21) と $l_2 = l_1 \cos \theta$ の関係を用いると、

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 l_1 = \frac{\sigma_1}{E} l_1 = \frac{Q_A l_1}{EA}, \quad \lambda_2 = \frac{Q_D l_2}{EA} = \frac{Q_D l_1 \cos \theta}{EA} \quad (c)$$

式 (c) を式 (b) に代入すると、 (Q_A, Q_D) に関するもう一つの方程式が次のように得られる。

$$Q_A = Q_D \cos^2 \theta \quad (d)$$

式 (a) と式 (d) から Q_A と Q_D を求める

$$Q_A = \frac{P \cos^2 \theta}{1 + 2 \cos^3 \theta}, \quad Q_D = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \theta} \quad (e)$$

したがって、部材 DB の応力 σ_2 、部材 AB と部材 CB の応力 σ_1 および節点 B の垂直変位 δ は

$$\sigma_1 = \frac{Q_A}{A} = \frac{P \cos^2 \theta}{A(1 + 2 \cos^3 \theta)}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_D}{A} = \frac{P}{A(1 + 2 \cos^3 \theta)}$$

$$\delta = \lambda_2 = \frac{Q_D l_2}{AE} = \frac{P l_2}{AE(1 + 2 \cos^3 \theta)} \quad (f)$$

^a 問題 2.1 より、部材 CB に生じる引張力も Q_A ですよ。x 方向の力のつり合いから求まりましたね。

2.5

【解答】

レールの長さを l とすると、自由膨張によるレールの伸び λ は式 (2.13) で与えられる。実際は接合され長手方向に拘束されているので、仮想外力 P によって式 (2.16) の $-\lambda$ だけ縮んでいる状態である。したがって、 $P = -AE\alpha\Delta T$ となり、熱応力は^a

$$\begin{aligned} \sigma &= -\alpha E \Delta T = -(1.2 \times 10^{-5}) \times (206 \times 10^9) \times (35 - 15) \\ &\approx -49.4 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (a)$$

ちなみに、レールに生じるひずみは、式 (2.14) の ε_t と式 (2.15) の ε_e を足し合わせて、 $\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_e = 0$ となる。

^a 式 (2.31) を暗記しても解は求められますが、複雑な問題に対応できませんよ。

2.6

【解答】

図 2.15 のように、炭素繊維とプラスチック円筒を自由膨張させると^a、炭素繊維およびプラスチック円筒の伸びは、式 (2.13) より初期の長さを l としてそれぞれ

$$\lambda_1 = \alpha_1 \Delta T l, \quad \lambda_2 = \alpha_2 \Delta T l \quad (a)$$

実際は接合されて伸びの差は生じていないので、加熱後の炭素繊維とプラスチック円筒の長さ $l + \lambda$ は等しい。したがって、炭素繊維およびプラスチック円筒に作用する仮想外力をそれぞれ P_1, P_2 とすると、式 (2.16) を考慮して

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{P_1 l}{A_1 E_1} = \lambda_2 + \frac{P_2 l}{A_2 E_2} \quad (b)$$

外力は作用していないので、力のつり合い条件より

$$P_1 + P_2 = 0 \quad (c)$$

式 (a) を考慮し、式 (b) と式 (c) を連立して解くと、仮想外力は

$$P_1 = \frac{E_1 E_2 A_1 A_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T}{E_1 A_1 + E_2 A_2}, \quad P_2 = -\frac{E_1 E_2 A_1 A_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

したがって、熱応力は^b

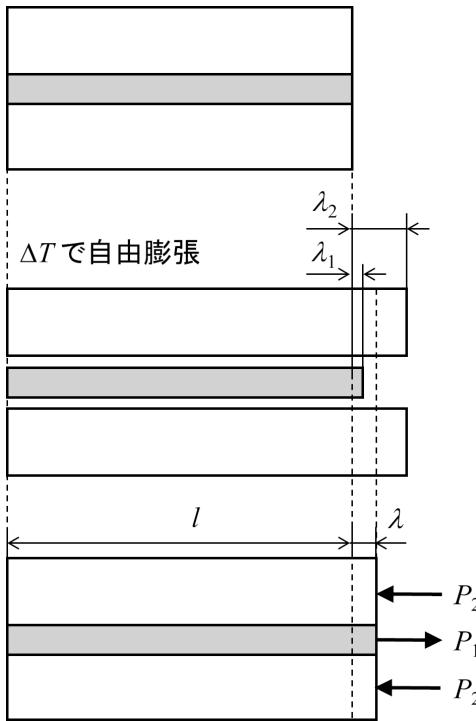


図 2.15

$$\sigma_1 = \frac{E_1 E_2 A_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T}{E_1 A_1 + E_2 A_2}, \quad \sigma_2 = -\frac{E_1 E_2 A_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

上式より、繊維と円筒は、線膨張係数が等しければ、熱応力を生じない。

^a 接合されていないと仮定します。

^b いろいろな解き方がありますが、ここでは p.30 の 1, 2, 3 にしたがって求めました。

2.7 【解答】

1. 石柱 1 の応力、ひずみおよび縮みは、式 (1.4), (1.21), (1.7) より

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{P}{A_1 E}, \quad \lambda_1 = \frac{Pl_1}{A_1 E}$$

同様に、石柱 2 の応力、ひずみおよび縮みは

$$\sigma_2 = \frac{P}{A_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{P}{A_2 E}, \quad \lambda_2 = \frac{Pl_2}{A_2 E}$$

全体の縮み量 λ は

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{Pl_1}{A_1 E} + \frac{Pl_2}{A_2 E} = \frac{P}{E} \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} \right)$$

2. 石柱 1, 2 の自重は式 (2.19) より

$$W_1 = (lA_1)\rho g, \quad W_2 = (lA_2)\rho g$$

したがって、石柱 1, 2 の底面に加わる荷重は

$$\begin{aligned} P + W_1 &= P + lA_1\rho g = \sigma_{\max}A_1 \\ P + W_1 + W_2 &= P + lA_1\rho g + lA_2\rho g = \sigma_{\max}A_2 \end{aligned}$$

数値を代入して

$$A_1 = \frac{P}{\sigma_{\max} - l\rho g} \approx 7.14 \text{ m}^2, \quad A_2 = \frac{P + lA_1\rho g}{\sigma_{\max} - l\rho g} \approx 10.2 \text{ m}^2$$

3. 石柱 1 と 2 の応力は位置に依存して変化し、その最大値はそれぞれ $\sigma_1 = W_1/A_1 = l_1\rho g$, $\sigma_2 = (W_1 + W_2)/A_2 = (lA_1\rho g + lA_2\rho g)/A_2$ である。したがって、石柱 1 と 2 の安全高さ l_1, l_2 とそれらの和は

$$l_1 = \frac{\sigma_0}{\rho g}, \quad l_2 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) \frac{\sigma_0}{\rho g} = \frac{3\sigma_0}{4\rho g}, \quad l_1 + l_2 = \frac{7\sigma_0}{4\rho g}$$

石柱の数を増やし、下端側を太く上端側を細くすると、もっと高くすることが可能になる。樹木の幹や山など自然界のものはみな、このような形をしており、崩れないでいる。

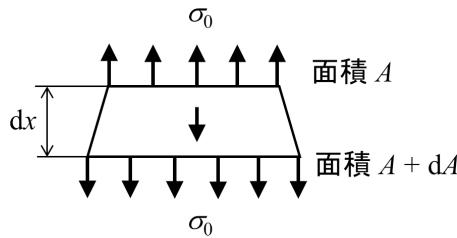


図 2.16

2.8

【解答】

図 2.16 のように、 $x \sim x + dx$ の微小部分について考え、 x における断面積を A 、 $x + dx$ における断面積を $A + dA$ とする。上下面の応力は σ_0 で一定であるから、式 (2.19) を考慮してこの微小部分の力のつり合いを考えると

$$-\sigma_0 A + (Adx)\rho g + \sigma_0(A + dA) = 0, \quad \therefore \frac{1}{A} dA = -\frac{\rho g}{\sigma_0} dx$$

上式を積分すると、 A は

$$\ln A = -\frac{\rho g}{\sigma_0} x + C, \quad \therefore A = e^{-(\rho g / \sigma_0)x + C} \quad (a)$$

$x = 0$ における断面積を A_0 とおくと、式 (a) より

$$A_0 = e^C \quad (b)$$

式 (b) を式 (a) に代入し、 $x = 0$ における応力 $\sigma_0 = -P/A_0$ を考慮すると、断面積 A は

$$A = A_0 e^{-(\rho g / \sigma_0)x} = -\frac{P}{\sigma_0} e^{-(\rho g / \sigma_0)x}$$

【教科書の訂正】

p.29, 10 行目: 長さ l の棒が \rightarrow 長さ l 、断面積 A の棒が

p.29, 式 (2.13) の上: 自由膨張し、長さ $l + \lambda$ になる (図 2.3(b)). このときの伸び \rightarrow 自由膨張する。長さ $l + \lambda$ になったとすると (図 2.3(b)), 伸び

p.30, 脚注 10 : λ/l は \rightarrow 分母の λ/l は

p.31, 例題 2.2 : λ を α とする。 \rightarrow λ を α とし、棒の直径の変化は無視する。

p.32, 図 2.4(b) : $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{t1}$, $\lambda_2 \rightarrow \lambda_{t2}$

p.32, 式 (b) の直前行 : ... 各棒の伸縮量 (λ_{te1} , λ_{te2}) \rightarrow ... 各棒の伸縮量 (λ_{e1} , λ_{e2})

p.32, 脚注 13 : $l = \sigma_F / (\rho g)$ [m] よりも $\rightarrow l = \sigma_R / (\rho g)$ [m] よりも

p.32, 脚注 13 : 表 1.1 を利用して求めてみましょう. \rightarrow 削除

p.33, 問題 2.3 : 鋼材の断面積を A_1 , コンクリートの断面積を A_2 とし, \rightarrow 鋼材の断面積を A_1 , 縦弾性係数を E_1 , コンクリートの断面積を A_2 , 縦弾性係数を E_2 とし,

p.35, 問題 2.7(b) : 20 mm \rightarrow 20 m

【講義中に出た学生からの質問とその回答】

(随時, 更新予定)

第3章の演習問題解答

3.1

【解答】

自由端から任意の位置 x におけるせん断力を F , モーメントを M とすると

$$P + F = 0, \quad \therefore F = -P$$
$$Px + M = 0, \quad \therefore M = -Px$$

したがって

$$R_0 = P, \quad M_0 = -Pl$$

R_0 は式 (3.1) の R_A と一致するが, M_0 は式 (3.2) の M_A と正負が逆である.

3.2

【解答】

図 3.30 を参照して, 固定端での反力 R_A と反モーメント M_A を求める. 力と A 点回りのモーメントのつり合いより

$$-R_A + P = 0, \quad M_A + R_A \times 0 - Pa = 0 \quad (a)$$

任意の位置 x におけるせん断力 F と曲げモーメント M は, 集中荷重 P の作用点を境目にして, AC 間 ($0 \leq x < a$) と CB 間 ($a \leq x < l$) で分けて考える. AC 間 ($0 \leq x < a$) では, 力のつり合いより, 式 (a) を考慮して

$$-R_A + F = 0, \quad \therefore F = R_A = P$$

また, 仮想断面回りのモーメントのつり合いより

$$M_A - R_A x + M = 0, \quad \therefore M = -M_A + R_A x = -P(a - x)$$

一方, CB 間 ($a \leq x < l$) では, 力のつり合いより

$$-R_A + P + F = 0, \quad F = R_A - P = 0$$

また, 仮想断面回りのモーメントのつり合いより

$$M_A - R_A x + P(x - a) + M = 0,$$
$$\therefore M = -M_A + R_A x - P(x - a) = -Pa + Px - Px + Pa = 0$$

経験的にも明らかであろうが, 集中荷重 P の作用点 C よりも自由端側では, せん断力と曲げモーメントが生じていない.

3.3

【解答】

荷重がはりの中央に関して左右対称に作用しているから、支点 A, B における反力は等しく、これを R とおくと

$$R = \frac{P}{2}$$

AC 間 ($0 \leq x < a$) では、力のつり合いより

$$-R + F_{AC} = 0, \quad \therefore F_{AC} = R = \frac{P}{2}$$

となる^a。また、A 点回りのモーメントのつり合いより

$$M_{AC} - Rx = 0, \quad \therefore M_{AC} = Rx = \frac{P}{2}x$$

一方、CD 間 ($a \leq x < l - a$) では、力のつり合いより

$$-R + \frac{P}{2} + F_{CD} = 0, \quad \therefore F_{CD} = 0$$

A 点回りのモーメントのつり合いより、上式を考慮すると

$$-\frac{P}{2}a - F_{CD}x + M_{CD} = 0, \quad \therefore M_{CD} = \frac{Pa}{2}$$

DB 間 ($l - a \leq x < l$) では、力のつり合いより

$$-R + \frac{P}{2} + \frac{P}{2} + F_{DB} = 0, \quad \therefore F_{DB} = -\frac{P}{2}$$

A 点回りのモーメントのつり合いより

$$-\frac{P}{2}a - \frac{P}{2}(l - a) - F_{DB}x + M_{DB} = 0, \quad \therefore M_{DB} = -\frac{P}{2}(x - l)$$

以上より、SFD および BMD は図 3.39 のようになる。4 点曲げの場合、はりの中央部分（荷重点間）には一定の曲げモーメントだけが作用し、はりは純曲げ状態でせん断力を受けていない。一方、図 3.12 のように、3 点曲げの場合は、せん断力も作用し、曲げモーメントは直線的に変化して荷重点で最大となる。

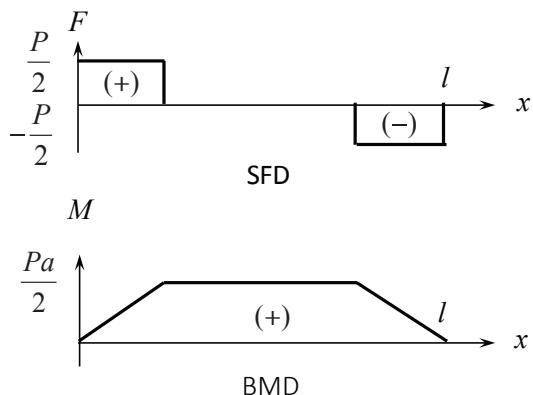
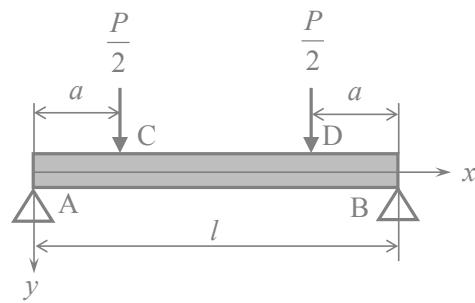


図 3.39

^a ここでは、せん断力や曲げモーメントに下付き添え字をつけて、領域を区別します。

3.4

【解答】

中立軸の位置は、式 (3.18) から求めることができるが、組合せはりの場合は注意が必要である。ヤング率を E とし、鉄と黄銅を下付き添え字 1, 2 で区別する。図心を通る座標系 $O'(y', z')$ を右図のように設定すると、はりに生じる応力は式 (3.14) より、それぞれ次式のようになることができる。

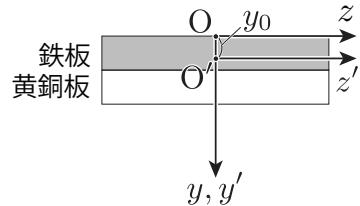
$$\sigma_1 = E_1 \frac{y'}{\rho}, \quad \sigma_2 = E_2 \frac{y'}{\rho} \quad (a)$$

また、純曲げ（モーメント荷重のみが作用）を考えているので、はりの断面に作用する軸方向の内力の総和がゼロとなるので、組み合わせはりでは式 (3.15) は次式のようになる。

$$\int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = 0 \quad (b)$$

式 (b) に式 (a) を代入すると、

$$\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y' dA + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y' dA = 0$$



例題 3.7 と同様に中立軸の位置を y_0 とすると、図から $y' = y - y_0$ の関係があるので

$$E_1 \int_{A_1} (y - y_0) dA + E_2 \int_{A_2} (y - y_0) dA = 0$$

y_0 について整理すると

$$y_0 = \frac{E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

はりの幅を b 、高さを $2h$ とすると

$$y_0 = \frac{E_1 \int_0^h by dy + E_2 \int_h^{2h} by dy}{bh(E_1 + E_2)} = \frac{h(E_1 + 3E_2)}{2(E_1 + E_2)}$$

数値を代入して

$$y_0 = \frac{3 \times 10^{-2} \times (206 + 3 \times 110) \times 10^9}{2 \times (206 + 110) \times 10^9} = 2.54 \text{ cm}$$

3.5

【解答】

(a) 断面 2 次モーメント I は、例題 3.8 式 (a) の b に 4 cm, h に 3 cm を代入して

$$I = \frac{40 \times 30^3}{12} = 90 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

(b) (a) と同様に

$$I = \frac{30 \times 40^3}{12} = 160 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

(c) 図 3.40 を利用して例題 3.8 式 (a) を計算すると

$$\begin{aligned} I &= 40 \times \int_{-20}^{-10} y^2 dy + 20 \times \int_{-10}^{10} y^2 dy + 40 \times \int_{10}^{20} y^2 dy \\ &= 40 \times \frac{7000}{3} + 20 \times \frac{2000}{3} + 40 \times \frac{7000}{3} \\ &= \frac{600000}{3} = 200 \times 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

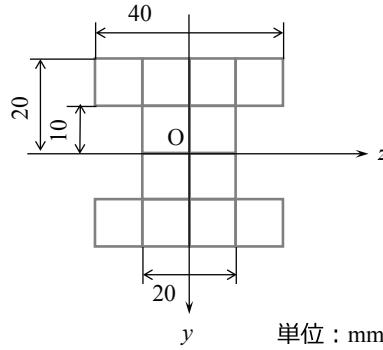


図 3.40

(d) (c) と同様に求めようすると、計算が複雑になることが予想される。そこで、「同じ軸に対する断面2次モーメントは足し算と引き算ができる」ことを利用する。図3.41より

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{10 \times 40^3}{12} + \frac{20 \times 20^3}{12} + \frac{10 \times 40^3}{12} = 120 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

これを利用すると、(c) の解は図3.42より

$$I = I_1 - I_2 - I_3 = \frac{40 \times 40^3}{12} - 2 \times \frac{10 \times 20^3}{12} = 200 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

と簡単に求まる。

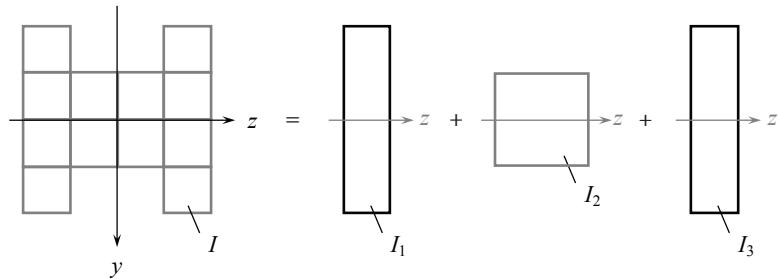


図3.41

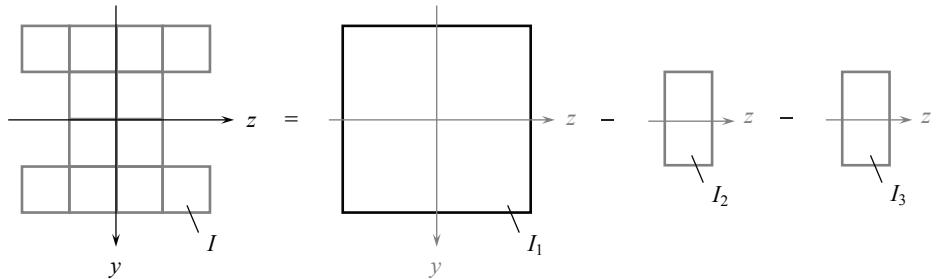


図3.42

(e) 同様に図4.43より

$$I = I_1 - I_2 = \frac{40 \times 40^3}{12} - \frac{20 \times 20^3}{12} = 200 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

以上から、(c) と (e) が等しく最も大きい。

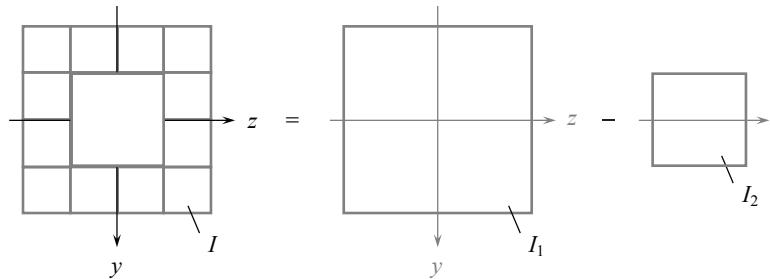


図3.43

3.6

【解答】

はりは、最大曲げ応力が σ_R に達したとき破断する。最大曲げ応力は、曲げモーメントが最大となる位置（危険断面）の外側表面で生じるため、図 3.12 の BMD を考慮して最大曲げモーメントを求める

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}$$

断面 2 次モーメントは例題 3.8 式 (a) で与えられるから、式 (3.24)₁ より最大曲げ応力は

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}e_1}{I} = \frac{3Pl}{2bh^2}$$

$\sigma_{\max} = \sigma_R$ のとき破断するから、最大荷重は

$$P_c = \frac{2\sigma_R bh^2}{3l}$$

3.7

【解答】

図 3.39 の BMD より $M_{\max} = Pa/2$ となり、式 (3.24)₁ と表 3.1 を考慮すると

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pa}{bh^2}$$

となる^a。また、SFD よりせん断力の最大値は $F = P/2$ で与えられ、式 (3.28) より

$$\tau_{\max} = \frac{3P}{4bh}$$

したがって

$$\tau_{\max}/\sigma_{\max} = \frac{h}{4a}$$

$a = l/2$ (3 点曲げ) のとき、例題 3.10 の解に一致する。

^a 4 点曲げの場合、最大垂直応力は荷重点間で一定ですよ。破壊試験を行うとき、3 点曲げに比べ、データのばらつきが小さいといわれています。

3.8

【解答】

三角形状分布荷重を三角形の図心の位置 $x = (2/3)l$ に集中荷重 $(p_0l)/2$ が作用する問題に置き換えて考えると簡単である。例題 3.1 を参照すると、力と A 点回りのモーメントのつり合いで

$$-R_A + \frac{p_0l}{2} - R_B = 0, \quad -\left(\frac{p_0l}{2}\right) \frac{2l}{3} + R_B l = 0$$

これらを連立して解くと

$$R_A = \frac{p_0 l}{6}, \quad R_B = \frac{p_0 l}{3}$$

支点 A から任意の位置 x ではりを仮想的に切断してみると、切断面にはせん断力 F と曲げモーメント M が作用している。長さ x の部分に作用している全荷重は $p_0 x^2 / (2l)$ であるので、せん断力 F は力のつり合いから

$$-R_A + \frac{p_0 x^2}{2l} + F = 0 \quad \therefore F = -\frac{p_0 x^2}{2l} + \frac{p_0 l}{6}$$

一方、曲げモーメントは仮想断面回りのモーメントのつり合いから

$$-R_A x + \left(\frac{p_0 x^2}{2l} \right) \frac{x}{3} + M = 0 \quad \therefore M = -\frac{p_0 x^3}{6l} + \frac{p_0 l x}{6}$$

上式をたわみの微分方程式 (3.31) に代入すると

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p_0}{6EI} \left(\frac{x^3}{l} - lx \right)$$

積分を 2 回繰り返して導入される積分定数 C_1, C_2 は、はりの両端 ($x = 0, l$) の固定条件 $y = 0$ より $C_1 = 7l^3/60, C_2 = 0$ と決まり、たわみ角 θ およびたわみ y は、それぞれ次式のように求まる。

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{p_0}{6EI} \left(\frac{1}{4l}x^4 - \frac{l}{2}x^2 + \frac{7}{60}l^3 \right), \quad y = \frac{p_0}{6EI} \left(\frac{1}{20l}x^5 - \frac{l}{6}x^3 + \frac{7l^3}{60}x \right)$$

3.9

【解答】

任意の位置 x での曲げモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = M_0 = \text{一定}$$

であるので、たわみ曲線の微分方程式 (3.31) に代入すると

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{M_0}{EI}$$

これを順次積分すると、たわみ角 θ とたわみ y がそれぞれ次式のように求まる。

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{M_0}{EI}x + C_1 \tag{a}$$

$$y = -\frac{M_0}{2EI}x^2 + C_1x + C_2 \tag{b}$$

ここで C_1 と C_2 は積分定数であり、境界条件から決定する。A 点は固定支持されているので

$$x = 0 \quad \text{で} \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \tag{c}$$

式 (c) を式 (a) と式 (b) に代入すると

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

したがって、たわみ角 θ とたわみ y はそれぞれ次式のように求められる。

$$\theta = -\frac{M_0}{EI}x, \quad y = -\frac{M_0}{2EI}x^2$$

なお、最大たわみ角 θ_{\max} と最大たわみ y_{\max} は $x = l$ で生じるので、それぞれ上式から次のように求まる。

$$\theta_{\max} = -\frac{M_0}{EI}l, \quad y_{\max} = -\frac{M_0}{2EI}l^2$$

3.10

【解答】

支持反力と支持モーメントを求める。力のつり合いと固定端回りのモーメントのつり合いから

$$\begin{aligned} P - R_A &= 0, \quad \therefore R_A = P \\ M_A - Pl &= 0, \quad \therefore M_A = Pl \end{aligned}$$

任意の位置でのせん断力と曲げモーメントを求める。力と仮想断面回りのモーメントのつり合いから

$$\begin{aligned} F - R_A &= 0, \quad \therefore F(x) = R_A = P \\ M - R_Ax + M_A &= 0, \quad \therefore M(x) = R_Ax - M_A = -P(l - x) \end{aligned}$$

曲げ応力は式 (3.26) で与えられる。図 3.11 より、最大曲げモーメント M_{\max} は $x = 0$ の位置で生じ、 $M_{\max} = M(0) = -Pl$ となる。したがって、 $x = 0$ の位置における断面内の表面 $y = d_0/2$ での曲げ応力が最大曲げ応力 σ_{\max} となり、表 3.1 を考慮して式 (3.26) を用いると

$$\sigma_{\max} = \frac{-Pl}{\pi d_0^4} \frac{d_0}{2} = \frac{32Pl}{\pi d_0^3} \quad (a)$$

一方、任意の位置 x での曲げ応力 $\sigma(x)$ は

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{\pi d(x)^4} \frac{d(x)}{2} = \frac{32P(l - x)}{\pi d(x)^3}$$

平等強さとなるための条件 $\sigma(x) = \sigma_{\max}$ から、任意の位置での直径 $d(x)$ は

$$d^3 = \frac{d_0^2}{l}(l - x), \quad \therefore d = d_0 \sqrt[3]{\frac{l - x}{l}}$$

3.11

【解答】

片持はりには等分布荷重 p のほかにはねの復元力 R_B が作用する。 p による点 B の変位を y'_B , R_B による変位を y''_B とすれば、例題 3.12 の解および式 (3.36)₂ より

$$y'_B = \frac{pl^4}{8EI}, \quad y''_B = -\frac{R_B l^3}{3EI}$$

点 B の変位は、式 (3.50) によって両者を重ね合せて

$$y_B = y'_B + y''_B = \frac{pl^4}{8EI} - \frac{R_B l^3}{3EI}$$

一方、ばねの復元力 R_B は

$$R_B = ky_B$$

上式より、 R_B , y_B を求めると

$$R_B = \frac{3kpl^4}{8(3EI + kl^3)}, \quad y_B = \frac{3pl^4}{8(3EI + kl^3)}$$

$k = 0$ のとき、 $R_B = 0$ となる。また、 $k \rightarrow \infty$ のときは、一端固定・他端支持はり（例題 3.14）の解になる。

3.12

【解答】

例題 3.15 と異なり、A 点の反力、反力モーメントと B 点の反力、反力モーメントは異なる。力のつり合いより

$$R_A + R_B - \int_0^l p(x) dx = 0, \quad \therefore R_A + R_B - \frac{p_0 l}{2} = 0 \quad (a)$$

となる^a。また、A 点回りのモーメントのつり合いより

$$M_A + lR_B - \int_0^l x p(x) dx + M_B = 0, \quad \therefore M_A + M_B + lR_B - \frac{p_0 l^2}{3} = 0 \quad (b)$$

未知数が 4 つであるのに対し、式は 2 つしかないので、例題 3.15 と同様、はりのたわみを考える。せん断力 F と曲げモーメント M は、任意の位置 x での力のつり合いより

$$-R_A + \int_0^x p(t) dt + F = 0, \quad \therefore F = R_A - \frac{p_0 x^2}{2l}$$

また、仮想断面回りのモーメントのつり合いより

$$M_A + M - R_A x + \int_0^x (x-t)p(t) dt = 0, \quad \therefore M = R_A x - M_A - \frac{p_0 x^3}{6l}$$

たわみ曲線の微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \left(R_A x - M_A - \frac{p_0 x^3}{6l} \right)$$

順次積分すると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} R_A x^2 - M_A x - \frac{p_0 x^4}{24l} + C_1 \right)$$

$$y = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2 - \frac{p_0 x^5}{120l} + C_1 x + C_2 \right)$$

左端 ($x = 0$) は固定されているので, $dy/dx = y = 0$ より $C_1 = C_2 = 0$ と決まる. したがって, たわみ角とたわみは次式のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} R_A x^2 - M_A x - \frac{p_0 x^4}{24l} \right) \\ y &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2 - \frac{p_0 x^5}{120l} \right) \end{aligned}$$

一方, 右端 ($x = l$) も固定されているので, $dy/dx = y = 0$ となり

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} R_A l^2 - M_A l - \frac{p_0 l^4}{24l} \right), \quad \therefore M_A = \frac{1}{2} R_A l - \frac{p_0 l^2}{24} \\ 0 &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} R_A l^3 - \frac{1}{2} M_A l^2 - \frac{p_0 l^5}{120l} \right), \quad \therefore M_A = \frac{1}{3} R_A l - \frac{p_0 l^3}{60} \end{aligned}$$

これらを連立して, 反力 R_A と反モーメント M_A を求めると

$$M_A = \frac{p_0 l^2}{30}, \quad R_A = \frac{3p_0 l}{20}$$

式 (a) と式 (b) に代入して

$$R_B = \frac{7p_0 l}{20}, \quad M_B = -\frac{p_0 l^2}{20}$$

^a 分布荷重の総和は積分で求まりますよ. 式 (3.10) をみてみましょう.

【教科書の訂正】

p.46, 図 3.13 BMD の縦軸: $P \rightarrow p$

p.51, 図 3.17(b) : $\sigma_{\min} \rightarrow \sigma_{\max2}$, $\sigma_{\max} \rightarrow \sigma_{\max1}$

p.54, 式 (3.24) : $\sigma_{\max} \rightarrow \sigma_{\max1}$, $\sigma_{\min} \rightarrow \sigma_{\max2}$

$$p.65, 式 (3.45) : \dots = \frac{12Pl}{Eb_0h^3} \rightarrow \dots = \frac{12Pl}{Eb_0h_0^3}$$

p.68, 例題 3.14 (表現の変更) :

式 (b) の上式 :

$$\dots, \quad y_2 = \frac{R_B}{6EI}(x^3 - 3lx^2) \rightarrow \dots, \quad y_2 = \frac{R_B}{6EI}(-x^3 + 3lx^2),$$

式 (b) :

$$y = y_1 + y_2 = \dots + \frac{R_B}{6EI}(x^3 - 3lx^2) \rightarrow y = \dots - \frac{R_B}{6EI}(-x^3 + 3lx^2),$$

式 (c) :

$$\frac{p}{24EI}x(l^4 - 4l^4 + 6l^4) + \frac{R_B}{6EI}(x^3 - 3lx^2) = 0 \rightarrow \frac{p}{24EI}x(l^4 - 4l^4 + 6l^4) - \frac{R_B}{6EI}(-x^3 + 3lx^2) = 0$$

2018/09/28

上の訂正を, 以下のように再訂正します.

式 (c) :

$$\frac{p}{24EI}x(l^4 - 4l^4 + 6l^4) + \frac{R_B}{6EI}(l^3 - 3l^3) = 0 \rightarrow \frac{p}{24EI}(l^4 - 4l^4 + 6l^4) - \frac{R_B}{6EI}(-l^3 + 3l^3) = 0$$

p.70, ところで, はりの中央 ($x = l/2$) でたわみと曲げモーメントは最大となり, 最大たわみ y_{\max} と最大曲げモーメント M_{\max} はそれぞれ次式のようになる.

$$y_{\max} = (y)_{x=l/2} = \frac{pl^4}{384EI}, \quad M_{\max} = (M)_{x=l/2} = \frac{pl^4}{24}$$

→

「はりの中央 ($x = l/2$) でたわみが最大となり, また, はりの両端 ($x = 0, l$) で曲げモーメントが最大となるので, 最大たわみ y_{\max} と最大曲げモーメント M_{\max} はそれぞれ次式のようになる.

$$y_{\max} = (y)_{x=l/2} = \frac{pl^4}{384EI}, \quad M_{\max} = (M)_{x=0,l} = M_0 = \frac{pl^4}{12}$$

p.72, 演習問題 3.11 : ... 曲げ剛性 EI の単純支持はりに → ... 曲げ剛性 EI のはりに

第4章の演習問題解答

4.1

【解答】

ねじれ角は $\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot 0.32 = 5.585 \times 10^{-3} \text{ rad}$ となるので、式 (4.11)₂ から横弾性係数が次のように求まる。

$$G = \frac{Tr}{\varphi I_p} = \frac{80(150 \times 10^{-3})}{(5.585 \times 10^{-3}) \frac{\pi(25 \times 10^{-3})^4}{32}} = 56.0 \text{ GPa}$$

4.2

【解答】

外径 d_o 、内径 d_i とする。せん断応力の最大値が 80 MPa より小さくなるためには、例題 4.3 の第 2 式を参照して

$$d_o^4 - d_i^4 \leq \frac{16d_o T}{\pi \times 80} = \frac{d_o T}{5\pi \times 10^6}$$

$T = 5000 \text{ Nm}$, $d_o > d_i$ より

$$\frac{d_o^4 - d_i^4}{d_o} \geq \frac{1000}{\pi \times 10^6} = 3.183 \times 10^{-4} \quad (\text{a})$$

また、比ねじり角が $2/2 = 1^\circ/\text{m} = 0.0175 \text{ [rad/m]}$ 以下であるためには、例題 4.3 の第 2 式の τ_{\max} に式 (4.6) を利用して^a

$$G \left(\frac{d_o}{2} \right) \theta_{\max} = \frac{16d_o T}{\pi(d_o^4 - d_i^4)}, \quad \therefore \theta_{\max} = \frac{32T}{G\pi(d_o^4 - d_i^4)} \leq 0.0175$$

したがって

$$d_o^4 - d_i^4 \geq 3.6379 \times 10^{-5} \quad (\text{b})$$

式 (a), (b) より

$$d_o \geq 0.1142 \text{ m}, \quad d_i \leq 0.1075 \text{ m}$$

上式より、例えば

$$d_o = 115 \text{ mm}, \quad d_i = 107 \text{ mm}$$

とすればよい。【2025/10/20 訂正】

^a d_o ですよ。

4.3

【解答】

中実丸軸および中空丸軸の横弾性係数を G とする。中実丸軸および中空丸軸のねじり剛性はそれぞれ

$$GI_1 = G \frac{\pi d_1^4}{32}, \quad GI_2 = G \frac{\pi(d_2^4 - d_1^4)}{32}$$

題意より $GI_1 = GI_2$ であるから、中空丸軸の外径は

$$d_2 = \sqrt[4]{2}d_1$$

重量比は材料および長さが等しいので断面積の比に等しくなる。したがって、中実丸軸と中空丸軸の重量比は

$$\frac{\pi d_1^4/4}{\pi(d_2^4 - d_1^4)/4} = \frac{d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2.41$$

同一ねじり剛性を得るのに、中空丸軸に比べ中実丸軸は 2.41 倍重くなり、中空丸軸の方が部材の軽量化に役立つ。

4.4

【解答】

軸の動力は式 (4.17) で与えられる。一方、伝動軸上のせん断応力は式 (4.12)₁ から $\tau = Tr/I_p = T_0r/I_p$ で求められる^a。これらの 2 式から T_0 を消去すると、軸の動力は

$$\begin{aligned} H &= 2\pi n \frac{\tau I_p}{r} = 2\pi \cdot 60 \cdot \frac{(60 \times 10^6) \cdot \pi (30 \times 10^{-3})^4}{32(30 \times 10^{-3})/2} \\ &= 120 \times 10^3 \text{ W} = 120 \text{ kW} \end{aligned}$$

^a 軸に生じるねじりモーメント T はトルク T_0 に等しい ($T = T_0$)。

4.5

【解答】

固定端部からの位置 x における直径 $d(x)$ は次式のように表すことができる。

$$d(x) = -\frac{d_1 - d_2}{l}x + d_1$$

軸に生じるねじりモーメント T はトルク T_0 に等しいので、位置 x での最大せん断応力 $\tau_{\max}(x)$ は式 (4.12)₂ より

$$\tau_{\max}(x) = \frac{d(x)\tau_0}{2I_p} = \frac{16T_0}{\pi d(x)^3} = \frac{16T_0}{\pi [d_1 + (d_2 - d_1)x/l]^3}$$

比ねじれ角 θ は、式 (4.11)₁ より

$$\theta(x) = \frac{T_0}{GI_p} = \frac{32T_0}{\pi G d(x)^4} \quad (a)$$

ねじれ角 φ は、比ねじれ角 $\theta(x)$ を全長 l にわたって積分して

$$\varphi = \int_0^l \frac{32T_0}{\pi G [d_1 + (d_2 - d_1)x/l]^4} dx = \frac{32T_0}{\pi G} \int_0^l [d_1 + (d_2 - d_1)x/l]^{-4} dx$$

ここで $t = [d_1 + (d_2 - d_1)x/l]$ とおくと、 $dx = l/(d_2 - d_1) dt$ であるので、ねじれ角は

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{32T}{\pi G} \int_{d_1}^{d_2} t^{-4} \frac{l}{d_2 - d_1} dt = \frac{32Tl}{\pi G(d_2 - d_1)} \left[-\frac{1}{3}t^{-3} \right]_{d_1}^{d_2} \\ &= \frac{32Tl}{3\pi G(d_2 - d_1)} \left(\frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3} \right) = \frac{32Tl}{3\pi G} \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1^3 d_2^3} \end{aligned}$$

4.6

【解答】

ジュラルミン製の中実丸軸に生じるモーメントとねじれ角を T_1, φ_1 、鋼製のパイプに生じるねじりモーメントとねじれ角を T_2, φ_2 とする。ねじりモーメントのつり合いは

$$T_1 + T_2 - T_0 = 0 \quad (a)$$

また、中実丸軸とパイプは完全に接合されているので、両者のねじれ角は等しい。すなわち、適合条件式は

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

となる。これに式 (4.11)₂ を代入し、表 4.1 の中実丸軸およびパイプの断面 2 次極モーメント ($I_{p1} = \pi d_1^4/32$ および $I_{p2} = \pi(d_2^4 - d_1^4)/32$) を考慮すると

$$\frac{T_1}{G_1 I_{p1}} l = \frac{T_2 l}{G_2 I_{p2}} l \quad \therefore T_1 = \frac{G_1}{G_2} \frac{I_{p1}}{I_{p2}} T_2 = \frac{G_1}{G_2} \frac{d_1^4}{d_2^4 - d_1^4} T_2 \quad (b)$$

式 (a) と式 (b) から

$$T_1 = \frac{G_1 d_1^4}{G_1 d_1^4 + G_2^4 (d_2^4 - d_1^4)} T_0, \quad T_2 = \frac{G_2 (d_2^4 - d_1^4)}{G_1 d_1^4 + G_2 (d_2^4 - d_1^4)} T_0$$

式 (4.12)₂ より、最大せん断応力はそれぞれ次式のように求まる。

$$\begin{aligned} \tau_{\max 1} &= \left(\frac{d_1}{2} \right) \frac{T_1}{I_{p1}} = \frac{16}{\pi} \frac{G_1 d_1}{G_1 d_1^4 + G_2 (d_2^4 - d_1^4)} T_0 \\ \tau_{\max 2} &= \left(\frac{d_2}{2} \right) \frac{T_2}{I_{p2}} = \frac{16}{\pi} \frac{G_2 d_2}{G_1 d_1^4 + G_2 (d_2^4 - d_1^4)} T_0 \end{aligned}$$

【教科書の訂正】

p.84, これらを足して, 固定端 A に対する点 C の... : $P \rightarrow$ これらを足して, 固定端 A に対する点 B の...

第5章の演習問題解答

5.1

【解答】

下端固定・上端支持の長柱の場合には、上端の傾きは自由であるが移動できないので、長柱の上端に横荷重 Q が作用する場合と同じになる。したがって、固定端から任意の位置 x における曲げモーメントは

$$M = Py - Q(l - x)$$

たわみ曲線の微分方程式 (3.31) に代入すると

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + Q(l - x)$$

ここで $P/(EI) = a^2, Q/(EI) = b^2$ とおくと

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = b^2(l - x) \quad (a)$$

これは定数係数の非同次2階線形微分方程式である。一般解 y は同次方程式の同次解 y_h と特解 y_p の和で与えられる。

まず、式 (a) の同次方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の同次解 y_h を求めると

$$y_h = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax \quad (b)$$

ここで C_1 と C_2 は境界条件から決定される。

次に、式 (a) の右辺の形から特解を次のように推定する。

$$y_p = C_3(l - x)$$

これを式 (a) に代入すると

$$a^2 C_3(l - x) = b^2(l - x)$$

したがって $C_3 = b^2/a^2$ となり、特解は

$$y_p = \frac{b^2}{a^2}(l - x)$$

以上から、式 (a) の一般解は次式のように得られる。

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{b^2}{a^2}(l - x) \end{aligned} \quad (c)$$

境界条件は

$$x = 0 \text{ で } y = 0, \frac{dy}{dx} = 0$$

であるので

$$C_1 = \frac{b^2}{a^3}, \quad C_2 = -\frac{b^2}{a^2}l$$

また, $x = l$ で $y = 0$ であるので, 式 (c) に適用すると

$$C_1 \sin al + C_2 \cos al = 0, \quad \therefore \tan al = al$$

上式を満足するの正の最小値は $al = 4.4934$ である. したがって座屈荷重は

$$P_{\text{cr}} = (4.4934)^2 \frac{EI}{l^2} = 2.046 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

5.2

【解答】

5.2 節の「偏心圧縮荷重を受ける柱」を参考にし, 横荷重や偏心荷重が作用する長柱の座屈荷重を最大たわみが無限大となる条件から決定する. 任意の位置 x における曲げモーメント M のつり合いは

$$M + P(\delta - y) + Q(l - x) = 0, \quad \therefore M = -P(\delta - y) - Q(l - x)$$

たわみ曲線の微分方程式 (3.31) に代入すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI}[P(\delta - y) + Q(l - x)], \quad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y + \frac{Q}{EI}x = \frac{P}{EI}\delta + \frac{Q}{EI}l$$

ここで $P/(EI) = q^2$ とおくと

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q^2y + q^2\frac{Q}{P}x = q^2\delta + q^2\frac{Q}{P}l, \quad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} + q^2y = q^2 \left[\delta + \frac{Q}{P}(l - x) \right] \quad (\text{a})$$

これは問題 5.1 と同様定数係数の非同次 2 階線形微分方程式である. 一般解 y は同次方程式の同次解 y_h と特解 y_p の和で与えられる.

まず, 式 (a) の同次方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + q^2y = 0$ の同次解 y_h を求めると

$$y_h = C_1 \sin qx + C_2 \cos qx \quad (\text{b})$$

ここで C_1 と C_2 は境界条件から決定される.

次に, 式 (a) の右辺の形から特解 y_p を次のように推定する.

$$y_p = C_3 \left[\delta + \frac{Q}{P}(l - x) \right]$$

これを式 (a) に代入すると

$$q^2 C_3 \left[\delta + \frac{Q}{P}(l - x) \right] = q^2 \delta + q^2 \frac{Q}{P}(l - x)$$

したがって $C_3 = 1$ となり, 特解は

$$y_p = \delta + \frac{Q}{P}(l - x)$$

以上から, 式 (a) の一般解は次式のように得られる.

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_p \\
&= C_1 \sin qx + C_2 \cos qx + \left[\delta + \frac{Q}{P}(l-x) \right]
\end{aligned} \tag{c}$$

境界条件は

$$x = 0 \text{ で } y = \frac{dy}{dx} = 0$$

であるので

$$\begin{aligned}
C_2 + \left(\delta + \frac{Q}{P}l \right) &= 0 \\
C_1 q - \frac{Q}{P} &= 0
\end{aligned}$$

これらから

$$C_1 = \frac{1}{q} \left(\frac{Q}{P} \right), \quad C_2 = - \left(\delta + \frac{Q}{P}l \right)$$

これを式 (c) に代入して、たわみ y は次式のように得られる.

$$y = \frac{1}{q} \left(\frac{Q}{P} \right) \sin qx - \left(\delta + \frac{Q}{P}l \right) \cos qx + \left[\delta + \frac{Q}{P}(l-x) \right]$$

$y = l$ で $y = \delta$ であるので、式 (c) に適用すると

$$\delta = \frac{1}{\cos ql} \left[\frac{1}{q} \left(\frac{Q}{P} \right) \sin ql - \frac{Q}{P}l \cos ql \right]$$

ここで、 $\cos ql \rightarrow 0$ のときに上端のたわみ δ が急激に増加する。すなわち、 $ql = \pi/2$ のときに上端のたわみ δ は無限大になる。 $ql = \pi/2$ のときの荷重 P を座屈荷重 P_{cr} とおくと、 $P/(EI) = q^2$ を用いて、次式のように求まる。

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

これは横荷重 Q が作用していない一端固定・他端自由の長柱の座屈荷重と同じである。すなわち、横荷重 Q は座屈荷重に関係しないことがわかる。

5.3

【解答】

一端固定・他端自由の柱では、表 5.1 から端末条件係数は $n = 0.25$ であるので、オイラーの座屈荷重は次式で与えられる。

$$P_{\text{cr}} = 0.25 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

したがって、数値を代入して計算すると

$$P_{\text{cr}} = 0.25 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 0.25 \frac{\pi^2 (206 \times 10^9) (0.04^4 / 12)}{3.0^2} = 12.0 \times 10^3 \text{ N}$$

5.4

【解答】

断面二次モーメントは、表 3.1 より

$$\text{円形断面} : I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad \text{正方形断面} : I = \frac{a^4}{12}$$

断面二次半径 $k = \sqrt{I/A}$ は式 (5.23) より

$$\text{円形断面} : k = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} / \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{4}, \quad \text{正方形断面} : k = \sqrt{\frac{a^4}{12} / a^2} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

したがって、細長比はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{円形断面} : \lambda &= \frac{l}{k} = 2 / (0.04 / 4) = 200 \\ \text{正方形断面} : \lambda &= \frac{l}{k} = 2 / (0.04 / \sqrt{12}) = 173 \end{aligned}$$

5.5

【解答】

中実円柱と中空円柱のそれぞれのオイラーの座屈荷重をそれぞれ P_{cr1} および P_{cr2} とする。また、断面二次モーメントをそれぞれ I_1 および I_2 とすると

$$P_{\text{cr1}} = n \frac{\pi^2 EI_1}{l}, \quad P_{\text{cr2}} = n \frac{\pi^2 EI_2}{l}$$

となるので、オイラー座屈荷重の比は次式で与えられる。

$$\frac{P_{\text{cr1}}}{P_{\text{cr2}}} = \frac{I_1}{I_2}$$

中実円柱と中空円柱の断面積をそれぞれ A_1 および A_2 とすると、断面積が等しいので $A_1 = A_2$ 。これより、 $d^2 = d_o^2 - d_i^2$ が得られ、この両辺を d_o^2 で割り、 $m = d_i/d_o$ を用いると

$$\frac{d^2}{d_o^2} = 1 - m^2$$

したがって

$$\frac{P_{\text{cr1}}}{P_{\text{cr2}}} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{d^4}{d_{\text{o}}^4 - d_{\text{i}}^4} = \frac{\left(\frac{d}{d_{\text{o}}}\right)^4}{1 - \left(\frac{d_{\text{i}}}{d_{\text{o}}}\right)^4} = \frac{(1 - m^2)^2}{1 - m^4} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

5.6

【解答】

例題 5.3 と同様な考え方で、オイラーの公式から柱の一辺の長さ a は次式のように求められる。

$$a = \sqrt[4]{\frac{12l^2SP}{n\pi^2E}} = \sqrt[4]{\frac{(12)(2^2)(10)(30 \times 10^3)}{(2.046)(\pi^2)(206 \times 10^9)}} = 0.04313 \text{ m} = 43.1 \text{ mm}$$

このとき、相当細長比 λ' と限界細長比 λ_{cr} は^a

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{12}l}{a} = \frac{\sqrt{12} \times 2}{\sqrt{2.046} \times 0.04313} = 112,$$
$$\lambda_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_k}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times (206 \times 10^9)}{300 \times 10^6}} = 82.3$$

これは $\lambda' > \lambda_{\text{cr}}$ を満足しているため、オイラーの公式が適用できる。したがって、正方形断面の一辺の長さは、 $a = 43.1 \text{ mm}$ となる。

^a 端末条件が両端支持の条件下 ($n = 1$) で、細長比と限界細長比の大小関係を比較しているのです。

第6章の演習問題解答

6.1

【解答】

(a) 式 (6.6) より, 垂直応力は

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 30^\circ = \frac{2.4 \times 10^6}{2} + \frac{5.6 \times 10^6}{2} \cos 30^\circ = 3.62 \text{ MPa}$$

式 (6.7) より, せん断応力は

$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 30^\circ = -\frac{5.6 \times 10^6}{2} \sin 30^\circ = -1.4 \text{ MPa}$$

(b) 式 (6.10) より, 主せん断応力の値は

$$\begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{(4.0 \times 10^6) - (-1.6 \times 10^6)}{2} = \pm 2.8 \text{ MPa}$$

主せん断応力面の法線と x 軸がなす角は, 式 (6.12) で与えられるので

$$\theta_t = \theta_n \pm \frac{\pi}{4} = 0 \pm \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4}$$

$\theta_t = \pi/4$ を式 (6.7) に代入して

$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{(4.0 \times 10^6) - (-1.6 \times 10^6)}{2} = -2.8 \text{ MPa} = \tau_2$$

したがって, $\theta_{t2} = \pi/4$ とし, 他方は $\theta_{t1} = -\pi/4$ となる.

(c) 式 (6.6) より,

$$0 = \frac{(4.0 \times 10^6) + (-1.6 \times 10^6)}{2} + \frac{(4.0 \times 10^6) - (-1.6 \times 10^6)}{2} \cos 2\theta$$
$$\therefore \cos 2\theta = -\frac{3}{7}$$

したがって, 垂直応力 σ が 0 となる面の方向は

$$\theta = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(-\frac{3}{7} \right) = 57.7^\circ$$

この面に作用するせん断応力 τ は, 式 (6.7) より

$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta = -\frac{(4.0 \times 10^6) - (-1.6 \times 10^6)}{2} \sin(2 \times 57.7^\circ) = -2.53 \text{ MPa}$$

6.2

【解答】

満水時にこの円筒容器に作用する最大水圧を p とする。水の質量 m は

$$m = \rho h (\pi r^2)$$

であるから、力のつり合いより

$$p(\pi r^2) = mg = \rho g h (\pi r^2)$$

したがって

$$p = \rho g h$$

(a) 式 (6.24), (6.25) を考慮し、式 (1.23) を用いると

$$\sigma_a \geq \sigma_t = \frac{pr}{t} = \frac{\rho g h r}{t} \quad (a)$$

数値を代入して

$$h \leq \frac{\sigma_a t}{\rho g r} = \frac{(196 \times 10^6) \times (3 \times 10^{-3})}{10^3 \times 9.81 \times 4} = 14.98$$

したがって、最大高さは 14 m である^a.

(b) 式 (1.23) より

$$\sigma_t \leq \sigma_a = \frac{\sigma_Y}{S}$$

式 (a) を考慮すると、上式は

$$\frac{\rho g h r}{t} \leq \frac{\sigma_Y}{S}, \quad \therefore t \geq \frac{\rho g h r S}{\sigma_Y}$$

数値を代入して

$$t \geq \frac{10^3 \times 9.81 \times 20 \times 2 \times 1.5}{240 \times 10^6} = 0.00245$$

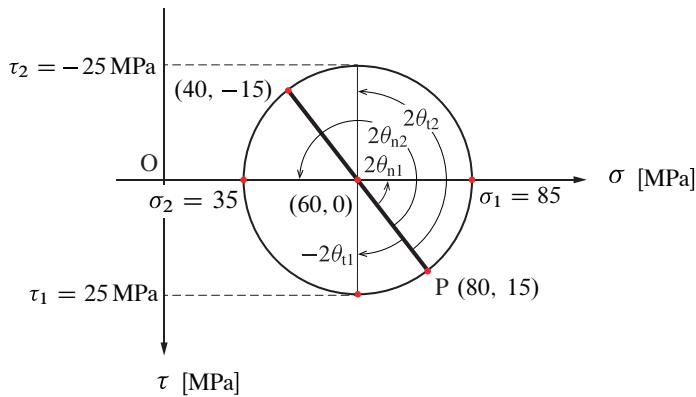
したがって、最小肉厚は 2.5 mm である。

^a 14.9 m としても良いですが、15 m はダメですよ。

6.3

【解答】

(a) 下図のようにモールの応力円が描ける。



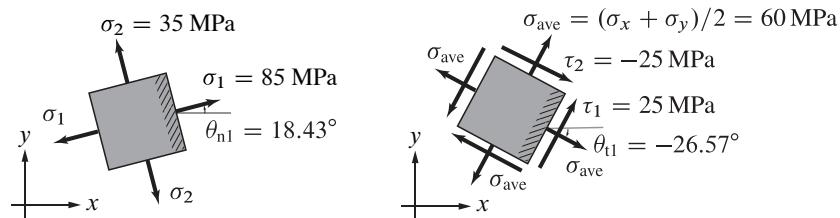
最大および最小の主応力と主せん断応力は

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 85 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 35 \text{ MPa} \\ \tau_1 &= 25 \text{ MPa}, \quad \tau_2 = -25 \text{ MPa}\end{aligned}$$

対応する作用面の法線が x 軸となす角度は、モールの応力円を参照して、それぞれ次のように求められる。

$$\begin{aligned}2\theta_{n1} &= \tan^{-1}(15/20) \quad \therefore \theta_{n1} = 18.43^\circ \\ \theta_{n2} &= \theta_{n1} + 90^\circ = 108.43^\circ \\ -\theta_{t1} &= -45^\circ + \theta_{n1} = 26.57^\circ \quad \therefore \theta_{t1} = -26.57^\circ \\ \theta_{t2} &= 45^\circ + \theta_{n1} = 63.43^\circ\end{aligned}$$

(b) 下図のようになる。



6.4

【解答】

丸軸に作用する最大曲げ応力 σ_1 は、許容引張応力 σ_a よりも小さくなるように設計する必要がある。式 (6.21) より

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + T^2}) \leq \sigma_a \\ \therefore d &\geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi (120 \times 10^6)} \left[(1 \times 10^3) + \sqrt{(1 \times 10^3)^2 + (2 \times 10^3)^2} \right]} \\ &= 51.59 \text{ mm}\end{aligned}$$

一方, 丸軸に作用する最大せん断応力 τ_1 は, 許容引張応力 τ_a よりも小さくなるように設計する必要がある. 式 (6.22) より,

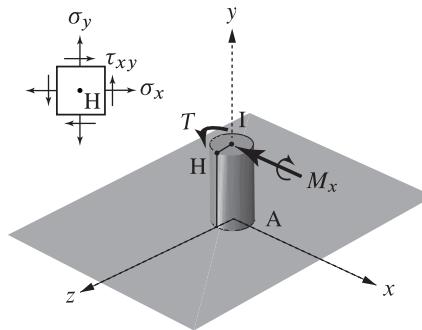
$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2} \leq \tau_a \\ \therefore d &\geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi(60 \times 10^6)}} \sqrt{(1 \times 10^3)^2 + (2 \times 10^3)^2} \\ &= 57.46 \text{ mm}\end{aligned}$$

以上から, 両者の条件を満足するように, 直径 d は 57.5 mm 以上となるように決定する.

6.5

【解答】

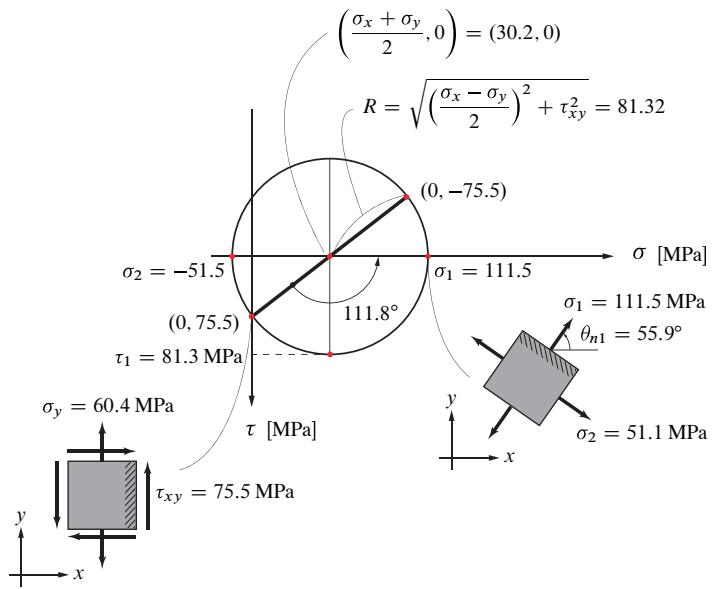
(a) 下図に示すように, 点 H を通り, x 軸と z 軸に平行にとった仮想断面の中心を点 I とする.



この点 I に作用するモーメントは, y 軸まわりのねじりモーメント $T = 800(500 \times 10^{-3}) = 400 \text{ [N m]}$ と, x 軸まわりの曲げモーメント $M_x = 800(200 \times 10^{-3}) = 160 \text{ [N m]}$ である. これらのモーメントによって生じる点 H の応力成分はそれぞれ次式のように計算される.

$$\begin{aligned}\sigma_y &= +\frac{M_x z}{I_x} = \frac{160 \cdot \left(\frac{30}{2} \times 10^{-3}\right)}{\frac{\pi}{64} (30 \times 10^{-3})^4} = 60.4 \text{ [MPa]} \\ \tau_{xy} &= +\frac{T \cdot \frac{d}{2}}{I_p} = \frac{400 \cdot \left(\frac{30}{2} \times 10^{-3}\right)}{\frac{\pi}{32} (30 \times 10^{-3})^4} = 75.5 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

(b) モールの応力円より, 最大主応力は $\sigma_1 = 111.5 \text{ [MPa]}$ (最小主応力は, $\sigma_2 = 30.2 - 81.3 = -51.1 \text{ [MPa]}$) となる. 一方, 最大せん断応力は $\tau_1 = 81.3 \text{ [MPa]}$ となる. x 軸と最大主応力を生じる面の法線がなす角 θ_{n1} は, $\theta_{n1} = 55.9^\circ$ となる.



6.6

【解答】

球形タンクを半割りにして、タンクに生じる応力 σ_ϕ の合応力と p による外力のつり合いを考えると

$$-\sigma_\phi(2\pi rt) + p(\pi r^2) = 0$$

したがって

$$\sigma_\phi = \frac{pr}{2t}$$

上式より、同じ内圧を受ける薄肉円筒の σ_t の半分であるので、球形タンクは薄肉円筒に比べて強い構造体といえる。

【教科書の訂正】

p.121, 演習問題 6.6: 内径 $d \rightarrow$ 内半径 r ; と体積の変化量 → 削除

第7章の演習問題解答

7.1

【解答】

式(7.11)より

$$U_P = \frac{P^2 l_1}{2AE_1} + \frac{P^2 l_2}{2AE_2} = \frac{P^2}{2A} \left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} \right)$$

7.2

【解答】

式(7.16)より

$$U_t = \frac{T^2 l}{2GI_p} = \frac{120^2 \times 0.6}{2 \times (80 \times 10^9) \frac{\pi (0.03)^4}{32}} = 0.679 \text{ J}$$

7.4

【解答】

図3.3のように、任意の位置Cに集中荷重Pを受ける片持ちはりを考え、さらに自由端Bに仮想的な集中荷重P_Bが作用すると仮定する。点Bのたわみは、式(3.35)₂より

$$y_B = \frac{P_B}{6EI} (-a^3 + 3la^2) \quad (a)$$

自由端Bのたわみをy_Bとおくと、仮想定理より

$$Py_C = P_B y_B \quad (b)$$

式(a)からP_Bを求め、式(b)に代入して整理すると

$$y_B = \frac{Pa^2}{6EI} (-a + 3l)$$

7.6

【解答】

はりの先端に作用する集中荷重Pが、はりの先端をδまで変位させる(たわませる)仕事(力×距離)は、式(7.3)と同様な考え方でW = Pδ/2となる。これがはりに蓄えられる弾性ひずみエネルギーU_bと等しいので、先端のたわみδは

$$W = \frac{1}{2}P\delta = U_b \quad \therefore \delta = \frac{2U_b}{P}$$

から求められる。したがって、U_bを求めればよい。

はりの任意の位置 x における曲げモーメントは、式 (3.4) のように求められ、 $M = -P(l-x)$ である。したがって、曲げによるひずみエネルギーは、式 (7.12) から

$$U_b = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l [-P(l-x)]^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6EI}$$

これを上式に代入して

$$\delta = \frac{2U_b}{P} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

を得る。これはたわみの基礎式から求めた結果 [式 (3.36)] と一致していることが確認できる。

7.7

【解答】

はりの中央 ($x = l/2$) に仮想的な集中荷重 P_0 が作用するものと考える。任意の位置 x における曲げモーメントは、

$$M = \begin{cases} -\left[\frac{p}{2}(l-x)^2 + P_0\left(\frac{l}{2}-x\right)\right] & \left(0 \leq x < \frac{l}{2}\right) \\ -\frac{p}{2}(l-x)^2 & \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l\right) \end{cases}$$

曲げモーメントを仮想荷重 P_0 で偏微分すると

$$\frac{\partial M}{\partial P_0} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(l-2x) & \left(0 \leq x < \frac{l}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l\right) \end{cases}$$

カスチリアノの定理を適用すると、はりの中央 ($x = l/2$) でのたわみ δ は

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{l/2} M \frac{\partial M}{\partial P_0} dx + \int_{l/2}^l M \frac{\partial M}{\partial P_0} dx \right] \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left[\frac{p}{2}(l-x)^2 + P_0\left(\frac{l}{2}-x\right) \right] \frac{1}{2}(l-2x) dx \end{aligned}$$

ここで $P_0 = 0$ とおいて積分すれば

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{p}{4EI} \int_0^{l/2} (l-x)^2(l-2x) dx \\ &= \frac{p}{4EI} \left[l^3 x - 2l^2 x^2 + \frac{5}{3} l x^3 - \frac{x^4}{2} \right]_0^{l/2} = \frac{17pl^4}{384EI} \end{aligned}$$

7.8

【解答】

演習問題 3.11

任意の点 x における曲げモーメントは、例題 3.4 の式 (c) と式 (3.4)₂ を重ね合わせて

$$M(x) = -\frac{p(l-x)^2}{2} + R_B(l-x)$$

上式をひずみエネルギーの式 (7.12) に代入すると

$$\begin{aligned} U_B &= \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left\{ -\frac{p(l-x)^2}{2} + R_B(l-x) \right\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2EI} \left(\frac{p^2}{20} l^5 - \frac{pR_B}{4} l^4 + \frac{R_B^2}{3} l^3 \right) \end{aligned}$$

U_B を R_B で偏微分すると、ばね支持端のたわみが

$$y_B = -\frac{1}{2EI} \left(-\frac{p}{4} l^4 + \frac{2R_B}{3} l^3 \right) = \frac{pl^4}{8EI} - \frac{R_B l^3}{3EI}$$

のように求まる^a。上式を $R_B = ky_B$ に代入すると、例題 3.11 と同様の解が得られる。

演習問題 3.12

次回更新します。

^a たわみの方向とばね復元力の方向が異なりますので、マイナスがつきますよ。

【教科書の訂正】

p.135, 演習問題 7.1: ただし、各棒の断面積を A 、縦弾性係数を E とする。→ ただし、各棒の長さを l_1, l_2 、断面積を $A_1 = A_2 = A$ 、縦弾性係数を E_1, E_2 とする。

p.135, 演習問題 7.2: ... の丸軸を... → ... の中実丸軸を...,

この丸軸に蓄えられる... → この軸に蓄えられる...