『楽しく学ぶ破壊力学』演習問題解答

2020 年 9 月 14 日

更新履歴

- 2020/8/29 ch1–ch6 の解答掲載
- 2020/9/14 ch7 の解答掲載

1　材料の変形と破壊

1.
$$P_{\max} = \sigma_{\mathrm{B}} A = 300 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4}(10 \times 10^{-3})^2 = 23.6[\mathrm{kN}]$$

2. 丸棒に生じる応力が引張強さより小さくなければならないため，$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{\mathrm{B}}$ より，
$$d_{\min} = \sqrt{\frac{4P}{\pi\sigma_{\mathrm{B}}}} = \sqrt{\frac{4 \times 20 \times 10^3}{\pi \times 350 \times 10^6}} = 8.5[\mathrm{mm}]$$

3. 丸棒に生じる垂直応力は式 (1.5) より，
$$\sigma_{xx} = \frac{P_x}{A_x} = \frac{4P}{\pi d^2} = 198.9[\mathrm{MPa}] < 200[\mathrm{MPa}]$$
したがって，降伏応力より小さいので降伏しない．

2　孔まわりの応力は？

1. 例題 2.1 を参照．応力集中係数 $\alpha = 3$ より，
$$\sigma_{\max} = \alpha\sigma_{\infty} = 3 \times 200 = 600[\mathrm{MPa}]$$

2. 応力集中係数 $\alpha = 3$ より，負荷応力の 3 倍の応力が円孔の縁に生じる．この最大応力が引張強さ σ_{B} より小さくなければいけないことから，最大引張応力は，
$$\sigma_{\infty} = \frac{\sigma_{\mathrm{B}}}{\alpha} = \frac{300}{3} = 100[\mathrm{MPa}]$$

3. 式 (2.7) より，
$$\sigma_{\max} = \left(1 + 2\frac{a}{b}\right)\sigma_{\infty} = (1 + 2 \times 1.5) \times 100 = 400[\mathrm{MPa}]$$

4. 式 (2.8) から，応力集中係数 $\alpha = 1 + 2(a/b) = 5$ となり，負荷応力の 5 倍の応力が楕円孔の縁に生じる．この最大応力が引張強さ σ_{B} より小さくなければいけないことから，最大引張応力は，

$$\sigma_\infty = \frac{\sigma_{\mathrm{B}}}{[1+2(a/b)]} = \frac{250}{5} = 50[\mathrm{MPa}]$$

3 ひずみエネルギーと破壊

1. 光ファイバーに生じる応力は，

$$\sigma = \frac{P}{\pi(d/2)^2} = \frac{4 \times 40}{\pi(125 \times 10^{-6})^2} = 3.26 \times 10^9[\mathrm{Pa}]$$

式 (3.25) のグリフィスの式から，

$$a = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2} = 1.26 \times 10^{-9}[\mathrm{m}] = 1.26[\mathrm{nm}]$$

したがって，き裂全長は $2a = 2.5$ nm となる．

2. 式 (3.25) のグリフィスの式から，

$$\sigma_\infty = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a}} = 5.2[\mathrm{MPa}]$$

3. くさびと剥離部先端との間を，幅 B，高さ h の長方形断面を有する長さ a の片持ちはりでモデル化する．先端に集中荷重 P が作用する片持ちはりの先端のたわみが u のとき，集中荷重 P は,

$$P = \frac{EBh^3}{4a^3}u$$

とあらわせる．ここで，はりの断面二次モーメントは $I = \frac{Bh^3}{12}$ を用いた．タイルがはがれる瞬間に外力は仕事をしないため，式 (3.10) より，

$$\Delta W = 0$$

が成り立つ．一方，ひずみエネルギーは減少し，その変化量は式 (3.11) より，

$$\Delta U = -\frac{1}{2}u\Delta P$$

となる．タイルがはがれたときのエネルギー変化量は，式 (3.12) より，

$$\Delta\Pi = -\frac{1}{2}u\Delta P$$

となる．したがって，式 (3.15) よりエネルギー解放率は次式のように求まる．

$$G = \lim_{\Delta a \to 0}\left(-\frac{1}{B}\frac{\Delta\Pi}{\Delta a}\right) = -\frac{1}{B}\frac{d\Pi}{da} = \frac{3Eh^3u^2}{8a^4}$$

4　クラック先端の応力は？

1. クラック線上（$\theta = 0$）における垂直応力 σ_{yy} の分布は，式 (4.8) の第 2 式に $\theta = 0$ を代入して,K_{I} を K と書き直して，

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}$$

と表すことができる．分布図は図 4.3 を参照.

2. 無限平板に長さ $2a$ のクラックがある場合の応力拡大係数の式 (4.5) から，

$$K = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} = 200 \times \sqrt{\pi (5 \times 10^{-3})} = 25.1[\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}]$$

一方，平面ひずみ状態の場合のエネルギー解放率は式 (4.27) より，

$$G = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_{\mathrm{I}}^2 = \frac{(1-0.3^2)}{200 \times 10^9} \times (25.1 \times 10^6)^2 = 2.9[\mathrm{kJ/m^2}]$$

3. 片側クラックを持つ半無限平板に長さ a のクラックがある場合の応力拡大係数は例題 4.3 から，

$$K = 1.12 \sigma_\infty \sqrt{\pi a} = 1.12 \times 200 \times \sqrt{\pi (5 \times 10^{-3})} = 28.1[\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}]$$

一方，平面応力状態の場合のエネルギー解放率は式 (4.26) より，

$$G = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E} = \frac{(28.1 \times 10^6)^2}{200 \times 10^9} = 4.0[\mathrm{kJ/m^2}]$$

4. クラック長さと板幅の比が $a/W = 0.2$，表 4.1 より補正係数は $F = 1.0246$ となる．したがって，応力拡大係数は式 (4.20) から，

$$K = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cdot F = 100 \times \sqrt{\pi (10 \times 10^{-3})} \times 1.0246 = 18.2[\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}]$$

5. エネルギー解放率は，例題 3.1 を参照．平面応力状態を仮定した場合の応力拡大係数 K は式 (4.26) から，

$$K = \sqrt{GE} = \sqrt{\frac{12P^2a^2}{B^2h^3}}$$

5　クラックまわりの塑性変形

1. 十分に大きな平板に長さ $2a$ のクラックがある場合の応力拡大係数は式 (4.5) より，

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} = 100 \times \sqrt{\pi (5 \times 10^{-3})} = 12.5[\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}]$$

クラック面上に形成される塑性域寸法は，平面ひずみ状態を仮定した場合，式 (5.23) において $\theta = 0$ とし，

$$r_p = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_{\mathrm{Y}}}\right)^2 (1-2\nu)^2 = 3.4 \times 10^{-5}[\mathrm{m}]$$

2. （問題の訂正）中央に長さ $2a$ のクラックを持つ十分に大きな平板がある．クラックから十分に離れたところでクラック面に垂直方向に引張応力 σ_∞ を負荷する．このとき，小規模降伏条件を満足するために必要な引張応力が満たす条件を求めよ．ただし，降伏応力は 340 MPa とする．

   [解答]
   十分に大きな平板に長さ $2a$ のクラックがある場合の応力拡大係数は式 (4.5) より，

   $$K_{\mathrm{I}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

   小規模降伏条件は式 (5.26) より，

   $$a \geq r_{\mathrm{p}} = 2.5\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_{\mathrm{Y}}}\right)^2 = 2.5\pi a\left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{\mathrm{Y}}}\right)^2$$

   したがって，小規模降伏条件を満足するために必要な引張応力が満たす条件は，

   $$\sigma_\infty \leq \sqrt{\frac{1}{2.5\pi}} \cdot \sigma_{\mathrm{Y}} = 121[\mathrm{MPa}]$$

6　クラックに対する材料の抵抗

1. 十分に大きな平板に長さ $2a$ のクラックがある場合の応力拡大係数は式 (4.5) より，

   $$K_{\mathrm{Ic}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} = 16.8[\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}]$$

2. 十分に大きな平板に長さ $2a$ のクラックがある場合の応力拡大係数は式 (4.5) より，

   $$a = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{Ic}}}{\sigma_\infty}\right)^2 = 1.3 \times 10^{-2}[\mathrm{m}]$$

   したがって，クラックは $2a = 2.6 \times 10^{-2}$ [m] となる．

3. W = 50.8 mm, B = 25.4 mm の CT 試験片を用いて破壊じん性試験を行った．予き裂が a = 25.4 mm のとき，P_Q = 50 kN であった．このときの破壊じん性値 K_{Q} を求めよ．また，この K_{Q} が平面ひずみ破壊じん性値 K_{Ic} として採用できるか否か判定せよ．ただし，この材料の降伏応力を σ_{Y} = 900 MPa とする．

   [解答]
   （注意）テキストの問題文に降伏応力が抜けてました．

   CT 試験片の応力拡大係数 K_Q は，$a/W = 0.5$ より式 (6.7), (6.8) を用いて，

   $$K_{\mathrm{Q}} = \frac{P_{\mathrm{Q}}}{BW^{1/2}} \times f(a/W) = 84.4[\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}]$$

一方，クラック先端に形成される塑性域寸法の代表値 r_{p} は式 (5.26) より，

$$r_{\mathrm{p}} = 2.5 \left(\frac{K_{\mathrm{Q}}}{\sigma_{\mathrm{Y}}} \right)^2 = 22.0[\mathrm{mm}]$$

となり，式 (6.10), (6.11) の条件 $r_p < a, W-a, B$ を満たすため，平面ひずみ破壊じん性値として採用できる．

7　材料だって疲労する？

1. 十分大きな鋼製の板に引っ張りの繰返し応力（応力比 $R=-1$）が負荷されており，非破壊検査で全長 $2a = 2$ mm のクラックが発見された．このとき次の問に答えよ．ただし，この材料の下限界応力拡大係数範囲 $\Delta K_{\mathrm{th}} = 5$ MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$，破壊じん性値 $K_{\mathrm{Ic}} = 60$ MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$ とする．

(a) 発見されたクラックが進展せず停留するとき，応力範囲 $\Delta\sigma$ が満たす条件を求めよ．
(b) いま，100 MPa の引張繰返し応力が負荷されている．このクラックから生じた疲労き裂が不安定破壊するときのクラック全長 $2a_{\mathrm{f}}$ を求めよ．
(c) 不安定破壊するまでの繰返し数を予測せよ．ただし，この材料のパリス則は次式で表わされるものとし，ΔK の単位は MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$ とする．

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = 1.0 \times 10^{-12} (\Delta K)^4 \tag{1}$$

[解答]
(a)　(注意) 問題文があいまいなので少し修正．
式 (7.5) において $F=1$ とし，下限界応力拡大係数範囲を用いると，

$$\Delta\sigma < \frac{\Delta K_{\mathrm{th}}}{\sqrt{\pi a}} = 89.2[\mathrm{MPa}] \tag{2}$$

(b)　最大引張応力は $\sigma_{\max} = 100$ MPa であり，この時に不安定破壊する場合のクラック長さは，式 (4.5) より，

$$a = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K}{\sigma} \right)^2 = 0.11[\mathrm{m}] \tag{3}$$

したがって，き裂全長は $2a_{\mathrm{f}} = 0.22$ m と求まる．

(c) 式 (7.7) を考慮すると，$C = 10^{-12}, m = 4$. 応力比 $R = -1$ より $\Delta\sigma = 200$ MPa. したがって，疲労き裂進展寿命は式 (7.8) より，

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{P}} &= \frac{1}{C(\Delta\sigma\sqrt{\pi} \cdot F)^m (m/2-1)} \left(\frac{1}{a_0^{m/2-1}} - \frac{1}{a_f^{m/2-1}} \right) \\ &= \frac{1}{10^{-12}(200\sqrt{\pi} \times 1)^4} \left(\frac{1}{1 \times 10^{-3}} - \frac{1}{0.11} \right) \\ &\approx 6.3 \times 10^4 [\mathrm{cycles}] \end{aligned} \tag{4}$$

2. 片側クラック ($a_{\mathrm{i}} = 1$ mm) を有する半無限板に，無限遠方で応力範囲 $\Delta\sigma = 50$ MPa の繰返し応力 ($R = 0$) が作用している．このとき，次の問に答えよ．ただし，この材料の下限界応力拡大係数範囲は $\Delta K_{\mathrm{th}} = 3.0$ MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$，疲労破壊じん性値は $K_{\mathrm{fc}} = 50$ MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$, $R = 0$ に対する疲労き裂進展速度 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}N$ と応力拡大係数範囲 ΔK との関係は，$\mathrm{d}a/\mathrm{d}N = 1.0 \times 10^{-12}(\Delta K)^4$ とする．

(a) 負荷される最大応力と最小応力を求めよ．また，クラック先端に負荷される応力拡大係数範囲 ΔK を求めよ．
(b) 一般的な金属材料の疲労き裂進展速度と応力拡大係数範囲との関係を図示せよ．また，その図を使って，下限界応力拡大係数範囲，疲労破壊じん性値，パリス則を説明せよ．
(c) 初期クラックから進展した疲労き裂が不安定破壊するときのクラック長さ a_{f} を求めよ．
(d) クラック長さが 5 mm に進展するまでのサイクル数 N_{p} を求めよ．ただし，応力範囲はクラック長さに依存せず一定とする．
(e) クラック長さが 5 mm に進展したとき，その後，停留させるために必要な応力範囲が満たすべき条件を求めよ．ただし，応力比は変えないものとする．

[解答]
(a) 応力比 $R = 0$ なので，最大応力が $\sigma_{\max} = 50$ MPa，最小応力が $\sigma_{\min} = 0$ MPa となる．また，応力拡大係数範囲は式 (7.5) と例題 4.3 より，

$$\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi a} \cdot F = 50 \times \sqrt{\pi \times 1 \times 10^{-3}} \times 1.12 = 3.1[\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}] \tag{5}$$

(b) 図 7.5 参照．

(c) 応力拡大係数の最大値が疲労破壊じん性値に到達すると不安定破壊が開始するので，

$$a_{\mathrm{f}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{fc}}}{F\sigma_{\max}}\right)^2 = 0.25[\mathrm{m}] \tag{6}$$

(d) 式 (7.7) を考慮すると，$C = 10^{-12}, m = 4$．応力範囲 $\Delta\sigma = 50$ MPa，$F = 1.12$ を考慮すると，疲労き裂進展寿命は式 (7.8) より，

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{P}} &= \frac{1}{C(\Delta\sigma\sqrt{\pi} \cdot F)^m (m/2-1)}\left(\frac{1}{a_{\mathrm{i}}^{m/2-1}} - \frac{1}{a_{\mathrm{f}}^{m/2-1}}\right) \\ &= \frac{1}{10^{-12}(50\sqrt{\pi} \times 1.12)^4}\left(\frac{1}{1 \times 10^{-3}} - \frac{1}{0.25}\right) \\ &= 1.0 \times 10^7[\mathrm{cycles}] \end{aligned} \tag{7}$$

(e) (注意) 問題文があいまいなので一部修正
応力拡大係数範囲が，下限界応力拡大係数範囲より小さくなるようにする．式 (7.5) より，

$$\Delta\sigma < \frac{\Delta K_{\mathrm{th}}}{\sqrt{\pi a} \cdot F} = \frac{3}{\sqrt{\pi \times 5 \times 10^{-3}} \times 1.12} = 21.4[\mathrm{MPa}] \tag{8}$$